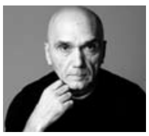
Un problema... da maturità //

Vanni Gorni

Docente al Liceo scientifico "A. Manzoni" di Suzzara



[VANNI GORNI]
Laureato in Fisica presso l'Università di Bologna è un insegnante che vive e lavora a Suzzara (Mantova). Appassionato di storia della matematica dell'Ottocento ne trae problemi e curiosità che propone anche sul suo sito web.

Nel 2008, all'Esame di Stato è stato assegnato un problema che va a pescare nella storia della Matematica. Capita spesso di incontrare esercizi e problemi anonimi dei quali non è facile immaginare l'autore e in quale contesto siano stati formulati. Talvolta questi quesiti si ripresentano a distanza di tempo e di luogo, riformulati, parzialmente modificati e ricostruirne l'evoluzione è quasi impossibile.
In queste condizioni, può essere produttivo accantonare la ricerca di improbabili certezze e cercare uno scenario soltanto verosimile che consenta la collocazione del problema nella rete delle nostre conoscenze. Questo è quanto cercheremo di fare per il problema del 2008.

Iniziamo la ricerca dal 1851. Quell'anno, sulla rivista francese *Nouvelles annales de mathématiques* (pagina 183) compare, con il numero 235, un problema attribuito a Christian Goldbach (1690-1764):

«Risolvere in numeri razionali l'equazione $x^y = y^x$».

Tra le soluzioni inviate dai lettori, la redazione decise di pubblicare nel 1852 quella dell'abate Lecointe, professore al seminario di Vals. Seguiremo la traccia della sua soluzione, cercando però delle radici reali. Poiché l'equazione $x^y = y^x$ ammette chiaramente infinite soluzioni del tipo $x = y$, procediamo nella ricerca di altre soluzioni reali e positive.
Dall'equazione $x^y = y^x$, passando ai logaritmi, si ha $y\ln(x) = x\ln(y)$, e

$$\frac{x}{y} = \frac{\ln(x)}{\ln(y)} = k \neq 1$$

dove k è un numero reale positivo. Cercando in particolare radici del tipo $x = ky$ si arriva ad una soluzione in forma parametrica:

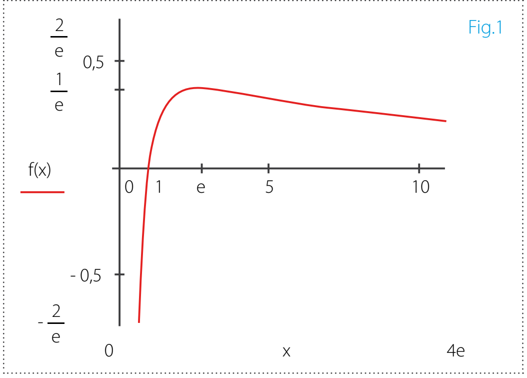
$$x = k^{\frac{k}{k-1}} \qquad y = k^{\frac{1}{k-1}}$$

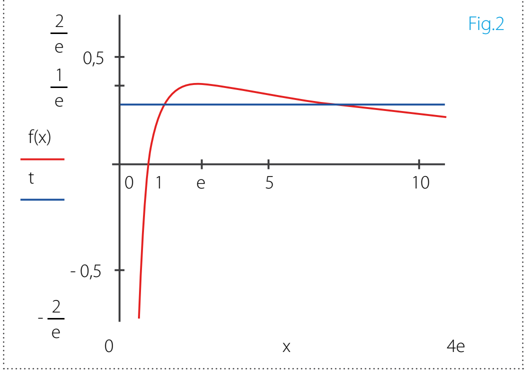
In particolare, per $k = 2$ si ha $x = 4$ e $y = 2$. Questo significa che l'equazione $x^2 = 2^x$, oltre a $x = 2$, ammette anche la soluzione $x = 4$. Ma all'equazione $x^2 = 2^x$ si arriva anche cercando i punti di ascissa positiva comuni alle curve di equazione $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$ ed è proprio intorno a queste due curve che si sviluppa il Problema 2 assegnato all'Esame di Stato del 2008 nei corsi ad indirizzo sperimentale dei Licei scientifici.
Soffermiamoci su questa variante del problema considerando, più in generale, le funzioni $f(x) = a^x$, $g(x) = x^a$ dalle quali si può dedurre l'equazione $x^a = a^x$ con x e a entrambi positivi.
Per risolverla, torniamo ancora sulle pagine dei *Nouvelles annales de mathématiques* di alcuni anni dopo, nel 1858 a pagina 12, dove il prof. Émile Mathieu presenta ai lettori le soluzioni degli esercizi posti a

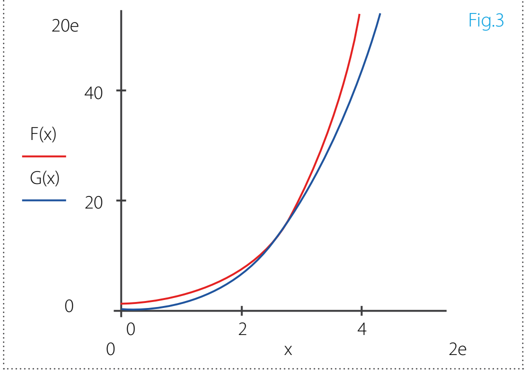
corredo del *Traité d'Algèbre* di Joseph Bertrand. In particolare consideriamo l'esercizio VI a pagina 288 del testo di Bertrand, dove si chiede di cercare le radici dell'equazione $x^a = a^x$ diverse da $x = a$, $a > 0$. Seguendo la soluzione del prof. Mathieu passiamo ai logaritmi, ottenendo

$a\ln(x) = x\ln(a)$ da cui segue $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(a)}{a}$.

Quindi studiamo la funzione $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ il cui grafico è rappresentato in Figura 1. La funzione diverge per x tendente a zero, tende a zero per x tendente all'infinito, è positiva per $x > 1$ ed ha un massimo in $(e\,;\,1/e)$.







Intersecando la curva con una retta variabile, parallela all'asse delle ascisse, di equazione $y = t = \ln(a)/a$, Figura 2, osserviamo che:

- la retta $y = t$ taglia la curva una sola volta quando $\dfrac{\ln(a)}{a} \le 0 \;\longrightarrow\; 0 < a \le 1$,
- la retta taglia due volte la curva quando $0 < \dfrac{\ln(a)}{a} < \dfrac{1}{e} \;\longrightarrow\; 1 < a < e$,
- la retta è tangente alla curva quando $\dfrac{\ln(a)}{a} = \dfrac{1}{e} \;\longrightarrow\; a = e$.

Come diretta conseguenza di tutto ciò, risulta che l'equazione $x^a = a^x$ ammette:
- una sola radice $x_1 = a$ con $0 < x_1 \le 1$, quando $0 < a \le 1$;
- due radici distinte: x_1 (con $1 < x_1 < e$) e x_2 con $(x_2 > e)$ quando $1 < a < e$;
- due radici coincidenti $x_1 = x_2 = e$ quando $a = e$.

Restiamo ancora un po' sull'ultimo risultato. Da $\dfrac{\ln(x)}{x} \le \dfrac{1}{e}$, si deduce immediatamente che per ogni $x > 0$ si ha:

$$e\ln(x) \le x\ln(e) \;\longrightarrow\; x^e \le e^x .$$

La diseguaglianza vale anche per $x = \pi$: $\qquad \pi^e \le e^\pi$.

Questa "curiosa" formula è riportata anche da Martin Gardner in appendice ad un suo articolo dal titolo: *Il numero trascendente e*. L'autore afferma che la disuguaglianza ricompare di tanto in tanto sulle pubblicazioni specializzate e che si può provare in molti modi ma, per vederne alcuni, invia il lettore alla rivista *The Pentagon* dell'autunno del 1963.
Cerchiamo allora un'altra dimostrazione e consideriamo le funzioni $F(x) = e^x$, $G(x) = x^e$, $x > 0$. Dato che:

$$F(e) = G(e) = e^e ,$$
$$F'(e) = G'(e) = e^e ,$$
$$F''(x) > 0 ,\ G''(x) > 0 ,$$

le due curve considerate sono tra loro tangenti nel loro unico punto comune $(e\,;\,e^e)$, come mostrato in figura 3. Inoltre, poiché è:

$$F(1) = e > G(1) = 1,$$

è possibile concludere che, per ogni x, risulta $F(x) \ge G(x)$; dunque, anche per $x = \pi$:

$$e^\pi \ge \pi^e.$$

// :)

Bibliografia

[1] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome dixième, Bachelier, Paris, 1851
[2] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome onzième, Bachelier, Paris, 1852
[3] *Nouvelles annales de mathématiques*, Tome dix-septième, Bachelier, Paris, 1858
[4] J. Bertrand, *Traité d'algèbre*, deuxième édition, Hachette, Paris, 1855
[5] M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici Vol. 4°*, Sansoni, Firenze, 1979
[6] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercices in Visual Thinkings*, MAA, 2000
[7] Baccalauréat S, *France métropolitaine*, septembre 2004, Exercise 2