Università Bocconi
Centro Pristem
Corso ORIENTAMATICA 2023-2024
Modelli matematici e nella realtà

Enrico Moretto (enrico.moretto@unimib.it)
Università di Milano Bicocca e Università Bocconi

Modelli in finanza

gennaio 2024

Indice degli argomenti

1. Introduzione
2. Che cos'è un mercato finanziario
3. Investimenti, finanziamenti ed operazioni miste
4. Arbitraggi e assenza di arbitraggi
5. La valutazione finanziaria
6. Gli strumenti finanziari
7. Il rischio e i mercati finanziari
8. Conclusioni
9. Appendice matematica

Introduzione - la formula di Re Mida

L'espressione

$$\Pi\left(t, T, S\left(t\right), \sigma, r\right) = S\left(t\right) N\left(d_1\right) - Ke^{-r(T-t)} N\left(d_2\right) \tag{1}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

è la celeberrima, ovviamente per gli 'addetti ai lavori', formula di Black e Scholes.

A questi due ricercatori, assieme ai contributi altrettanto fondamentali di Robert Merton, si deve la nascita di una branca molto importante della teoria della finanza: la valutazione dei titoli derivati.

Come si vedrà nel seguito, i titoli derivati devono il loro nome al fatto che il loro prezzo 'deriva', appunto, da quello di un altro titolo, detto sottostante.

Introduzione - la formula di Re Mida

Il contributo fornito da questi autori è stato ritenuto così importante che, nel 1997, a Robert Merton e a Myron Scholes venne attribuito il premio Nobel per l'economia. Fischer Black, purtroppo, morì nel 1995.

Di e su questa formula si è detto, e a volte stradetto, di tutto.

Periodicamente, il mercato finanziario subisce pesanti perdite. Per l'opinione pubblica e buona parte dei commentatori i principali responsabili sono alcuni (avidi) soggetti che sfruttano conoscenze quantitative sofisticate per speculare e usano modelli come quello di Black e Scholes, mirando ad incredibili guadagni.

L'industria cinematografica ha colto la palla al balzo, proponendo alcuni film, certi in verità davvero avvincenti, basati sulla ricostruzione di vicende che hanno scosso i mercati finanziari statunitensi e le cui ripercussioni si sono fatte sentire in tutto il resto del mondo.

Introduzione - la formula di Re Mida

Il sito `investopedia.com` ha addirittura preparato la lista dei 'migliori' 10 film sull'argomento.

1. Wall Street (1987)
2. Glengarry Glen Ross (1992)
3. Barbarians at the Gate (1993)
4. Rogue Trader (1999)
5. American Psycho (2000)
6. Boiler Room (2000)
7. Enron: The Smartest Guys in the Room (2005)
8. Margin Call (2011)
9. The Wolf of Wall Street (2013)
10. The Big Short (2015)

Introduzione - la formula di Re Mida

A questa lista, non si può non aggiungere 'Una poltrona per due', film del 1983 che, da un bel po' di anni, tutte le vigilie di Natale viene trasmesso in televisione.

Rutilante mondo dello spettacolo a parte, c'è un modo per capire come stiano davvero le cose, quando si parla di finanza?

Questa presentazione mira a fornire non tanto una risposta dettagliata a questa domanda quanto, piuttosto, alcune chiavi di lettura che permettano ad ognuno di farsi un proprio parere.

Che cos'è un mercato finanziario

Le scienze economiche insegnano che "*... il mercato è l'insieme della domanda e dell'offerta, cioè degli acquirenti e dei venditori.*" (fonte: Wikipedia).

Nel mercato finanziario, la 'merce' che viene scambiata è il **denaro**.

In questo mercato, infatti, operano agenti che hanno a disposizione del denaro e, se adeguatamente remunerati, possono decidere di privarsene temporaneamente e altri che, invece, hanno la necessità di averne a disposizione subito.

Diversamente da altri mercati, però, quello finanziario è caratterizzato da una particolarità: il **valore temporale della moneta**.

Si considerino due promesse:

- l'incasso certo di 100 euro tra **un anno** e
- l'incasso certo di 100 euro tra **due anni**.

Che cos'è un mercato finanziario

Il **valore monetario** delle due promesse è lo stesso: 100 euro.

Tuttavia, è ovvio che la prima abbia, oggi, un valore maggiore.

Si chiama **valore finanziario della moneta** quello attribuito, in una scadenza u, a un importo monetario C che sarà disponibile in una scadenza s.

Ci sono qui due casi:

- $u < s$: il valore in u della promessa è minore di C. Si parla in questo caso di attualizzazione;
- $u > s$: il valore in u della promessa è maggiore di C. Si parla di capitalizzazione.

Se nel primo caso l'affermazione è ovvia, per poter giustificare la seconda bisogna considerare il fatto che un soggetto può privarsi di una somma di denaro in s se riceverà a rimborso, in u, una somma maggiore.

La differenza tra questi due importi è detto **interesse**, ed è il denaro ricevuto come remunerazione.
Da un punto di vista matematico, capitalizzazione e attualizzazione vengono espresse da funzioni, dette leggi finanziarie.
La funzione di **capitalizzazione** (detta anche funzione di montante) viene di solito indicata con $f(t)$ mentre quella di **attualizzazione** con $\phi(t)$.

Le due funzioni sono legate dalla condizione di coniugazione:

$$\phi(t) \cdot f(t) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Questa uguaglianza implica che, una volta stabilita una funzione tra f e ϕ, l'altra resta individuata come suo reciproco.

La variabile indipendente di f e ϕ ha come unità di misura il tempo.

Che cos'è un mercato finanziario

Il valore attuale, A, in u di una somma C a disposizione in $s > u$ è

$$A = C \cdot \phi(s - u)$$

mentre il valore montante, M, in u di una somma C a disposizione in $s < u$ ha espressione

$$M = C \cdot \phi(u - s).$$

Ci sono un certo numero di funzioni che possono essere utilizzate come leggi finanziarie. Ciascuna deve soddisfare alcuni requisiti:

- $f(0) = 1$;
- $f(t)$ deve essere una funzione continua e non decrescente;
- $f(t)$ deve essere una funzione derivabile.

Che cos'è un mercato finanziario

La più importante legge è quella dell'**interesse composto**, detta anche legge esponenziale.

La sua espressione è

$$f(t) = (1+i)^t; \quad \phi(t) = (1+i)^{-t}. \tag{2}$$

Il parametro i è detto **tasso d'interesse**.
Questa grandezza indica quanta remunerazione, ovvero quanto interesse, produce una unità monetaria $(C = 1)$ capitalizzata per un periodo di durata unitaria $(t = 1)$.

La remunerazione può, purtroppo, essere negativa. In questo caso l'investitore subisce una perdita, invece di un guadagno.

Si fa, comunque, l'ipotesi di **passività limitata**: la cosa peggiore che può capitare ad una somma impiegata per un certo periodo è che questa venga persa totalmente.

In questo caso la perdita è del 100%, ovvero di tutto il capitale investito.

L'ipotesi di passività limitata implica che $i > -1$.

Il parametro $\delta = \ln(1+i)$ prende il nome di **intensità istantanea di interesse**.

Questa nozione permette di riscrivere la funzione f come una funzione esponenziale che ha, come base, il numero di Nepero:

$$f(t) = e^{\delta t}; \quad \phi(t)\, e^{-\delta t}. \tag{3}$$

Questa espressione delle leggi di capitalizzazione e attualizzazione permette di semplificare alcuni calcoli.

Investimenti, finanziamenti ed operazioni miste

Un'**operazione finanziaria** (O.F.) è un contratto (ovvero un accordo vincolante tra due soggetti) che stabilisce le modalità con le quali i due individui si scambiano somme di denaro su scadenze differenti.

Un'O.F. consiste di almeno due flussi di denaro con segni opposti.

La convenzione è che flussi di denaro in entrata (uscita) vengano espressi con numeri positivi (negativi).

Un'O.F. è un **investimento** quando il segno dei suoi flussi cambia una volta sola e passa dal negativo al positivo.

Un'O.F. è un **finanziamento** quando il segno dei suoi flussi cambia una volta sola e passa dal positivo al negativo.

Un'O.F. è invece detta mista quando i suoi flussi cambiano di segno più di una volta.

Investimenti, finanziamenti ed operazioni miste

Il più semplice esempio di investimento è $(C, M > 0,\ s < u)$:

scadenze	s	u
flussi	$-C$	M

mentre per il finanziamento si ha

scadenze	s	u
flussi	C	$-M$

Un'osservazione interessante è che un'O.F. è un investimento, se visto da una delle due parti e un finanziamento, se visto dalla controparte.

Un esempio di O.F. mista è il seguente $(C, M, N > 0,\ s < u < v)$:

scadenze	s	u	v
flussi	$-C$	M	$-N$

Investimenti, finanziamenti ed operazioni miste

Gli investimenti più semplici che possono essere effettuati sul mercato finanziario sono i Buoni Ordinari del Tesoro (BOT).

Questi titoli sono anche conosciuti con il nome di *zero coupon bond (zcb)*.

Alla loro emissione, la scadenza di questi titoli è, al massimo, di un anno.

Esistono anche investimenti che prevedono un esborso iniziale e più di un'entrata successiva.

È il caso dei Buoni Poliennali del Tesoro (BTP) e dei Certificati di Credito del Tesoro (CCT).

Alla loro emissione questi titoli hanno scadenze più lunghe, rispetto ai BOT.

Esistono, per esempio, BTP con scadenza, alla loro emissione, trentennale.

Investimenti, finanziamenti ed operazioni miste

Una sequenza di flussi di cassa (eventualmente anche un unico flusso) con il medesimo segno non può essere intesa come un'O.F in quanto manca, lo scambio di denaro tra le controparti.

Si parla, in questo caso, di **arbitraggio**.

In matematica, fisica, ... (quasi) tutte le formule legano i loro membri sinistro e destro mediante il simbolo di uguaglianza.

La matematica finanziaria non si comporta diversamente: la ragione per la quale si possono scrivere espressioni è il verificarsi dell'ipotesi di **assenza di opportunità di arbitraggio** (A.O.A.).

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

Un po' di buon senso consente di affermare che in un mercato finanziario gli agenti che operano in esso non possono generare denaro dal nulla.

Questa assunzione deriva direttamente dall'avidità umana.

Si consideri un tizio che vuole intraprendere l'investimento di C euro dalla scadenza 0 alla scadenza t

scadenze	0	t	$t+s$
investimento 1	$-C$	$C \cdot f(t)$	

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

Se questa persona non ha (o non vuole sborsare di tasca propria) l'importo C, può chiedere un finanziamento di ammontare pari a tale somma.

Si supponga che la scadenza di questo finanziamento sia in $t+s$ $(s>0)$.

Le due O.F., tra loro combinate, diventano

scadenze	0	t	$t+s$
investimento 1	$-C$	$C \cdot f(t)$	
finanziamento	C		$-C \cdot f(t+s)$

In t il soggetto può reinvestire quanto generato dal primo investimento fino alla scadenza $t+s$.

Le tre sequenze di flussi hanno come rappresentazione

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

scadenze	0	t	$t+s$
investimento 1	$-C$	$C \cdot f(t)$	
finanziamento	C		$-C \cdot f(t+s)$
investimento 2		$-C \cdot f(t)$	$C \cdot f(t) \cdot f(s)$

Sommando i flussi, scadenza per scadenza, delle tre O.F. si trovano i flussi netti

scadenze	0	t	$t+s$
investimento 1	$-C$	$C \cdot f(t)$	
finanziamento	C		$-C \cdot f(t+s)$
investimento 2		$-C \cdot f(t)$	$C \cdot f(t) \cdot f(s)$
flussi netti	0	0	$C[f(t) \cdot f(s) - f(t+s)]$

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

O.F. 'lecite' portano ad un possibile arbitraggio in quanto il terzo flusso netto, se diverso da 0, non è preceduto da un flusso di segno opposto.

Entra qui in gioco l'avidità umana: una persona razionale che si accorge di un arbitraggio che genera un flusso positivo lo sfrutta e incassa tale somma.

Non appena questa persona sfrutta l'opportunità di arbitraggio, quest'ultimo scompare.

Un'analogia è quella di un tizio che perde una banconota per strada. Il primo passante che si accorge del denaro lo raccoglie e lo intasca.

L'aver perso del denaro spinge il tizio a prestare maggiore attenzione e a non perderne nuovamente.

L'ipotesi di A.O.A. impone che

$$f(t) \cdot f(s) - f(t+s) = 0 \quad \forall t, s, > 0. \tag{4}$$

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

Questa relazione viene chiamata **scindibilità** della legge finanziaria $f(t)$.

La (4) indica come l'ipotesi di A.O.A implichi che esiste una legge di capitalizzazione per la quale una capitalizzazione da 0 a t che viene subito ripresa da t a $t+s$ (con durata s) deve porgere in $t+s$ lo stesso montante ottenuto senza alcuna interruzione.

Se $f(t) \cdot f(s) - f(t+s) > 0$ la combinazione delle tre O.F. sopra definite porta ad un arbitraggio che genera dal nulla un flusso positivo.

Nel caso, invece, $f(t) \cdot f(s) - f(t+s) < 0$, è comunque possibile ottenere un arbitraggio che genera un flusso positivo semplicemente scambiando tra loro investimenti e finanziamento.

Arbitraggi e assenza di arbitraggi

scadenze	0	t	$t+s$
finanziamento 1	C	$-C \cdot f(t)$	
investimento	$-C$		$C \cdot f(t+s)$
finanziamento 2		$C \cdot f(t)$	$-C \cdot f(t) \cdot f(s)$
flussi netti	0	0	$C\left[f(t+s) - f(t) \cdot f(s)\right]$

Si nota come il flusso netto in $t+s$ sia positivo e l'arbitraggio diventa vantaggioso.

La (2) soddisfa la proprietà di scindibilità

$$f(t) \cdot f(s) = (1+i)^t \cdot (1+i)^s = (1+i)^{t+s} = f(t+s)$$

Il suo uso non viola, quindi, l'ipotesi di A.O.A.

La valutazione finanziaria

Si consideri la sequenza di flussi positivi

scadenze	0	t_1	t_2	$\dots$	t_n	$\dots$
flussi		a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$

Il loro valore in 0, se il numero di flussi è finito, è dato dalla somma del loro valore attuale

$$P_0(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-t_k}$$

o

$$P_0(\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}.$$

Se, invece, la sequenza dei flussi è infinito, il valore attuale in 0 è

$$P_0(i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (1+i)^{-t_k}$$

oppure

$$P_0(\delta) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{-\delta t_k}.$$

Quelle sopra sono formule fondamentali.

Tutta la teoria della valutazione finanziaria si basa su di esse o su loro sofisticazioni in grado di tenere conto, per esempio, dell'incertezza.

Gli strumenti finanziari

Sono due le tipologie di titoli finanziari a disposizione agli investitori:

- le **azioni**: sono titoli che garantiscono la proprietà di una frazione di una società;
- le **obbligazioni**: sono titoli di debito in quanto i loro possessori vantano un credito nei confronti di un ente (ad esempio uno stato oppure una società).

In entrambi i casi, chi acquista un titolo finanziario diventa un finanziatore. Nel primo caso, questo prestito viene remunerato dalla società mediante il pagamento di **dividendi** una o più volte l'anno, che sono una porzione dell'utile prodotto annualmente dalla società stessa.

Nel caso delle obbligazioni, invece, il capitale prestato matura interessi che vengono pagati periodicamente (per esempio ogni semestre) e che sono calcolati in base a quanto prestato e ad un **tasso cedolare** che può essere costante (è il caso del BTP) o variabile nel tempo (CCT).

Gli strumenti finanziari

Le obbligazioni hanno una scadenza stabilita al momento della loro emissione: in quell'istante il capitale prestato verrà rimborsato ed il debito estinto.

Le azioni, invece, sono titoli che, se la società non andrà in bancarotta, almeno a livello teorico pagheranno dividendi in perpetuo.

Di norma, l'investimento in azioni è considerato più rischioso di quello in obbligazioni.

Questa affermazione deriva da un certo numero di motivi:

- le società sono obbligate a pagare gli interessi sulle loro obbligazioni prima di corrispondere i dividendi;
- in caso di insolvenza di una società, gli obbligazionisti hanno un privilegio rispetto agli azionisti: ricevere per primi il rimborso di quanto da loro prestato.

Gli strumenti finanziari

Per contro, chi investe in azioni può ricevere remunerazioni maggiori rispetto a chi investe in obbligazioni.

Una regola che può essere utilizzata dagli investitori è quella di detenere portafogli composti sia da azioni che da obbligazioni.

La proporzione tra i due investimenti dipende dalla propensione al rischio dell'investitore.

Uno dei più noti modelli per la valutazione di titoli azionari è quello di **Gordon e Shapiro**.

Questo modello è la trasposizione, adattata allo strumento finanziario, delle formule di valutazione finanziaria introdotte poco sopra.

Devono quindi valere alcune ipotesi:

- i dividendi pagati crescono di anno in anno ad un tasso costante $g > -1$. Noto l'importo del più recente dividendo (d_0),

$$d_1 = d_0 (1+g), \; d_2 = d_1 (1+g) = d_0 (1+g)^2, \; \ldots$$
$$d_t = d_0 (1+g)^t;$$

- i dividendi futuri sono infiniti;
- il tasso di valutazione i è costante e tale che $g < i$;
- la valutazione avviene immediatamente dopo che l'azionista ha incassato il dividendo d_0.

Alla luce di tutto questo, il prezzo dell'azione in 0 è

$$P_0 = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{d_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{d_0 (1+g)^t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{+\infty} d_0 \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^t \tag{5}$$

L'espressione (5) è quella di una **progressione geometrica**: per questa esiste l'espressione esplicita della somma.

Data una progressione con generico elemento $a_t = a_0 q^t$ è noto che

$$\sum_{t=0}^{n} a_t = \sum_{t=0}^{n} a_0 q^t = a_0 \sum_{t=0}^{n} q^t = \begin{cases} a_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ a_0 \,(n+1) & \text{se } q = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Il limite per $n \to +\infty$ della sommatoria converge se $q \neq 1$ e se converge il termine q^{n+1}, che è di forma esponenziale: $f(x) = q^x$, $q > 0$, $q \neq 1$.

Al crescere di x, questa funzione può avere i seguenti comportamenti:

$$\lim_{x \to +\infty} q^x = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1; \\ +\infty & \text{se } q \geq 1; \\ \text{indeterminato} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

L'espressione (5), rispetto alla (6), ha un addendo in meno dato che nel primo caso la sommatoria parte da 1 mentre nel secondo da 0.

Di conseguenza

$$\sum_{t=1}^{+\infty} d_0 \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^t = \sum_{t=0}^{+\infty} d_0 \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^t - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^0$$

$$= \sum_{t=0}^{+\infty} d_0 \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^t - 1$$

A questo punto, sfruttando la (6), se $-1 < q < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{t=0}^{n} a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}.$$

dato che qui valgono $q = \dfrac{1+g}{1+i}$ e $a_0 = d_0$,

Se i due tassi verificano questa disuguaglianza, è finalmente possibile determinare l'espressione esplicita della (5).

$$P_0 = \sum_{t=1}^{+\infty} d_0 \left(\frac{\overbrace{1+g}^{q}}{1+i} \right)^t = d_0 \cdot \frac{\frac{1+g}{1+i}}{1-\frac{1+g}{1+i}}$$

$$= d_0 \cdot \frac{1+g}{1+i} \cdot \frac{1+i}{i-g} = \frac{d_0\,(1+g)}{i-g}.$$

sotto la condizione che la sommatoria converga e tenendo conto che il rapporto $\frac{1+g}{1+i}$ non può essere negativo dato che $i, g > -1$, ovvero che

$$\left| \frac{1+g}{1+i} \right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{g < i}.$$

Questa formula, per quanto semplice, riflette un buon numero di aspetti che caratterizzano la teoria della valutazione finanziaria.

Per prima cosa, maggiore il dividendo pagato, maggiore la remunerazione che ricevono gli azionisti e maggiore il prezzo dell'azione.

Per quel che riguarda, invece, il tasso di valutazione i, maggiore questa quantità, minore il prezzo.

Questa osservazione è coerente con il fatto che se il tasso i cresce, il valore attuale dei flussi futuri diminuisce.

Infine, il tasso di crescita g ha un doppio effetto. Il primo è relativo al numeratore: se g cresce, aumenta il numeratore ed il prezzo sarà maggiore. Per quel che riguarda il denominatore, invece, un aumento del tasso di crescita lo fa diminuire. Anche questo effetto contribuisce a far crescere il prezzo.

La condizione $g < i$ evita che il prezzo possa assumere valori negativi o che il denominatore dell'espressione del prezzo sia nullo.

Questa condizione ha anche una spiegazione finanziaria: se una società cresce troppo rischia di uscire dal mercato in quanto non ha tempo di consolidare la sua struttura.

Questo fenomeno si è verificato, per esempio con la **bolla dotcom** all'inizio del ventunesimo secolo.

Passando alla valutazione delle obbligazioni, che possono essere rappresentate genericamente con questo schema,

scadenze	0	t_1	t_2	$\ldots$	t_n
flussi		a_1	a_2	$\ldots$	a_n

la prima differenza rispetto alle azioni che si nota è il numero finito di flussi generati da questi titoli la cui scadenza è $T = t_n$.

A voler essere precisi, nei decenni scorsi furono emessi titoli obbligazionari senza scadenza (noti con il nome di debito irredimibile dello Stato).

Chi li possedeva si vedeva corrisposte cedole periodiche perpetue senza ricevere mai il rimborso del capitale prestato.

La formula di valutazione delle obbligazioni ricalca quelle viste sopra:

$$P_0(i) = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-t_k} \tag{7}$$

Questa formula può essere scritta anche come funzione dell'intensità istantanea di interesse δ

$$P_0(\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k} \tag{8}$$

Una volta trovata la formula per determinare il valore delle obbligazioni, ci si potrebbe chiedere cosa succede se il tasso di valutazione cambia.

Questa domanda introduce l'aspetto più interessante della teoria finanziaria: cos'è il **rischio**, come lo si **misura** e come lo si può **gestire**.

Tutto quello che ha a che fare con il futuro ha anche a che fare con il **rischio**.

Il rischio e i mercati finanziari

Una definizione (non rigorosa) è la seguente: si ha a che fare con il rischio quando nel futuro si verifica una situazione diversa da quella prevista.

Il fisico danese Niels Bohr, che vinse il premio Nobel per la fisica nel 1922, ebbe a dire che "È difficile fare previsioni, soprattutto sul futuro".

Il mondo odierno vive sulle previsioni: quelle del tempo, quelle relative alle scommesse sportive, quelle economiche, ...

Come ci si può comportare quando le previsioni risultano errate?

La prima cosa da dire è che il rischio non va inteso unicamente in senso negativo.

Se rischio significa variabilità del risultato di un evento, l'esito risultante potrebbe essere favorevole al soggetto che ha corso il rischio.

Il rischio e i mercati finanziari

Un'altra cosa è ritenuta importante: è impossibile, e a volte inutile, evitare al 100% di correre dei rischi.

Ogni azione commessa, anche nella vita quotidana, comporta con sè l'accettazione di una dose, piccola o grande, di rischio.

Quel che è importante, piuttosto, è riuscire a prendere le giuste contromisure di fronte al rischio.

Un esempio lampante è quello delle assicurazioni: un edificio può essere assicurato contro un danno, per esempio l'effetto di un fulmine che colpisce la casa e fa saltare l'impianto elettrico.

La probabilità che questo evento succeda è piccola ma non nulla e, nel caso l'evento succedesse, i danni sarebbero consistenti.

Al proprietario di un'abitazione conviene o non conviene sottoscrivere un contratto di assicurazione?

Il rischio e i mercati finanziari

Quando si parla di obbligazioni, due sono i principali rischi di tipo finanziario:

- il rischio di **tasso** che si manifesta quando, una volta trovato il prezzo di un titolo usando un certo tasso i (o δ) il tasso di modifica e diventa $i + \Delta i$ $(\delta + \Delta\delta)$;
- il rischio di **merito creditizio** che si manifesta quando l'incasso dei flussi futuri garantiti dall'obbligazione (cedole e rimborso del capitale) diventa meno, o più, probabile.

Il primo caso può essere analizzato sfruttando la (7) e la (8).

Un eventuale ripasso delle nozioni matematiche usate di seguito sono recuperabili nell'Appendice al termine di questi lucidi.

Il rischio e i mercati finanziari

Uno degli usi delle derivate che risultano particolarmente importanti nelle applicazioni economiche e finanziarie e la loro capacità di rendere 'più semplici' funzioni 'complesse'.

Per essere più precisi: la derivata permette di approssimare funzioni derivabili mediante funzioni lineari.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in A$, sia $P \equiv (x_0, f(x_0))$ il punto della funzione individuato da x_0 e sia $f'(x_0)$ la derivata di f nel punto x_0.

Vale l'approssimazione

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)(x_0 + h - x_0) = f'(x_0) \cdot h$$

ovvero

$$f(x_0 + h) \simeq f'(x_0) \cdot h$$

Il valore che la funzione assume se quello assunto dalla variabile indipendente varia di h ha approssimazione lineare dove il termine $f(x_0)$ svolge il luogo dell'intercetta, $f'(x_0)$ quello della pendenza a dove la variazione h è la variabile indipendente.

Cosa a che fare questa tutto questo con il rischio di tasso?

È sufficiente collegare l'espressione appena introdotta con la (8) per capire l'importanza della nozione di derivata e dell'approssimazione che questa permette. Siano:

- $x_0 = \delta$,
- $h = \Delta\delta$,
- $f(x_0) = P_0(\delta)$ e
- $f(x_0 + h) = P_0(\delta + \Delta\delta)$.

Dalla (8) si ottiene

$$\underbrace{P_0(\delta+\Delta\delta)}_{f(x_0+h)} - \underbrace{P_0(\delta)}_{f(x_0)} \simeq \underbrace{P_0'(\delta)}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\Delta\delta}_{h}$$

e, da questa, si deduce come la **variazione assoluta** del valore del titolo $(P_0(\delta+\Delta\delta) - P_0(\delta))$ sia approssimabile con il prodotto tra la derivata prima della funzione prezzo dell'obbligazione e la variazione di δ.

Dividendo ambo i membri dell'espressione approssimata appena introdotta questa diventa

$$\frac{P_0(\delta+\Delta\delta) - P_0(\delta)}{P_0(\delta)} \simeq \frac{P_0'(\delta)}{P_0(\delta)} \cdot \Delta\delta.$$

Il membro sinistro è la **variazione relativa** (o percentuale) del prezzo dell'obbligazione dovuta alla variazione del tasso.

In economia e in finanza alcuni fenomeni vengono descritti meglio se espressi in termini di variazioni relative, invece che assolute.

La derivata della funzione $P_0(\delta)$ è

$$P_0'(\delta) = -\sum_{k=1}^{n} a_k t_k e^{-\delta t_k}.$$

Vale la pena notare il segno negativo presente nella derivata appena calcolata.

Sostituendo questa espressione nella variazione relativa si ottiene Inserendo la derivata trovata si può finalmente scrivere

$$\frac{\Delta P_0(\delta)}{P_0(\delta)} \simeq -\underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k t_k e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}}_{\text{Duration}} \cdot \Delta\delta \tag{9}$$

La frazione a membro destro della (9) è la **durata media finanziaria**, o duration, dell'obbligazione:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k t_k e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}$$

Questa grandezza è una media ponderata delle scadenze dell'obbligazione con pesi relativi i valori attuali dei rispettivi flussi.

Ponendo

$$w_k = \frac{a_k e^{-\delta t_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\delta t_k}}, \qquad k = 1, ..., n, \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k = 1.$$

La durata media finanziaria può essere riscritta come

$$D = \sum_{k=1}^{n} t_k w_k.$$

La (9) lega la variazione percentuale del prezzo di un'obbligazione alla variazione (assoluta) del tasso.

Ci sono alcuni aspetti che vale la pena evidenziare.

Il primo è la presenza del segno $-$ nel membro destro dell'espressione (9).

Questo indica che se il tasso cresce, il prezzo dell'obbligazione diminuisce e viceversa.

Ciò diventa importante in momenti dove i tassi di interesse sono in cambiamento.

Il secondo è relativo al fatto che se è vero che la variazione del tasso è comune a tutti i titoli, ogni titolo ha duration diversa.

La variazione del prezzo dei titoli a causa della variazione del tasso di valutazione è più o meno marcata e questo in relazione alla loro durata media finanziaria.

Si può affermare che la duration di un titolo è una **misura del suo rischio** in quanto stabilisce come, in prima approssimazione, il prezzo del titolo reagisce a variazioni del tasso di valutazione.

Se si prevedono tassi in crescita, la variazione relativa del prezzo dei titoli obbligazionari avrà segno negativo e sarà tanto più elevata quanto maggiore è la durata media finanziaria.

Se, invece, si prevedono tassi in diminuzione, la variazione relativa del prezzo dei titoli obbligazionari avrà segno positivo. Anche in questo caso questa variazione sarà tanto più elevata quanto maggiore è la durata media finanziaria.

Il rischio e i mercati finanziari

Come detto in precedenza, il termine rischio non è per forza sinonimo di perdita.

Un investitore che acquista titoli obbligazionari con duration elevata rischia di perdere in maniera sensibile se il tasso subirà variazioni in aumento ma potrà beneficiare di un consistente aumento del valore dei titoli stesso nel caso contrario.

La (9) suggerisce che la scelta per investitori che non amano rischiare è acquistare titoli con durata media finanziaria molto bassa.

Gli agenti che non invece propensi al rischio possono optare per titoli con una durata media finanziaria elevata. Le potenziali perdite (se il tasso cresce) sono compensate dai potenziali guadagni (se il tasso diminuisce).

Usando l'algebra lineare è poi possibile costruire portafogli di obbligazioni. In questo modo un investitore possa stabilire quale durata media finanziaria (e quindi quale esposizione al rischio di tasso) debba avere il suo investimento.

La durata media finanziaria ha altri usi. Per esempio, la duration viene utilizzata per immunizzare un portafogli di obbligazioni dal rischio di tasso.

In questo caso è possibile garantire che il portafogli abbia un valore certo ad una scadenza futura.

Esempio - 1/X

Siano

scadenze	0	1	2	3
flussi		20	60	40

i flussi futuri di un'obbligazione e sia $\delta = 0.08$ il tasso di valutazione.

Il valore in 0 del titolo è

$$P_0(0.08) = 20 \cdot e^{-0.08 \cdot 1} + 60 \cdot e^{-0.08 \cdot 2} + 40 \cdot e^{-0.08 \cdot 3} = 101.056$$

Esempio - 2/X

La duration del titolo è

$$D = \frac{20 \cdot 1 \cdot e^{-0.08 \cdot 1} + 60 \cdot 2 \cdot e^{-0.08 \cdot 2} + 40 \cdot 3 \cdot e^{-0.08 \cdot 3}}{101.056}$$
$$= \frac{215.115}{101.056} = 2.2187$$

Se $\Delta\delta = 0.01$, il prezzo effettivo del titolo è

$$P_0\left(0.08 + 0.01\right) = 20 \cdot e^{-0.09 \cdot 1} + 60 \cdot e^{-0.09 \cdot 2} + 40 \cdot e^{-0.09 \cdot 3} = 98.93$$

La variazione relativa del prezzo è, allora,

$$\frac{98.93 - 101.056}{101.056} = -0.021$$

Esempio - 3/X

ovvero -2.1%.
La variazione relativa approssimata ottenuta usando la duration è

$$-2.2187 \cdot 0.01 = -0.02219.$$

Se, invece la variazione di δ è negativa, per esempio $\Delta\delta = -0.01$, il prezzo effettivo del titolo è

$$P_0\left(0.08 - 0.01\right) = 20 \cdot e^{-0.07 \cdot 1} + 60 \cdot e^{-0.07 \cdot 2} + 40 \cdot e^{-0.07 \cdot 3} = 103.233$$

La variazione relativa del prezzo è

$$\frac{103.233 - 101.056}{101.056} = 0.0215$$

Esempio - 4/X

mentre quella approssimata è

$$-2.2187 \cdot (-0.01) = +0.02219.$$

L'approssimazione lineare del prezzo del titolo ottenuta con la duration è

$$P_0\left(0.08 + \Delta\delta\right) \simeq P_0\left(0.08\right) + P_0'\left(0.08\right) \cdot \Delta\delta$$
$$101.056 + 215.115 \cdot \Delta\delta$$

ed ha rappresentazione grafica

Esempio - 5/X

Figura 1: approssimazione lineare della funzione prezzo dell'obbligazione

Conclusioni

Quanto riportato in questi lucidi è solo una delle applicazioni che la matematica ha in finanza.

In termini generali, la trattazione del rischio richiede di usare il calcolo delle probabilità quale strumento matematico in grado di rappresentare l'incertezza.

Argomenti quali la selezione del portafogli o le misure di rischio richiedono infatti nozioni quali il valore atteso, la varianza, la covarianza e la funzione di ripartizione di variabili aleatorie, tutti facenti parte di un corso introduttivo di calcolo delle probabilità.

GRAZIE DELL'ATTENZIONE!!

Appendice matematica

Sia $f(x)$ una funzione con dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

Sia $h \in \mathbb{R}$ un numero tale per cui $x_0 + h \in A$.

La funzione è derivabile in x_0 se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se questo si verifica, la f è derivabile in x_0 ed il risultato del limite viene indicato con $f'(x_0)$.

Inoltre, se una funzione f ammette derivata per ogni $x_0 \in A$ si dice che la funzione è derivabile in tutto il suo dominio.

La derivata della funzione esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ è $f'(x) = a^x \ln a$.

In particolare, la derivata di $f(x) = e^x$ è

$$f'(x) = e^x.$$

Appendice matematica

Date due funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq A \to \mathbb{R}$, la derivata della funzione composta $g(f(x))$ è

$$g'(f(x))\, f'(x).$$

La derivata della funzione esterna g si ottiene ponendo $y = f(x)$, calcolando la derivata di $g(y)$ e sostituendo qui a ritroso $f(x)$ all'interno di $g(y)$.

Date le funzioni $f_k : A_k \subseteq \mathbb{R}$, $k = 1, ..., p$, e fissati i parametri $a_k, b \in \mathbb{R}$, la derivata della combinazione lineare

$$u(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_p f_p(x) + b$$

è

$$u'(x) = a_1 f_1'(x) + a_2 f_2'(x) + ... + a_p f_p'(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k f_k'(x).$$