Equazioni e contrazioni: un punto fisso //

Nicola Chiriano

Docente al Liceo Scientifico "L. Siciliani" di Catanzaro

[NICOLA CHIRIANO]

Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Siciliani" di Catanzaro (PNI). Si occupa di didattica e tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) ed è formatore in didattica della Matematica per docenti di vari ordini di scuola. Ha all'attivo diverse collaborazioni con Ansas (e-tutor corsi Pon Tec) e Invalsi (piano di formazione Ocse-Pisa). È appassionato di matematica della musica e di musica della matematica.

[PREMESSA]

Il Liceo Scientifico "L. Siciliani" di Catanzaro, da alcuni anni, è sede di un'unità locale del progetto "*Matematica & Realtà*", promosso dal Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Perugia.

Nello scorso anno scolastico sono stati attivati 4 laboratori M&R per le classi del triennio (indirizzo PNI), con un totale di circa 200 allievi partecipanti. Alcune delle attività sono state indirizzate alla preparazione al "*Pi Day 2009*", dedicato al 50° anniversario della scomparsa di Renato Caccioppoli.

Questo articolo è stato elaborato assieme ad alcuni allievi del laboratorio M&R per le quinte classi. Vi si affrontano tematiche curriculari, con uno sguardo particolare al calcolo numerico e all'uso di GeoGebra, grazie a cui vengono visualizzati graficamente effetti non evidenti del teorema del punto fisso.

[RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI]

Molto spesso capita di avere a che fare con equazioni non facilmente risolubili algebricamente, ossia in modo esatto. Occorre pertanto ricorrere a metodi numerici che ci permettano di calcolarne le (eventuali) soluzioni in modo approssimato.
Il problema di risolvere un'equazione $f(x) = 0$ equivale a cercare gli zeri della funzione $y = f(x)$. Con i noti teoremi di esistenza e unicità possiamo separare gli zeri di $f(x)$, ossia individuare gli intervalli in cui essi cadono:

se f(x) è continua e cambia segno in un certo intervallo, allora all'interno di esso interseca l'asse x in almeno un punto, che è unico se f(x) è monotòna.

[METODI NUMERICI]

Una volta isolato uno zero $x = c$ di $f(x)$, possiamo costruire una successione $\{x_n\}$ che converga a c, ossia tale che ciascun suo termine sia un'approssimazione sempre migliore di c. I metodi più noti e usati per costruire questa successione sono:

- Metodo di bisezione
- Metodo delle secanti
- Metodo delle tangenti (o di Newton)
- Metodo iterativo (o del punto unito)

L'ultimo di questi è dovuto a Renato Caccioppoli (1931) che ritrovò e completò, senza averne avuto notizia, un teorema del matematico polacco Stefan Banach (1922).
Per poterlo illustrare, nell'ambito dell'Analisi reale, dobbiamo prima capire cos'è una **contrazione** e cos'è un **metodo iterativo**.

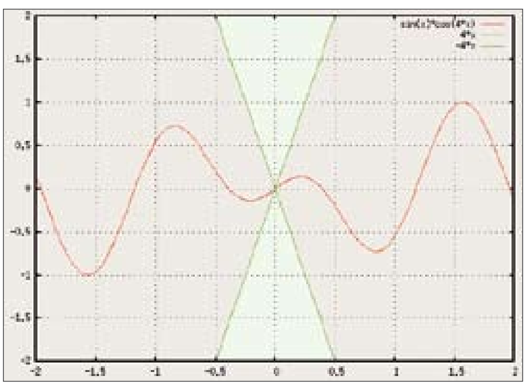
[CONDIZIONE DI LIPSCHITZ]

Una funzione $f : D \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ si dice **lipschitziana** di costante $M \geq 0$ se

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in D$$

Affinché $f(x)$ sia lipschitziana su $A \subseteq D$ è sufficiente che essa sia derivabile e che esista M tale che: $\quad |f'(x)| \leq M \qquad \forall\, x \in A$

Interpretazione grafica (da Wikipedia)



$f(x) = \sin x \cos 4x$ è lipschitziana con $M = 4$: se da un punto del suo grafico tracciamo le rette di coefficienti angolari ± 4, il grafico sarà confinato nell'**angolo di Lipschitz** da esse individuato.

[CONTRAZIONI]

Una funzione T si dice **contrazione** se

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \qquad \forall\, x_1, x_2 \in D$$

ossia se è lipschitziana con $0 \leq M < 1$.
Sfruttando la condizione (sufficiente) di Lipschitz, T è una contrazione in $A \subseteq D$ se è derivabile in A e

$$|T'(x)| < 1 \qquad \forall\, x \in A$$

[PROCESSO ITERATIVO]

Data una funzione T e uno start x_0, studiamo per $n \longrightarrow \infty$ il comportamento della successione

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

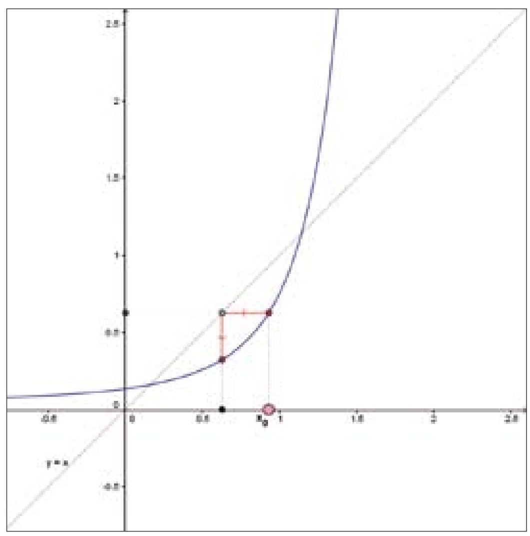
Se T è una contrazione, la distanza tra le iterate successive diminuisce ad ogni passo, infatti:

$$|x_{n+1} - x_n| = |T(x_n) - T(x_{n-1})| < |x_n - x_{n-1}|$$

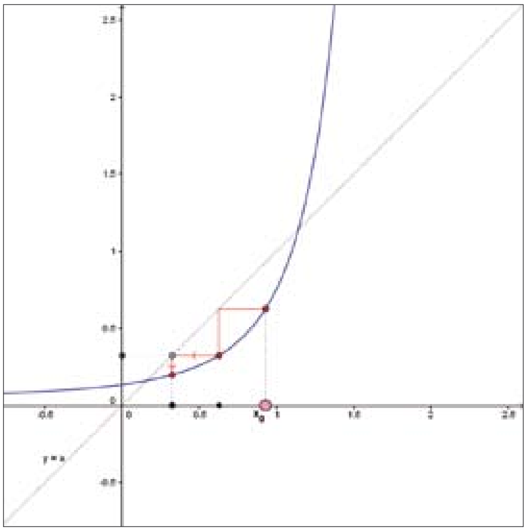
[DIAGRAMMA DI WEB]

Permette di visualizzare graficamente il comportamento per $n \longrightarrow \infty$ della successione $\{x_n\}$ delle iterate di un processo generato dalla trasformazione T.

Tracciamo nel piano il grafico di $y = T(x)$ e la bisettrice $y = x$ (funzione identità). Preso uno start arbitrario x_0, consideriamo la sua immagine $T(x_0)$ e, con una simmetria rispetto a $y = x$, lo riportiamo sull'asse x. Il punto così trovato è $x_1 = T(x_0)$.



Consideriamo ora $T(x_1)$ e, riportandolo in ascissa mediante $y = x$, otteniamo $x_2 = T(x_1)$ e così via.



[ATTRATTORI E REPULSORI]

Punto fisso (o unito) per T è ciascun x* che rimane invariato in seguito alla trasformazione:

$$T(x^*) = x^*$$

Fissando come start un punto fisso $x_0 = x^*$, le iterate hanno tutte lo stesso valore:

$$x_1 = T(x_0) = T(x^*) = x^*$$
$$x_2 = T(x_1) = T(x^*) = x^*$$
$$\vdots$$
$$x_n = T(x_{n-1}) = \ldots = T(x^*) = x^*$$

Fissando invece come start un valore "vicino" ad x*, la successione $\{x_n\}$ può evolvere in due modi:

1) x* è un **punto di equilibrio stabile** se $\{x_n\}$ si mantiene "vicina" ad x*. Se inoltre $\{x_n\}$ converge a x*, x* si dice **attrattore** del processo.

2) x* è un **punto di equilibrio instabile** negli altri casi. Se inoltre $\{x_n\}$ si allontana sempre più da x*, x* si dice **repulsore**.

Il teorema di Caccioppoli riguarda esistenza, unicità ed approssimazione dell'attrattore.

[TEOREMA DEL PUNTO FISSO (o delle contrazioni)]

Teorema (Banach 1922 – Caccioppoli 1931)

Se T è derivabile con $|T'(x)| < 1$ in un intervallo $L \subseteq \mathbf{R}$, allora:

1. esiste ed è unica la soluzione x* di $x = T(x)$
2. $x_{n+1} = T(x_n)$ converge a x*, $\forall\, x_0 \in L$
3. $|x_{n+1} - x^*| \leq |x_n - x^*|$

Traduciamo in linguaggio più comprensibile:

1. ogni contrazione T ha un unico punto fisso;
2. fissato uno start x_0 arbitrario, il processo iterativo associato a T ha x* come attrattore;
3. le iterate x_n forniscono un'approssimazione di x* che migliora ad ogni passo.

Qualora fosse difficile individuare l'intervallo L in cui $|T'(x)| < 1$, ossia verificare la condizione (sufficiente) affinché T sia una contrazione e quindi il processo iterativo ad essa legato converga, è comunque sempre possibile verificare graficamente tale convergenza. Inoltre, può capitare che il processo converga all'esterno di L, ossia che non si verifichi $|T'(x)| < 1$. Il teorema riportato è solo una condizione sufficiente.

[METODO ITERATIVO O DEL PUNTO UNITO]

Torniamo al nostro problema iniziale, ossia quello di risolvere numericamente l'equazione $f(x) = 0$. Essa può essere scritta nella forma equivalente:

$$f(x) + x = x \qquad \text{ovvero} \qquad T(x) = x$$

Cercare uno zero di f(x) equivale cioè a cercare le intersezioni tra $y = T(x)$ e $y = x$. A tal fine, è utile il grafico di Web della successione $x_{n+1} = T(x_n)$. Analizzeremo ora alcuni esempi.

[ESEMPI E CONSIDERAZIONI]

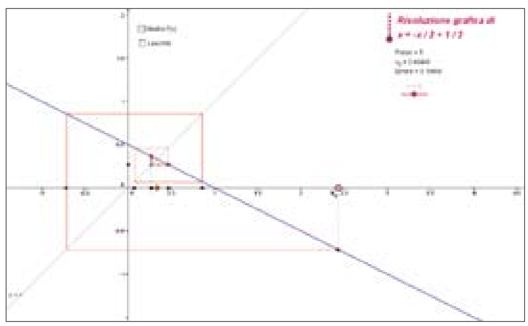
Usiamo un'applet creata con GeoGebra per visualizzare i diagrammi di Web dei processi iterativi relativi alla ricerca dei punti fissi di alcune funzioni.

	T(x)	T'(x)	L = { x : |T'(x)| < 1}
1	$(1 - x)/2$	$-1/2$	$]-\infty, +\infty[$
2	x^2	$2x$	$]-0.5, 0.5[$
3	$0.9x(1 - x)$	$0.9(1 - 2x)$	$]-0.055, 1.055[$
4	$\log(3 + \log x)$	$1/x(3 + \log x)$	$]0.453, +\infty[$
5	$e^{e^x - 3}$	$e^{e^x - 3 + x}$	$]-\infty, 0.792[$

Esempio 1 //

$T(x) = (1 - x)/2$

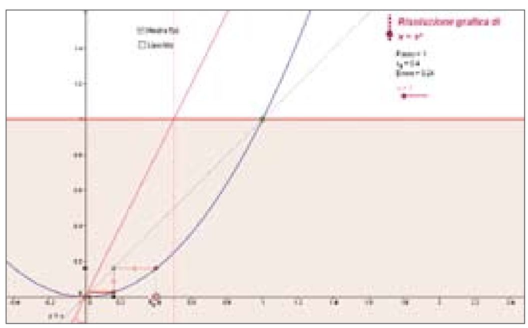
Il diagramma mostra come il metodo iterativo converga $\forall\, x_0$ all'unico punto fisso di T, ossia alla soluzione di $3x - 1 = 0$. T è infatti una contrazione ovunque.



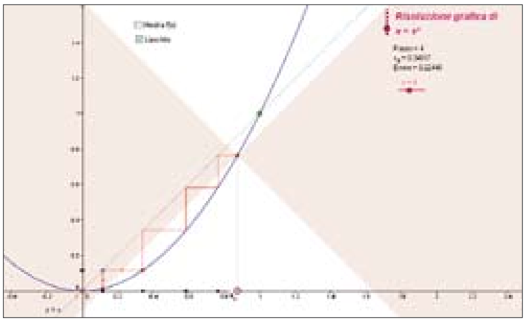
Esempio 2 //

$T(x) = x^2,\ x > -0.5$

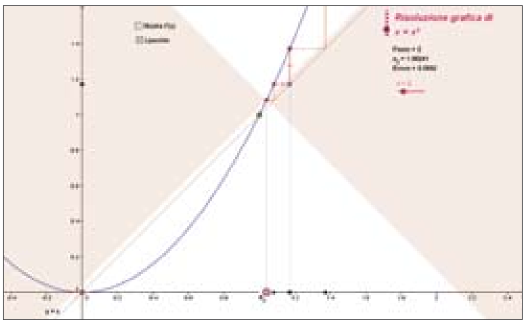
Si tratta di una contrazione per $|x| < 0.5$ (linea tratteggiata): in L ha un unico punto fisso in O(0, 0), ma ne ha un altro esterno a L in U(1, 1). Se $x_0 \in\,]0, 0.5[\, \subset L$, il processo converge a $x = 0$, com'era da aspettarsi.



Se prendiamo uno start "più vicino" a x = 1, il processo converge comunque verso x = 0, che risulta quindi essere un attrattore. Visualizzando l'angolo di Lipschitz, esso in effetti contiene O ma non U.



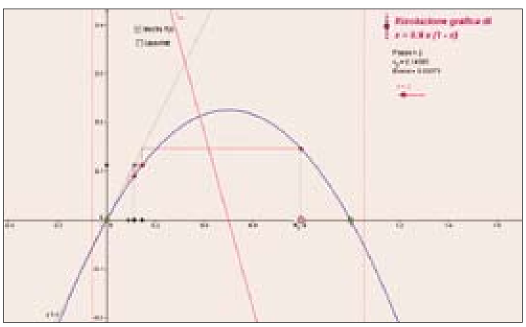
Prendendo uno start $x_0 > 1$, il processo diverge. In tal caso, l'angolo di Lipschitz non contiene O né U.



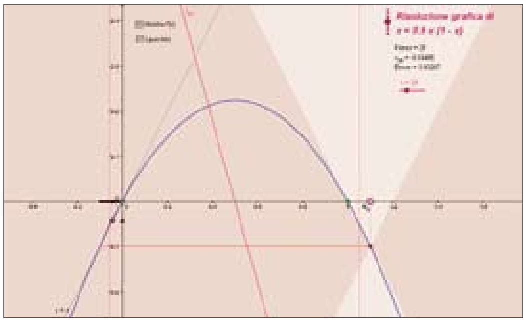
Esempio 3 // T(x) = 0.9x(1 - x)

Osserviamo come anche in questo caso l'unico punto fisso x = 0 sia un attrattore.

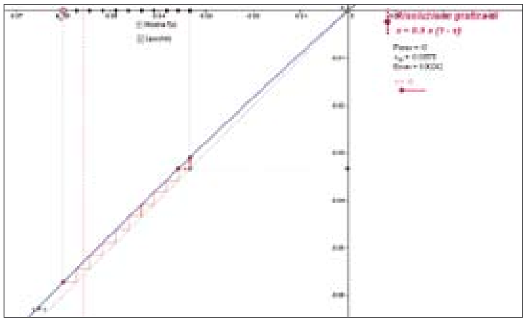
Iniziamo prendendo lo start x_0 interno a L: il metodo converge come ci aspettiamo.



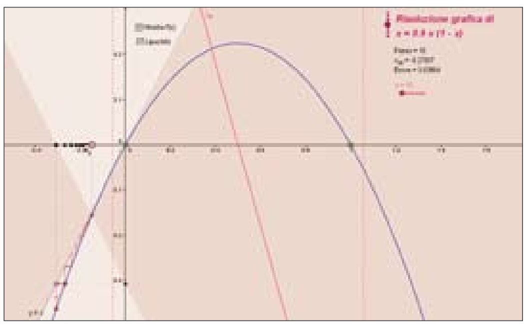
Prendendo x_0 all'esterno di L, abbiamo due casi: il processo converge se $x_0 > 1.055$ poiché in tal caso x = 0 cade nell'angolo di Lipschitz.



Se invece $x_0 < -0.055$, entro un certo valore il processo continua a convergere: ecco uno "zoom" delle iterazioni che partono da x_0 "prossimo" all'estremo sinistro di L.



Ma basta spostare di poco x_0 perché x = 0 non cada più nell'angolo di Lipschitz: il processo in tal caso diverge.



Usiamo ora il metodo grafico per studiare i processi iterativi legati a due trasformazioni non algebriche.

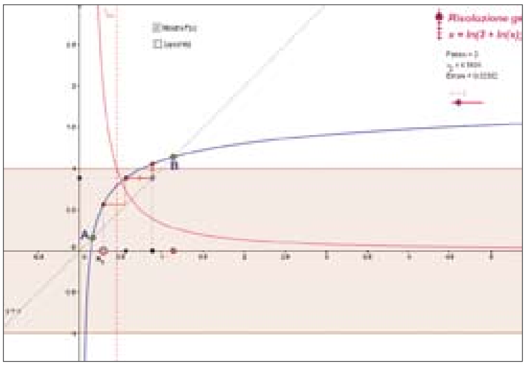
Il foglio dinamico usato per questo articolo è disponibile all'URL: http://chiriano.thebrain.net/materiale/geogebra.asp?id=M_PuntoUnito&cat=AnalisiNumerica

Il testo di riferimento è: P. Brandi, A. Salvadori - *Dispense del progetto "Matematica & Realtà", Laboratori di innovazione didattica* - Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Perugia

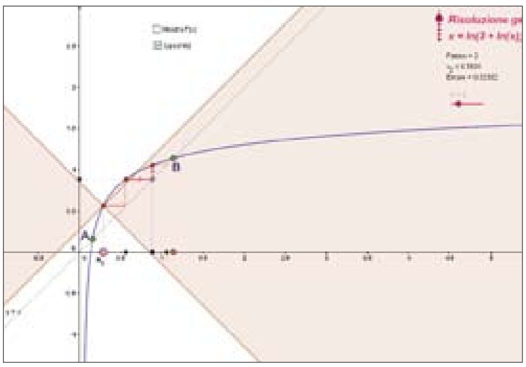
Gli allievi che hanno lavorato alla presentazione dei risultati sono stati: Pierluigi Ciacci (5E), Elisa De Giorgio (5G), Bruno M. Calidonna (5F)

Esempio 4 // $T(x) = \log(3 + \log x)$

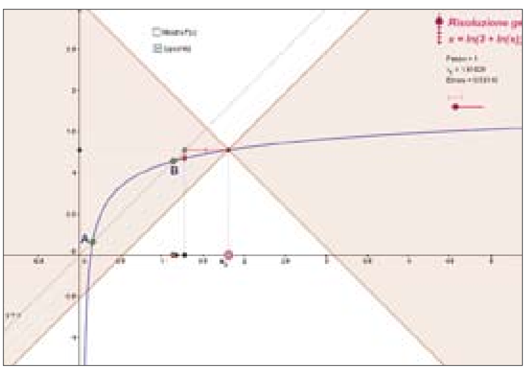
Come si osserva dal grafico, T possiede due punti fissi, A e B. Prendiamo $x_0 < 0.453$, all'esterno di L: nonostante non sia verificato $|T'(x)| < 1$, notiamo che il processo associato a T converge a B.



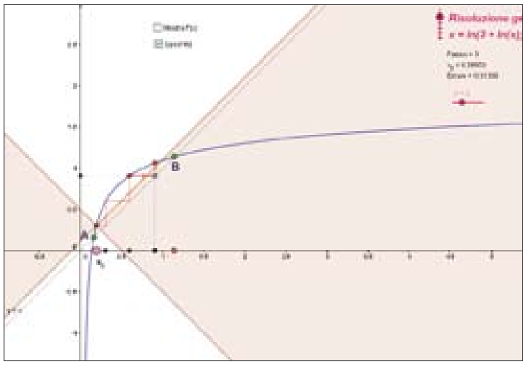
Il perché è ancora esplicitato visualizzando l'angolo di Lipschitz che in effetti contiene B, ossia l'unico punto fisso di T interno a L.



Prendendo altri valori di x_0 per i quali l'angolo di Lipschitz contenga sia A che B, il processo converge sempre verso quest'ultimo, che è quindi un attrattore:



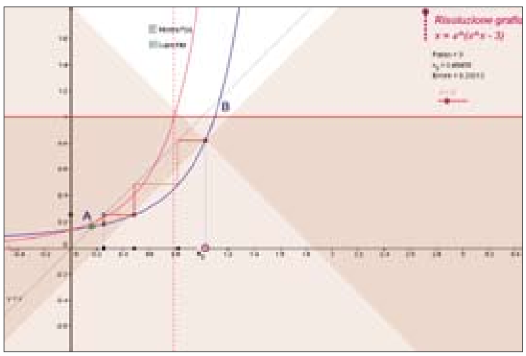
Lo stesso avviene anche prendendo valori di x_0 "molto vicini" ad A:



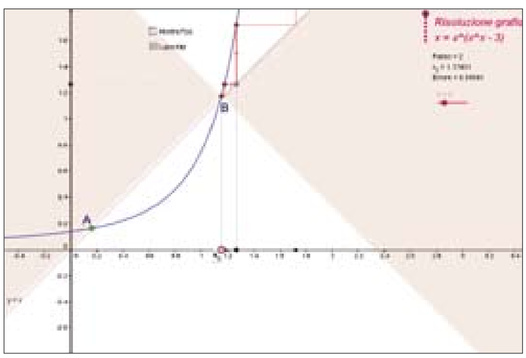
Seguendo un'idea degli allievi ci siamo chiesti se, considerando la funzione inversa della precedente, ovvero la sua simmetrica rispetto a $y = x$, il ruolo di A e B possa risultare invertito anch'esso. Ciò avviene effettivamente (cfr. esempio seguente): è appena il caso di notare come A e B risultino punti fissi anche per tale inversa.

Esempio 5 // $T(x) = e^{e^x - 3}$

Prescindendo da L, ossia dal fatto che T sia o meno una contrazione, facciamo in modo che l'angolo di Lipschitz contenga A: in tal caso il processo converge ad A, anche se x_0 è molto vicino a B.



Osserviamo infine che, se l'angolo di Lipschitz non contiene né A né B, il processo iterativo diverge.



// :)