Vladimir Igorevicˇ Arnol’d
Matematico universale

di Marco Pedroni

L’elenco dei campi della matematica nei quali Vladimir Igorevicˇ Arnol’d (nato nel 1937 a Odessa) ha dato contributi fondamentali è lunghissimo. Se ci limitiamo – senza pretese esaustive – alla geometria e alla fisica matematica, abbiamo da una parte la geometria algebrica (reale e complessa), la topologia simplettica e la geometria delle varietà di contatto, mentre dall’altra l’idrodinamica, la meccanica classica, la meccanica celeste, i sistemi integrabili e la teoria dei sistemi dinamici. Il suo nome è legato a molti concetti chiave della matematica e della meccanica del ’900, quali la teoria di Kolmogorov-Arnol’d-Moser (KAM), la diffusione di Arnol’d, la A-stabilità (in idrodinamica) e le classi caratteristiche di Arnol’d-Maslov, per citarne solo alcuni. Ciò smentisce quella che egli stesso chiama “la legge di Arnol’d”, secondo la quale in matematica pochissime scoperte vengono attribuite alla persona giusta.

Il contributo che a soli vent’anni lo ha reso famoso in tutto il mondo è stata la soluzione del tredicesimo problema di Hilbert, riguardante l’impossibilità di risolvere le equazioni algebriche di settimo grado usando funzioni di due variabili. Più precisamente, la domanda era la seguente: la funzione reale z(a,b,c) definita dall’equazione z7+az3+bz2+cz+1=0 è rappresentabile come composizione di funzioni continue di due variabili? Nella sua tesi di dottorato, scritta sotto la guida di Kolmogorov, Arnol’d rispose affermativamente a questa domanda, dimostrando che ogni funzione continua di tre variabili può essere costruita a partire da funzioni di due sole variabili.

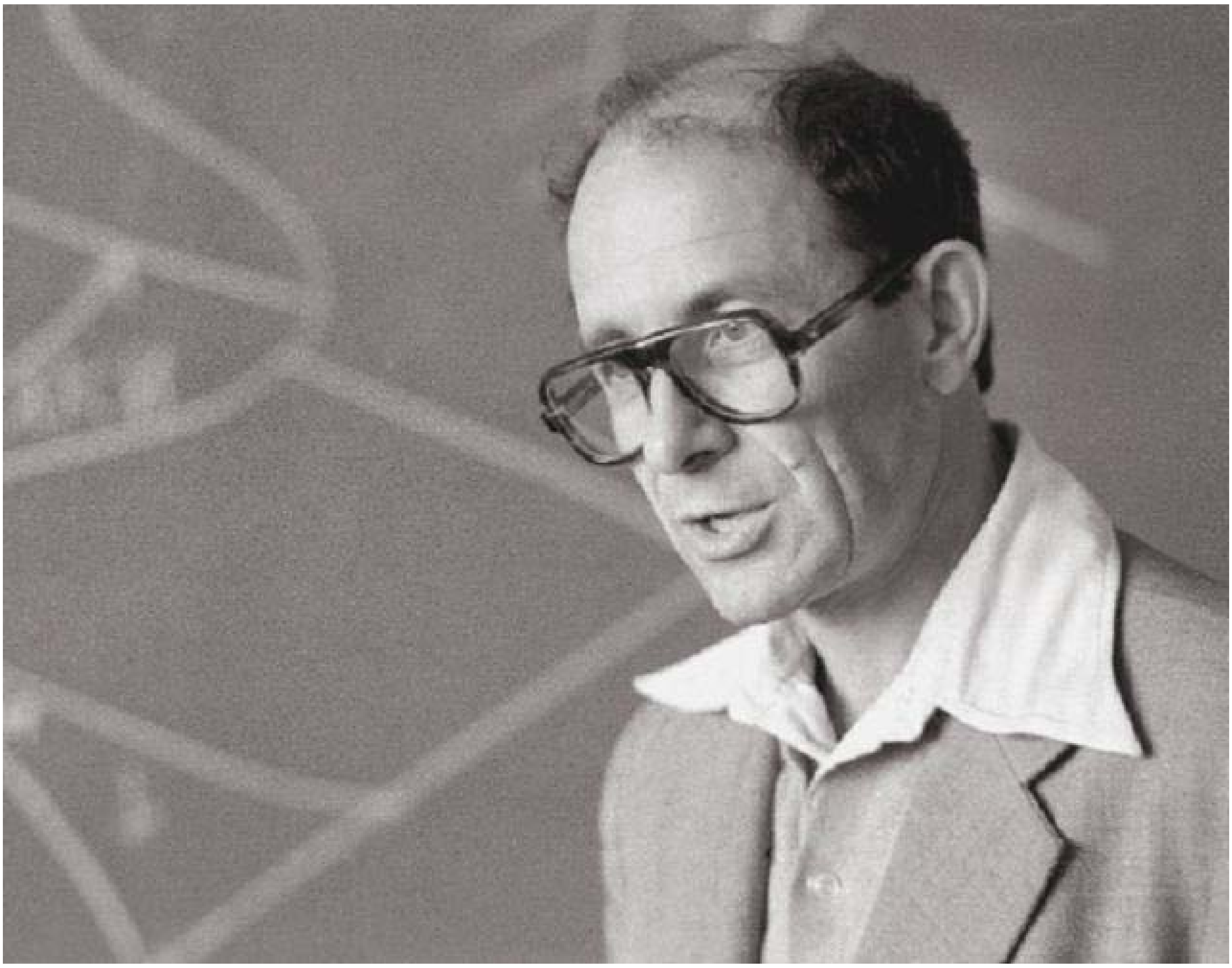
Successivamente si dedicò ai sistemi dinamici, contribuendo in modo determinante alla creazione di quella che in seguito sarebbe diventata famosa come la teoria KAM. In questo caso il punto di partenza è lo studio dei sistemi integrabili, che sono sistemi hamiltoniani con un comportamento molto regolare: sotto ipotesi opportune, il moto di tali sistemi è quasi periodico, ossia è la composizione di rotazioni uniformi. Da un punto di vista geometrico, lo spazio delle fasi del sistema (2n-dimensionale, se n è il numero dei gradi di libertà) risulta essere l’unione di tori n-dimensionali – detti tori invarianti – e il moto del sistema si svolge in modo uniforme su questi tori. Molti sistemi di interesse pratico, primo fra tutti il sistema solare, si possono vedere solo come perturbazioni di un sistema integrabile. Per questo motivo Poincaré indicò come il problema fondamentale della dinamica lo studio del comportamento di un sistema integrabile perturbato. Nel 1954 Kolmogorov annunciò un risultato sorprendente: se la perturbazione è piccola e il sistema integrabile di partenza è non degenere, allora la maggior parte dei tori invarianti rimangono tali e il moto su di essi è ancora quasi periodico. Arnol’d non si limitò a fornire un’esposizione completa di dimostrazioni del teorema di Kolmogorov, ma lo generalizzò ad una vasta classe di sistemi degeneri e presentò un gran numero di applicazioni a problemi classici della dinamica.

Un altro campo nel quale il genio di Arnol’d si è manifestato è stata l’idrodinamica. Sfruttando l’analogia con i moti per inerzia di un corpo rigido con un punto fisso, egli ha infatti mostrato che le equazioni di Eulero (che descrivono il moto di un fluido ideale) si possono interpretare come le equazioni delle geodetiche - rispetto ad una metrica definita dall’energia cinetica - del gruppo dei diffeomorfismi che conservano i volumi. Ciò fornisce una spiegazione dell’instabilità dei moti delle masse atmosferiche e quindi la difficoltà di ottenere delle previsioni del tempo attendibili per lunghi periodi: le curvature di tale gruppo sono negative e pertanto due geodetiche inizialmente vicine si allontanano rapidamente. Utilizzando metodi topologici, Arnol’d ha poi classificato i moti stazionari di un fluido (nel piano e nello spazio) ed ha trovato delle condizioni sufficienti per la loro stabilità.

Arnol'd ha inoltre messo in luce la natura simplettica di un teorema congetturato da Poincaré e dimostrato da Birkhoff. Esso afferma che un diffeomorfismo di un corona circolare, avente le proprietà di conservare le aree e di ruotare in senso opposto i due bordi, ha almeno due punti fissi. Arnol'd ha intuito che questo è un caso particolare del fatto che un simplettomorfismo omologo all'identità ha un numero di punti fissi maggiore o uguale alla somma dei numeri di Betti, un invariante topologico della varietà su cui agisce il simplettomorfismo. Questo risultato è stato poi dimostrato ed ha segnato la nascita della topologia simplettica, nonché il punto di partenza per la scoperta dell'omologia di Floer e delle coomologie quantistiche. Concludiamo questa brevissima rassegna dei suoi risultati accennando al fatto che Arnol'd, motivato da problemi di ottica quantistica, ha classificato le singolarità (semplici) delle funzioni di n variabili reali, mostrando che esse sono legate ai diagrammi di Dynkin che compaiono anche nella classificazione delle algebre di Lie semplici.

In tutto il mondo, molti studenti universitari di matematica e di fisica hanno avuto la fortuna di studiare sui suoi libri, in particolare "Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations" e "Mathematical methods of classical mechanics" (entrambi tradotti in italiano). Arnol'd, infatti, predilige una presentazione nella quale le idee, gli esempi, le motivazioni (spesso tratte dalla fisica) e l'intuizione geometrica abbiano un ruolo di primo piano, più che una trattazione rigorosa ma fredda e arida. Il suo articolo "On teaching mathematics" esordisce con le parole: "Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap". Per questo egli è perennemente in lotta contro la concezione bourbakista dell'insegnamento della matematica e difende strenuamente il punto di vista dei matematici ottocenteschi (sembra che abbia salvato le opere di Goursat e di Hermite, che dovevano essere eliminate dalla biblioteca di un'università francese).

Arnol'd è stato insignito di molti premi internazionali per le sue ricerche (tra i quali il Premio Lenin nel 1965, con Andrej Kolmogorov, il Crafoord Prize nel 1982, con Louis Nirenberg, e il Wolf Prize in Mathematics nel 2001), è membro di numerose accademie (tra queste l'Accademia dei Lincei, dal 1988), è stato vice-presidente dell'International Mathematical Union dal 1995 al 1998 e ha ricevuto il dottorato honoris causa dall'Università di Bologna (nel 1991) e da altre università in tutto il mondo. Ha avuto un enorme numero di allievi, molti dei quali sono diventati matematici di prima grandezza e hanno contribuito a diffondere le sue idee ed il suo approccio unitario alla matematica (e alla fisica), ai suoi problemi e al suo insegnamento.



Il “chi è” di Arnol’d

Vladimir Igorevicˇ Arnol’d era dirigente di ricerca scientifica all’Istituto Steklov dell’Accademia Russa delle Scienze di Mosca. Durante il semestre primaverile la sua attività scientifica e didattica si spostava all’Università di Parigi 9 ed in autunno teneva corsi anche alla Università Indipendente di Mosca, una università libera, fondata nel 1991 da un gruppo di matematici che in seguito ne ha costituito il Consiglio scientifico (di cui Arnol’d era presidente).
Nato a Odessa nel 1937, aveva cominciato gli studi di matematica nel 1954 presso la facoltà di Meccanica e Matematica dell’Università Statale di Mosca, ottenendo il Ph.D. nel 1961 e il Dottorato nel 1963, entrambe sotto la direzione di Andrej Nikolaevicˇ Kolmogorov. Dal 1961 al 1986 aveva lavorato presso la facoltà stessa, come professore a partire dal 1965.
Già gli inizi della sua carriera erano stati d’eccellenza: la sua tesi completa la soluzione (a cui aveva dato avvio Kolmogorov) del 13° problema di Hilbert. In seguito la sua attività si rivolse a numerosi settori della matematica e della meccanica, permettendo di stabilire, in molti di questi, lo stato delle conoscenze. Membro di numerose accademie internazionali, fra cui l’Accademia delle Scienze Russa (dal 1986) e l’Accademia dei Lincei (dal 1988), laureato “honoris causa” da numerose università – nel 1991 da Bologna – ha vinto numerosi premi:

- Premio della Società Matematica di Mosca per i giovani (1958),
- Premio Lenin (insieme a Kolmogorov, 1965), uno dei massimi riconoscimenti dell’Unione Sovietica,

- Premio Crafoord (insieme a L. Nirenberg, 1982), assegnato dall’Accademia delle Scienze Svedese in riconoscimento della ricerca in quelle discipline scientifiche che non fanno parte del premio Nobel (matematica, scienze della terra, ecologia ed evoluzione, astronomia),
- Premio Lobac˘evskij (1992) dell’Accademia delle Scienze Russa,
- Premio Harvey (1994), dell’Accademia delle Scienze e dell’Istituto di Tecnologia di Israele,
- Premio Wolf (insieme a Shelah, 2001), assegnato dalla fondazione Wolf di Israele con la seguente motivazione: “per il suo profondo ed influente lavoro in una moltitudine di aree matematiche, fra cui sistemi dinamici, equazioni differenziali e teoria delle singolarità”.

Autore di oltre 300 pubblicazioni in vari settori della matematica e di più di 20 libri scritti in uno stile essenziale ma ricco, Arnol’d era apprezzato anche come docente dai propri allievi, secondo i quali possedeva il raro dono di trovare, anche negli argomenti più semplici, nuovi ed eleganti problemi, suscettibili di ulteriori sviluppi e in grado di catturare gli interessi dei giovani.