

# Esperienze di laboratorio

## Liuba Ballocco

docente di matematica  
I.I.S. "G. Vallauri",  
Fossano (Cn)

liuba.ballocco@vallauri.edu  
liuba.ballocco@libero.it

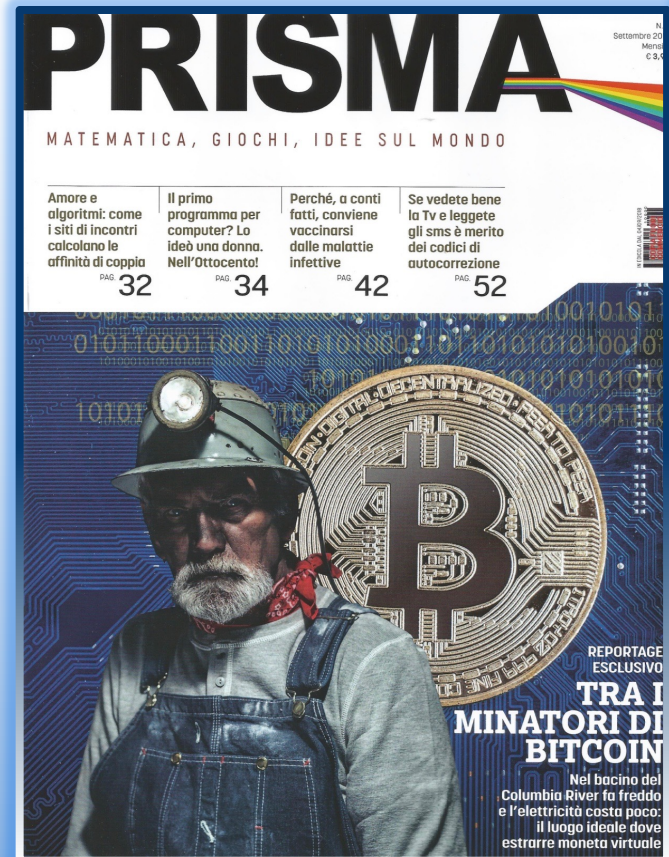


# Alcune citazioni...

Angelo Guerraggio

□ “... il mondo va veloce, sempre più veloce, e con esso si trasformano velocemente le reti di diffusione delle informazioni della cultura, del sapere, anche di quello matematico. In Italia come nel resto del mondo”.

□ “... la matematica non è, solo, una materia che si studia a scuola, una materia difficile che lentamente assimiliamo grazie all'impegno e alla fantasia di molti insegnanti. È un pilastro della nostra vita, un serbatoio insostituibile di idee e di tecniche per affrontare i problemi più complessi senza banalizzarli. Certo non esageriamo sostenendo che le attività di ricerca e di insegnamento costituiscono oggi più che mai uno dei principali motori della società”.

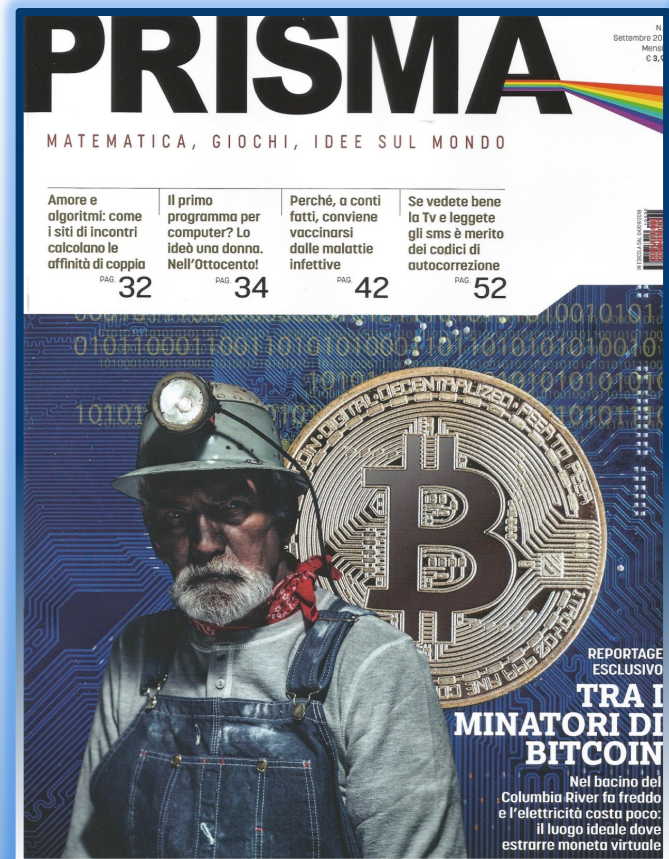




# Alcune citazioni...

Angelo Guerraggio

- *“... il mondo va veloce, sempre più veloce, e con esso si trasformano velocemente le reti di diffusione delle informazioni della cultura, del sapere, anche di quello matematico. In Italia come nel resto del mondo”.*
- ***“... la matematica non è, solo, una materia che si studia a scuola, una materia difficile che lentamente assimiliamo grazie all'impegno e alla fantasia di molti insegnanti. È un pilastro della nostra vita, un serbatoio insostituibile di idee e di tecniche per affrontare i problemi più complessi senza banalizzarli. Certo non esageriamo sostenendo che la matematica e le altre scienze costituiscono oggi più che mai uno dei principali motori della società”.***



# Alcune citazioni...

## Emma Castelnuovo

- ❑ *“mettersi allo stesso livello, cioè suscitare interesse e quindi discussioni, accettare domande su domande, anche le più balorde! Accettare delle domande a cui, là per là, non si sa rispondere e non avere scrupolo di dire: “Guardate, non lo so”. Questo è fondamentale, indipendentemente dalla materia che si insegna”.*
- ❑ *“Lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo”, nel senso di garantire loro l’opportunità di costruire soluzioni, anziché far loro usare soluzioni già pronte. Il che è come dire dare loro il tempo per riflettere, per pensare, per ipotizzare, per operare con la mente, per arrivare a capire e, quindi, a costruire conoscenze sicure.”*



# Alcune citazioni...

## Emma Castelnuovo

- *“mettersi allo stesso livello, cioè suscitare interesse e quindi discussioni, accettare domande su domande, anche le più balorde! Accettare delle domande a cui, là per là, non si sa rispondere e non avere scrupolo di dire: “Guardate, non lo so”. Questo è fondamentale, indipendentemente dalla materia che si insegna”.*
- ***“Lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo”, nel senso di garantire loro l’opportunità di costruire soluzioni, anziché far loro usare soluzioni già pronte. Il che è come dire dare loro il tempo per riflettere, per pensare, per ipotizzare, per operare con la mente, per arrivare a capire e, quindi, a costruire conoscenze sicure.”***





## Emma Castelnuovo

- ❑ *“È in tal modo, partendo da **esempi tratti dalla vita di ogni giorno**, e abituando il ragazzo a schematizzare, che si potrà introdurre gli allievi fin da giovanissimi a quel linguaggio matematico che deve ritenersi oggi come altrettanto essenziale del linguaggio ordinario”.*
- ❑ *“Mi preoccupo soprattutto di quei ragazzetti di 13-14 anni che terminano i loro studi con il triennio medio portando in sé l'impressione che l'aritmetica consiste nella risoluzione di una impalcatura di espressioni o di problemi inesistenti e la geometria si riduce qualche volta ad un elenco di definizioni imparate a memoria e allo studio di figure che si conoscono tanto bene che, nella vita, non si sanno riconoscere. Ragazzi fortemente attirati dalle sensazionali scoperte di ogni ramo della scienza, non hanno assolutamente il senso della potenza dell'intelletto umano, non avendo mai provato che cosa significhi la passione per la ricerca e la gioia della scoperta”*

## Emma Castelnuovo

- ❑ *“È in tal modo, partendo da esempi tratti dalla vita di ogni giorno, e abituando il ragazzo a schematizzare, che si potrà introdurre gli allievi fin da giovanissimi a quel linguaggio matematico che deve ritenersi oggi come altrettanto essenziale del linguaggio ordinario”.*
- ❑ *“Mi preoccupo soprattutto di quei ragazzetti di 13-14 anni che terminano i loro studi con il triennio medio portando in sé l’impressione che l’aritmetica consiste nella risoluzione di una impalcatura di espressioni o di problemi inesistenti e la geometria si riduce qualche volta ad un elenco di definizioni imparate a memoria e allo studio di figure che si conoscono tanto bene che, nella vita, non si sanno riconoscere. Ragazzi fortemente attirati dalle sensazionali scoperte di ogni ramo della scienza, non hanno assolutamente il senso della potenza dell’intelletto umano, non avendo mai provato che cosa significhi la passione per la ricerca e la gioia della scoperta”.*

# Alcune citazioni...



## Don Lorenzo Milani e gli allievi della scuola di Barbiana

- ❑ *L'ospedale. "Così è stato il nostro primo incontro con voi. Attraverso i ragazzi che non volete. L'abbiamo visto anche noi che con loro la scuola diventa più difficile. Qualche volta viene la tentazione di levarseli di torno. Ma se si perde loro, la scuola non è più scuola. È un ospedale che cura i sani e respinge i malati."*
- ❑ *"La scuola ha un problema solo. I ragazzi che perde."*
- ❑ *Il complesso del trabocchetto. "Il compito di francese era un concentrato di eccezioni. Gli esami vanno aboliti. Ma se li fate, siate almeno leali. Le difficoltà vanno messe in percentuale di quelle della vita. Se le mettete più frequenti avete la mano del trabocchetto. Come se foste in guerra con i ragazzi. Chi ve lo fa fare? Il loro bene? Il loro bene no."*



# Alcune citazioni...



## Don Lorenzo Milani e gli allievi della scuola di Barbiana

- ❑ *L'ospedale. "Così è stato il nostro primo incontro con voi. Attraverso i ragazzi che non volete. L'abbiamo visto anche noi che con loro la scuola diventa più difficile. Qualche volta viene la tentazione di levarseli di torno. Ma se si perde loro, la scuola non è più scuola. È un ospedale che cura i sani e respinge i malati."*
  
- ❑ ***"La scuola ha un problema solo. I ragazzi che perde."***
  
- ❑ *Il complesso del trabocchetto. "Il compito di francese era un concentrato di eccezioni. Gli esami vanno aboliti. Ma se li fate, siate almeno leali. Le difficoltà vanno messe in percentuale di quelle della vita. Se le mettete più frequenti avete la mano del trabocchetto. Come se foste in guerra con i ragazzi. Chi ve lo fa fare? Il loro bene? Il loro bene no."*

# Alcune citazioni...



## Don Lorenzo Milani e gli allievi della scuola di Barbiana

- ❑ *L'ospedale. "Così è stato il nostro primo incontro con voi. Attraverso i ragazzi che non volete. L'abbiamo visto anche noi che con loro la scuola diventa più difficile. Qualche volta viene la tentazione di levarseli di torno. Ma se si perde loro, la scuola non è più scuola. È un ospedale che cura i sani e respinge i malati."*
  
- ❑ *"La scuola ha un problema solo. I ragazzi che perde."*
  
- ❑ ***Il complesso del trabocchetto. "Il compito di francese era un concentrato di eccezioni. Gli esami vanno aboliti. Ma se li fate, siate almeno leali. Le difficoltà vanno messe in percentuale di quelle della vita. Se le mettete più frequenti avete la mania del trabocchetto. Come se foste in guerra coi ragazzi. Chi ve lo fa fare? Il loro bene? Il loro bene no."***

Don Lorenzo Milani e gli allievi  
della scuola di Barbiana

- ❑ *Matematica e sadismo. “Il problema di geometria faceva pensare a una scultura della Biennale: «Un solido è formato da una semisfera sovrapposta a un cilindro la cui superficie è tre settimi di quella ...». Non esiste uno strumento che misuri le superfici. Dunque nella vita non può accadere mai di conoscere le superfici e non le dimensioni. Un problema così può nascere solo nella mente di un malato.”*
  
- ❑ *Etichette nuove. “Nella Nuova Media queste cose non si vedranno più. I problemi partiranno «da considerazioni di carattere concreto». Difatti la Carla quest'anno alla licenza ha avuto un problema moderno a base di caldaie: «Una caldaia ha la forma di una semisfera sovrapposta... » E di nuovo si parte dalle superfici. Meglio un professore all'antica, d'uno che crede d'essere moderno perché ha mutato le etichette.”*



## Don Lorenzo Milani e gli allievi della scuola di Barbiana

- ❑ *Matematica e sadismo.* “Il problema di geometria faceva pensare a una scultura della Biennale: «Un solido è formato da una semisfera sovrapposta a un cilindro la cui superficie è tre settimi di quella ...». Non esiste uno strumento che misuri le superfici. Dunque nella vita non può accadere mai di conoscere le superfici e non le dimensioni. Un problema così può nascere solo nella mente di un malato.”
- ❑ *Etichette nuove.* “Nella Nuova Media queste cose non si vedranno più. I problemi partiranno «da considerazioni di carattere concreto». Difatti la Carla quest'anno alla licenza ha avuto un problema moderno a base di caldaie: «Una caldaia ha la forma di una semisfera sovrapposta... » E di nuovo si parte dalle superfici. Meglio un professore all'antica, d'uno che crede d'essere moderno perché ha mutato le etichette.”

# Alcune citazioni...

## Massimo Recalcati

□ *Il miracolo dell'insegnamento. “È il miracolo dell'insegnamento: mostrare che quel sapere che ritenevamo morto è vivo, è erotico, si muove, respira. In questo modo il maestro, sempre, mentre insegna impara, ovvero ridà vita a tutto ciò che lo ha formato.”*



□ *Amare la vite storta. ... “ogni bravo insegnante non è tanto colui che sa, ma colui che”... “sa «portare il fuoco». Non è qualcuno che istruisce raddrizzando la pianta storta, né qualcuno che sistematicamente trasferisce i contenuti da un contenitore a un altro, secondo schemi o mappature cognitive più o meno raffinate, ma colui che sa portare e dare parola, sa coltivare la possibilità di stare insieme, sa fare esistere la cultura come possibilità della Comunità, sa valorizzare le differenze, la singolarità, animando la curiosità di ciascuno senza però inseguire un'immagine di «allievo ideale». Piuttosto, esalta i difetti, persino i sintomi, le storture di ciascuno dei suoi allievi, uno per uno. ... sa amare la vite storta.”*

# Alcune citazioni...

## Massimo Recalcati

- *Il miracolo dell'insegnamento. “È il miracolo dell'insegnamento: mostrare che quel sapere che ritenevamo morto è vivo, è erotico, si muove, respira. In questo modo il maestro, sempre, mentre insegna impara, ovvero ridà vita a tutto ciò che lo ha formato.”*
- *Amare la vite storta. ... “ogni bravo insegnante non è tanto colui che sa, ma colui che”... “sa «portare il fuoco». Non è qualcuno che istruisce raddrizzando la pianta storta, né qualcuno che sistematicamente trasferisce i contenuti da un contenitore a un altro, secondo schemi o mappature cognitive più o meno raffinate, ma colui che sa portare e dare parola, sa coltivare la possibilità di stare insieme, sa fare esistere la cultura come possibilità della Comunità, sa valorizzare le differenze, la singolarità, animando la curiosità di ciascuno senza però inseguire un'immagine di «allievo ideale». Piuttosto, esalta i difetti, persino i sintomi, le storture di ciascuno dei suoi allievi, uno per uno. È, insomma, qualcuno che, innanzitutto, sa amare chi impara, il che significa che sa amare la vite storta.”*





## Massimo Recalcati

- ***L'inciampo dell'insegnante. “Un bravo insegnante” ... “si riconosce da come reagisce quando, salendo in cattedra, gli capita di inciampare. Cosa saprà fare di questo inciampo? Ricomporrà immediatamente, non senza disagio, la sua immagine facendo finta di nulla? Rimprovererà con stizza le reazioni divertite dei ragazzi? Proverà a nascondere goffamente il suo imbarazzo? Oppure prenderà spunto da questo imprevisto per mostrare ai suoi alunni che la posizione dell'insegnante non è senza incertezze e vacillamenti, che non è al riparo dall'imprevedibilità della vita?***

*Potrà allora far notare che lo studio piú autentico e appassionato non è mai esente dall'inciampo, perché sono proprio l'inciampo, lo zoppicamento, il fallimento a rendere possibile la ricerca della verità. Inciampare è l'imprevisto della vita con il quale il sapere deve confrontarsi. Certo, ci sono insegnanti che usano il sapere come un otturatore del vuoto che l'imprevedibilità della vita introduce necessariamente in ogni forma di sapere. Ci sono insegnanti che separano il sapere dalla vita e che offrono ai loro alunni solo una serie di nozioni nate morte.” ... “Se esiste una vocazione all'insegnamento, non può che nascere nell'inciampo.*

## Massimo Recalcati

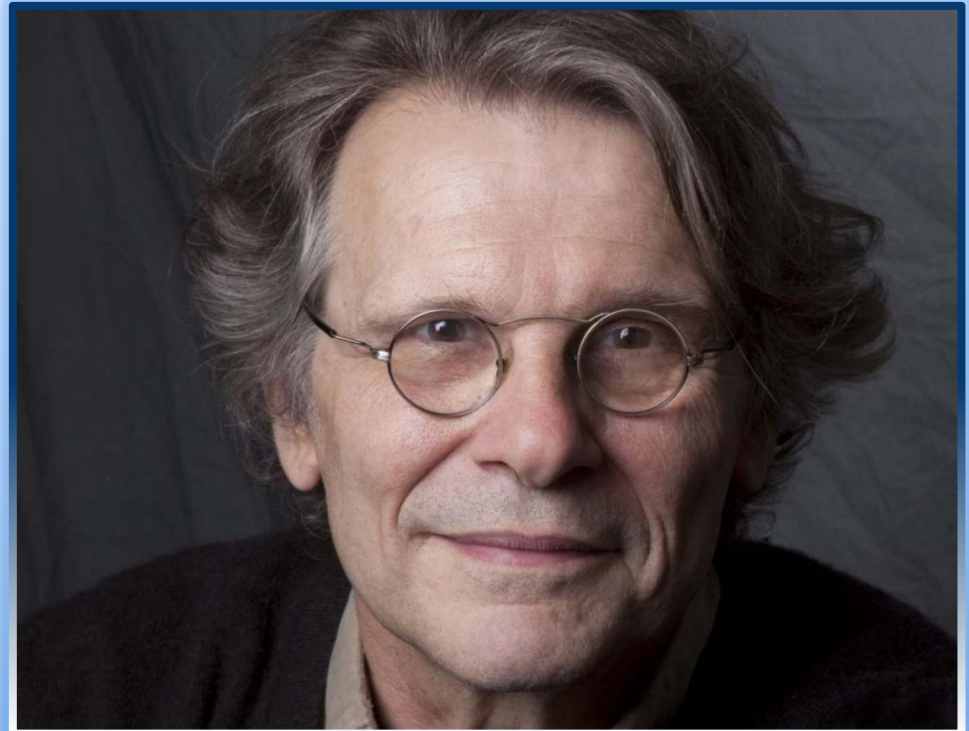
- *L'inciampo dell'insegnante. “Un bravo insegnante” ... “si riconosce da come reagisce quando, salendo in cattedra, gli capita di inciampare. Cosa saprà fare di questo inciampo? Ricomporrà immediatamente, non senza disagio, la sua immagine facendo finta di nulla? Rimprovererà con stizza le reazioni divertite dei ragazzi? Proverà a nascondere goffamente il suo imbarazzo? Oppure prenderà spunto da questo imprevisto per mostrare ai suoi alunni che la posizione dell'insegnante non è senza incertezze e vacillamenti, che non è al riparo dall'imprevedibilità della vita?*

*Potrà allora far notare che lo studio piú autentico e appassionato non è mai esente dall'inciampo, perché sono proprio l'inciampo, lo zoppicamento, il fallimento a rendere possibile la ricerca della verità. Inciampare è l'imprevisto della vita con il quale il sapere deve confrontarsi. Certo, ci sono insegnanti che usano il sapere come un otturatore del vuoto che l'imprevedibilità della vita introduce necessariamente in ogni forma di sapere. Ci sono insegnanti che separano il sapere dalla vita e che offrono ai loro alunni solo una serie di nozioni nate morte.” ... “Se esiste una vocazione all'insegnamento, non può che radicarsi nell'inciampo.”*

# Alcune citazioni...

## Daniel Pennac

- *“È vero, da noi è sconveniente parlare d'amore nell'ambito dell'insegnamento. Provateci un po'. È come parlare di corda in casa dell'impiccato. Meglio ricorrere alla metafora” ...  
“Una metafora alata,” ...  
“Una mattina dello scorso settembre.  
Primissimi giorni di settembre.*

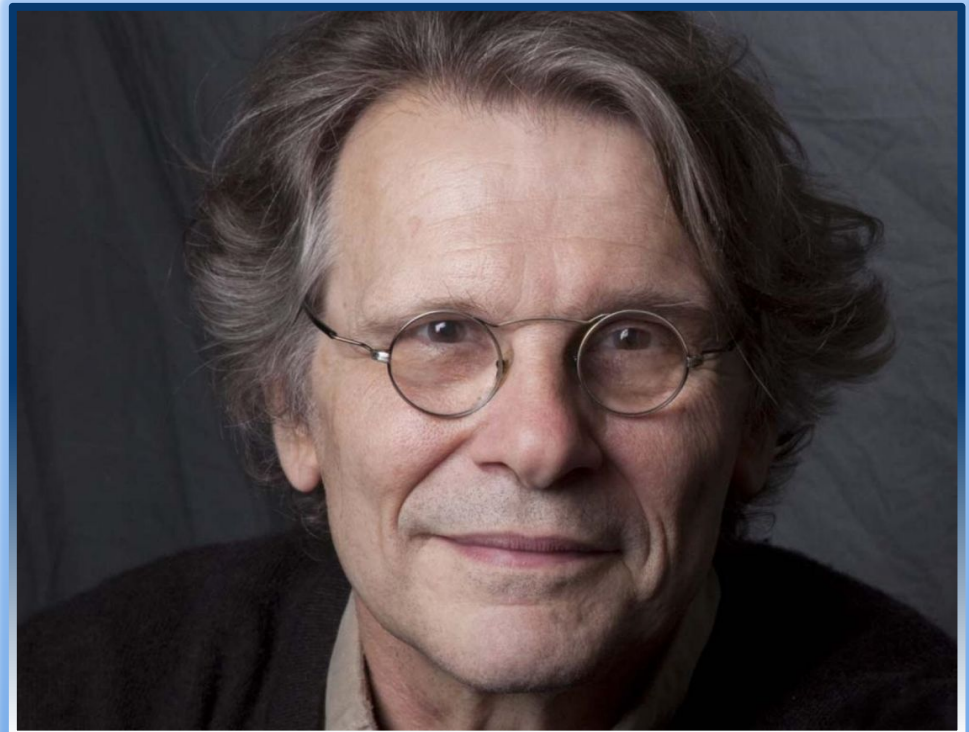


*Mi sono addormentato tardi su una qualche pagina di questo libro. Mi sveglio ansioso di proseguire. Sto per saltar giù dal letto ma un sottile chiasso mi ferma. È tutto un correre intorno alla casa. Garriti diffusi, intensi e tenui insieme. Ah! sì, la partenza delle rondini!*

# Alcune citazioni...

## Daniel Pennac

- *“È vero, da noi è sconveniente parlare d'amore nell'ambito dell'insegnamento. Provateci un po'. È come parlare di corda in casa dell'impiccato. Meglio ricorrere alla metafora” ...  
“Una metafora alata,” ...  
“Una mattina dello scorso settembre.  
Primissimi giorni di settembre.*



*Mi sono addormentato tardi su una qualche pagina di questo libro. Mi sveglio ansioso di proseguire. Sto per saltar giù dal letto ma un sottile chiasso mi ferma. È tutto un garrire intorno alla casa. Garriti diffusi, intensi e tenui insieme. Ah! sì, la partenza delle rondini!*

## Daniel Pennac

*Ogni anno, intorno alla stessa data, si danno appuntamento sui fili della luce. Campi e bordi delle strade si coprono di spartiti come in un'immagine da quattro soldi. Si apprestano a migrare. È lo schiamazzo del ricongiungimento. Quelle che ancora volteggiano nel cielo chiedono l'autorizzazione per l'allineamento a quelle che sono già posate sul filo, tutte frementi del desiderio di orizzonte. Spicciatevi che si va! Arriviamo, arriviamo! **Volano velocissime.** Vengono da nord, in schiere hitchcockiane, dirette a sud. Ed è esattamente l'orientazione della nostra camera da letto: nord, sud. Un abbaino a nord, una doppia finestra a sud. E ogni anno lo stesso dramma: ingannate dalla trasparenza di quelle finestre allineate, un bel po' di rondini vanno a schiantarsi contro l'abbaino. Niente scrittura, quindi, stamattina.*



## Daniel Pennac

*Ogni anno, intorno alla stessa data, si danno appuntamento sui fili della luce. Campi e bordi delle strade si coprono di spartiti come in un'immagine da quattro soldi. Si apprestano a migrare. È lo schiamazzo del ricongiungimento. Quelle che ancora volteggiano nel cielo chiedono l'autorizzazione per l'allineamento a quelle che sono già posate sul filo, tutte frementi del desiderio di orizzonte. Spicciatevi che si va! Arriviamo, arriviamo! Volano velocissime. **Vengono da nord, in schiere hitchcockiane, dirette a sud. Ed è esattamente l'orientazione della nostra camera da letto: nord, sud. Un abbaino a nord, una doppia finestra a sud. E ogni anno lo stesso dramma: ingannate dalla trasparenza di quelle finestre allineate, un bel po' di rondini vanno a schiantarsi contro l'abbaino. Niente scrittura, quindi, stamattina.***

## Daniel Pennac

*Apro l'abbaino a nord e la doppia finestra a sud, mi rituffo nel letto, ed eccoci occupati per la mattina a guardare squadriglie di rondini attraversare la nostra stanza, improvvisamente silenziose, forse intimidite dalle due figure coricate che le passano in rassegna. Il fatto è che, ai due lati della doppia finestra, due sottili vetri fissi rimangono chiusi. Lo spazio tra i due vetri laterali è ampio, di che lasciare passare tutti gli uccelli del cielo. Eppure, immancabilmente, tre o quattro di quelle scemotte vanno a sbattere contro i vetri fissi! È la nostra percentuale di somari. Le nostre devianti. Quelle che non stanno in riga. Che non seguono la retta via. E gozzovigliano ai margini. Risultato: vetro fisso. Toc! Tramortita sul tappeto. Allora uno di noi due si alza, prende la rondine stordita nel palmo della mano - non pesa quasi niente, ossa piene di vento -, aspetta che si risvegli, e la manda a raggiungere le sue amiche. La resuscitata vola via, ancora un po' intontita, zigzagando nello spazio ritrovato, dopodiché punta dritto a sud e sparisce nel suo avvenire.*

## Daniel Pennac

*Apro l'abbaino a nord e la doppia finestra a sud, mi rituffo nel letto, ed eccoci occupati per la mattina a guardare squadriglie di rondini attraversare la nostra stanza, improvvisamente silenziose, forse intimidite dalle due figure coricate che le passano in rassegna. Il fatto è che, ai due lati della doppia finestra, due sottili vetri fissi rimangono chiusi. Lo spazio tra i due vetri laterali è ampio, di che lasciare passare tutti gli uccelli del cielo. Eppure, immancabilmente, tre o quattro di quelle scemotte vanno a sbattere contro i vetri fissi! È la nostra percentuale di somari.*

**Le nostre devianti. Quelle che non stanno in riga. Che non seguono la retta via. E gozzovigliano ai margini. Risultato: vetro fisso. Toc! Tramortita sul tappeto. Allora uno di noi due si alza, prende la rondine stordita nel palmo della mano - non pesa quasi niente, ossa piene di vento -, aspetta che si risvegli, e la manda a raggiungere le sue amiche. La resuscitata vola via, ancora un po' intontita, zigzagando nello spazio ritrovato, dopodiché punta dritto a sud e sparisce nel suo avvenire.**

## Daniel Pennac

*Ecco, la mia metafora vale quel che vale, ma è questo l'amore in materia di insegnamento, quando gli studenti volano come uccelli impazziti.” ... “salvare dal coma scolastico una sfilza di rondini sfracellate. Non sempre si riesce, a volte non si trova una strada, alcune non si ridestano, rimangono al tappeto oppure si rompono il collo contro il vetro successivo; costoro rimangono nella nostra coscienza come le voragini di rimorso in cui riposano le rondini morte in fondo al nostro giardino, ma ogni volta ci proviamo, ci abbiamo provato.*

*Sono i nostri studenti. Le questioni di simpatia o di antipatia per l'uno o per l'altro (questioni quanto mai reali, ci mancherebbe!) non c'entrano. Nessuno di noi saprebbe dire il grado dei nostri sentimenti verso di loro. Non di questo amore si tratta. Una rondine tramortita è una rondine da rianimare, punto e basta.”*



## Daniel Pennac

*Ecco, la mia metafora vale quel che vale, ma è questo l'amore in materia di insegnamento, quando gli studenti volano come uccelli impazziti.” ... “salvare dal coma scolastico una sfilza di rondini sfracellate. Non sempre si riesce, a volte non si trova una strada, alcune non si ridestano, rimangono al tappeto oppure si rompono il collo contro il vetro successivo; costoro rimangono nella nostra coscienza come le voragini di rimorso in cui riposano le rondini morte in fondo al nostro giardino, ma ogni volta ci proviamo, ci abbiamo provato.*

***Sono i nostri studenti. Le questioni di simpatia o di antipatia per l'uno o per l'altro (questioni quanto mai reali, ci mancherebbe!) non c'entrano. Nessuno di noi saprebbe dire il grado dei nostri sentimenti verso di loro. Non di questo amore si tratta. Una rondine tramortita è una rondine da rianimare, punto e basta.”***

# ...E allora?

- didattica  
laboratoriale
- problemi / giochi  
significativi
- matematica & realtà
- strumenti  
informatici

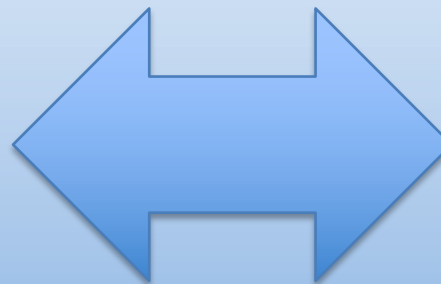


principi  
forti  
alla  
base dei  
corsi  
MathUp

# ...E allora?



- didattica  
laboratoriale
- problemi / giochi  
significativi
- matematica & realtà
- strumenti  
informatici



principi  
forti  
alla  
base dei  
corsi  
**MathUp**

# Confronto tra terapie di riabilitazione per l'apprendimento motorio del braccio (correlazione e regressione)

Fonte:

materiale messo a disposizione dalla prof.ssa **Laura Ventura** del Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Padova a seguito del suo intervento al convegno Pristem "Matematica in classe" (Genova, 23-25 ottobre 2015)





# Descrizione del caso di studio

**Il caso:** l'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia chiede al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Padova di condurre uno studio per valutare la convenienza dell'investimento nell'introduzione di una **terapia riabilitativa innovativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto**.

**Dataset:** misurazioni relative ad uno studio sull'apprendimento motorio di un gruppo di **47 pazienti** che hanno contratto un infarto ricoverati all'IRCCS San Camillo del Lido di Venezia, di cui **27** sono stati sottoposti ad una **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale (casi: trattamento 1)** e **20** sono stati sottoposti ad una **terapia convenzionale (controlli: trattamento 2)**.

**Variabile di interesse:** FIM (Functional Independence Measure): scala dell'autonomia del paziente con valori da 0 (non autosufficienza completa) a 130 (completa autonomia): la variabile FIM è stata misurata sia **prima (FIMPRE)** che **dopo (FIMPOST)** la terapia ricevuta.

**Obiettivo:** verificare se la **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale** consente un miglioramento della performance motoria e se il gruppo trattato con la **realtà virtuale** manifesta un miglioramento superiore rispetto al gruppo di controllo.

# Descrizione del caso di studio

**Il caso:** l'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia chiede al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Padova di condurre uno studio per valutare la convenienza dell'investimento nell'introduzione di una **terapia riabilitativa innovativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto**.

**Dataset:** misurazioni relative ad uno studio sull'apprendimento motorio di un gruppo di **47 pazienti** che hanno contratto un infarto ricoverati all'IRCCS San Camillo del Lido di Venezia, di cui **27** sono stati sottoposti ad una **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale (casi: trattamento 1)** e **20** sono stati sottoposti ad una **terapia convenzionale (controlli: trattamento 2)**.

**Variabile di interesse:** FIM (Functional Independence Measure): scala dell'autonomia del paziente con valori da 0 (non autosufficienza completa) a 130 (completa autonomia): la variabile FIM è stata misurata sia **prima (FIMPRE)** che **dopo (FIMPOST)** la terapia ricevuta.

**Obiettivo:** verificare se la **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale** consente un miglioramento della performance motoria rispetto al gruppo di controllo. **la realtà virtuale manifesta un miglioramento superiore rispetto al gruppo di controllo.**

# Descrizione del caso di studio

**Il caso:** l'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia chiede al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Padova di condurre uno studio per valutare la convenienza dell'investimento nell'introduzione di una **terapia riabilitativa innovativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto**.

**Dataset:** misurazioni relative ad uno studio sull'apprendimento motorio di un gruppo di **47 pazienti** che hanno contratto un infarto ricoverati all'IRCCS San Camillo del Lido di Venezia, di cui **27** sono stati sottoposti ad una **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale (casi: trattamento 1)** e **20** sono stati sottoposti ad una **terapia convenzionale (controlli: trattamento 2)**.

**Variabile di interesse: FIM (Functional Independence Measure):** scala dell'autonomia del paziente con valori da 0 (non autosufficienza completa) a 130 (completa autonomia): la variabile FIM è stata misurata sia **prima (FIMPRE)** che **dopo (FIMPOST)** la terapia ricevuta.

**Obiettivo:** verificare se la **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale** consente un miglioramento della performance motoria rispetto al gruppo di controllo. **la realtà virtuale manifesta un miglioramento superiore rispetto al gruppo di controllo.**

# Descrizione del caso di studio

**Il caso:** l'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia chiede al Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Padova di condurre uno studio per valutare la convenienza dell'investimento nell'introduzione di una **terapia riabilitativa innovativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto**.

**Dataset:** misurazioni relative ad uno studio sull'apprendimento motorio di un gruppo di **47 pazienti** che hanno contratto un infarto ricoverati all'IRCCS San Camillo del Lido di Venezia, di cui **27** sono stati sottoposti ad una **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale (casi: trattamento 1)** e **20** sono stati sottoposti ad una **terapia convenzionale (controlli: trattamento 2)**.

**Variabile di interesse:** FIM (Functional Independence Measure): scala dell'autonomia del paziente con valori da 0 (non autosufficienza completa) a 130 (completa autonomia): la variabile FIM è stata misurata sia **prima (FIMPRE)** che **dopo (FIMPOST)** la terapia ricevuta.

**Obiettivo:** verificare se la **terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale** consente un **miglioramento** della performance motoria e se il gruppo trattato con la realtà virtuale manifesta un **miglioramento superiore** rispetto al gruppo di controllo.



# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

Tempo necessario: 4-5 ore, classe destinataria: quarta ITIS meccanico

□ **Descrizione del caso:** esposizione del problema posto dall'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia

□ **Presentazione dei dati:** brain storming, osservazioni relative a informazioni superflue o ignorate in prima analisi utilizzabili per futuri approfondimenti (es. sesso del paziente)

NB: i dati sono stati forniti agli studenti e inviata dall'ospedale

	Sesso	Eta	TRATTAMENTO	FIMPRE	FIMPOST
1	1	57.00000	2	124	124
2	2	71.00000	2	108	110
3	2	36.00000	2	108	108
4	2	74.00000	2	119	115
5	1	55.00000	2	118	122
6	1	56.00000	2	109	97
7	1	74.00000	2	88	88
8	2	67.00000	2	65	76
9	2	70.00000	2	79	100
10	1	72.00000	2	100	111
11	1	69.00000	2	86	103
12	2	58.00000	2	116	118
13	2	61.00000	2	95	97
14	2	59.00000	2	106	110
15	1	50.00000	2	108	112
16	2	64.00000	2	120	124
17	1	44.00000	2	118	125
18	1	71.00000	2	106	110

	Sesso	Eta	TRATTAMENTO	FIMPRE	FIMPOST
1	1	57.00000	2	124	124
2	2	71.00000	2	108	110
3	2	36.00000	2	108	108
4	2	74.00000	2	119	115
5	1	55.00000	2	118	122
6	1	56.00000	2	109	97
7	1	74.00000	2	88	88
8	2	67.00000	2	65	76
9	2	70.00000	2	79	100
10	1	72.00000	2	100	111
11	1	69.00000	2	86	103
12	2	58.00000	2	116	118
13	2	61.00000	2	95	97
14	2	59.00000	2	106	110
15	1	50.00000	2	108	112
16	2	64.00000	2	120	124

# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

Tempo necessario: 4-5 ore, classe destinataria: quarta ITIS meccanico

□ **Descrizione del caso:** esposizione del problema posto dall'ospedale "San Camillo" del Lido di Venezia

□ **Presentazione dei dati:** brain storming, osservazioni relative a informazioni superflue o ignorate in prima analisi utilizzabili per futuri approfondimenti (es. sesso del paziente)

NB: i dati sono stati forniti agli allievi nella forma "grezza" inviata dall'ospedale

	Sesso	Eta	TRATTAMENTO	FIMPRE	FIMPOST
1	1	57.00000	2	124	124
2	2	71.00000	2	108	110
3	2	36.00000	2	108	108
4	2	74.00000	2	119	115
5	1	55.00000	2	118	122
6	1	56.00000	2	109	97
7	1	74.00000	2	88	88
8	2	67.00000	2	65	76
9	2	70.00000	2	79	100
10	1	72.00000	2	100	111
11	1	69.00000	2	86	103
12	2	58.00000	2	116	118
13	2	61.00000	2	95	97
14	2	59.00000	2	106	110
15	1	50.00000	2	108	112
16	2	64.00000	2	120	124
17	1	44.00000	2	118	125
18	1	71.00000	2	106	110

	Sesso	Eta	TRATTAMENTO	FIMPRE	FIMPOST
1	1	57.00000	2	124	124
2	2	71.00000	2	108	110
3	2	36.00000	2	108	108
4	2	74.00000	2	119	115
5	1	55.00000	2	118	122
6	1	56.00000	2	109	97
7	1	74.00000	2	88	88
8	2	67.00000	2	65	76
9	2	70.00000	2	79	100
10	1	72.00000	2	100	111
11	1	69.00000	2	86	103
12	2	58.00000	2	116	118
13	2	61.00000	2	95	97
14	2	59.00000	2	106	110
15	1	50.00000	2	108	112
16	2	64.00000	2	120	124

# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

## ❑ Organizzazione e sintesi dei dati. Aspetti chiave:

Come è possibile formarsi una prima idea approssimativa della situazione?

(rappresentare i dati tramite il foglio di calcolo Excel)

Quale scelgo come **variabile indipendente** (FIMPRE) e quale come **variabile dipendente** (FIMPOST)?

Esiste un **legame** tra le **variabili** individuate?

È presente un **miglioramento** per ogni **singola terapia**?

Una **terapia** è **migliore dell'altra**?

Come possiamo **verificare** questi aspetti?

Quale **strumento matematico** abbiamo a disposizione per **descrivere** il **tipo di legame?** (retta di regressione)

Quale **strumento matematico** per **misurare** la **bontà del modello lineare** costruito?  
(coefficiente di correlazione lineare di Bravais-Pearson  $r$  e coefficiente di determinazione  $R$ )

# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

□ **Organizzazione e sintesi dei dati. Aspetti chiave:**

Come è possibile formarsi una prima idea approssimativa della situazione?

(rappresentare i dati tramite il foglio di calcolo Excel)

Quale scelgo come **variabile indipendente** (FIMPRE) e quale come **variabile dipendente** (FIMPOST)?

Esiste un **legame** tra le variabili individuate?

È presente un **miglioramento** per ogni singola terapia?

Una **terapia** è migliore dell'altra?

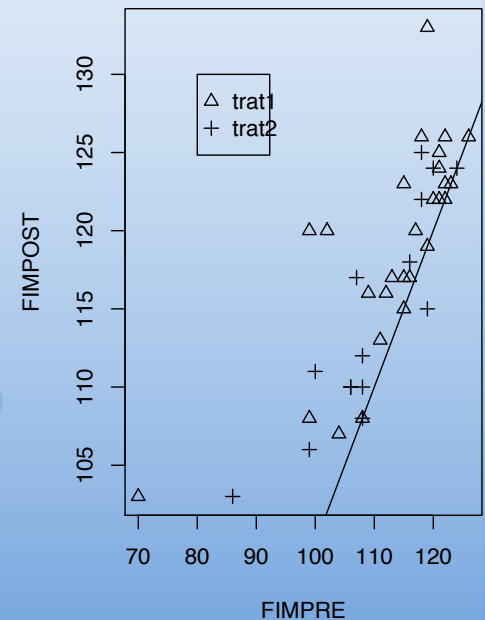
Come possiamo **verificare** questi aspetti?

Quale **strumento matematico** abbiamo a disposizione per descrivere il **tipo di legame?** (retta di regressione)

Quale **strumento matematico** per misurare la **bontà del modello lineare costruito?**  
(coefficiente di correlazione lineare di Bravais - Pearson  $r$  e coefficiente di determinazione  $R$ )

# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

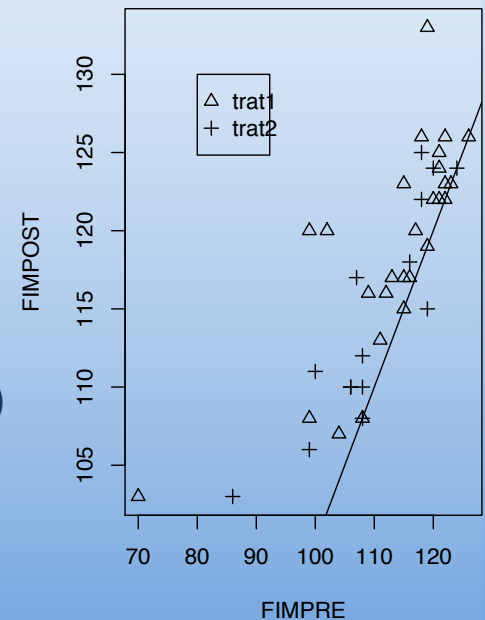
- ❑ Rappresentazione dei dati tramite Excel: costruzione delle tabelle e dei relativi grafici
- ❑ Costruzione, per ciascuna terapia, delle equazioni delle rette di regressione e calcolo dei relativi coefficienti  $r$  e  $R$
- ❑ Confronto qualitativo/quantitativo tra le due terapie. Aspetti chiave:
  - Come possiamo confrontare in maniera immediata le due terapie? (rappresentazione con Excel di entrambe sullo stesso grafico utilizzando le due equazioni delle rette di regressione su valori intermedi equidistanti tra loro a partire dal valore minimo di FIMPRES fino al valore massimo)
  - Su quali pazienti conviene fondare il confronto? (i più gravi)
  - Sono presenti dati che potrebbero essere ritenuti poco significativi? (eventuali punti leva)





# Le fasi salienti dell'attività laboratoriale:

- ❑ Rappresentazione dei dati tramite Excel: costruzione delle tabelle e dei relativi grafici
- ❑ Costruzione, per ciascuna terapia, delle equazioni delle rette di regressione e calcolo dei relativi coefficienti  $r$  e  $R$
- ❑ **Confronto qualitativo/quantitativo tra le due terapie. Aspetti chiave:**
  - Come possiamo confrontare in maniera immediata le due terapie? (rappresentazione con Excel di entrambe sullo stesso grafico utilizzando le due equazioni delle rette di regressione su valori intermedi equidistanti tra loro a partire dal valore minimo di FIMPRE fino al valore massimo)
  - Su quali pazienti conviene fondare il confronto? (i più gravi)
  - Sono presenti dati che potrebbero essere ritenuti poco significativi? (eventuali punti leva)



# Riassunto dei risultati ottenuti:

## □ NB:

- Se  $R^2=1$ : adattamento perfetto del modello ai dati
- Se  $R^2=0$ : la retta non è un modello adatto
- Se  $R^2=0,8$ : “buon livello” di adattamento del modello lineare ai dati

## □ Si ottengono i seguenti risultati:

### • Terapia con realtà virtuale

retta di regressione:  $y=0,45x+68,18$   $R=0,56$

### • Terapia tradizionale

retta di regressione:  $y=0,75x+52,40$   $R=0,77$

# Riassunto dei risultati ottenuti:

## □ NB:

- Se  $R^2=1$ : adattamento perfetto del modello ai dati
- Se  $R^2=0$ : la retta non è un modello adatto
- Se  $R^2=0,8$ : “buon livello” di adattamento del modello lineare ai dati

## □ Si ottengono i seguenti risultati:

### • Terapia con realtà virtuale

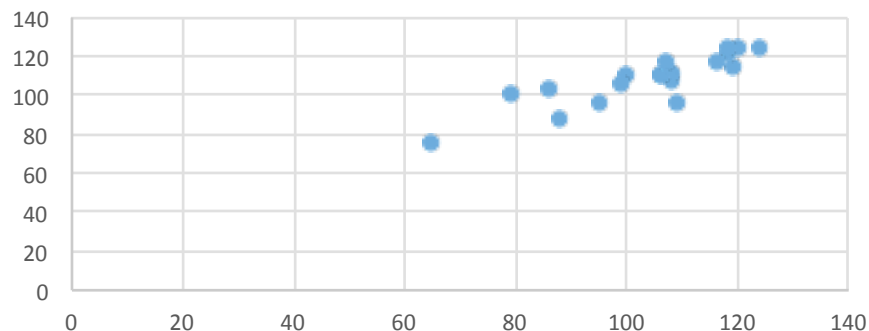
retta di regressione:  $y=0,45x+68,18$       $R=0,56$

### • Terapia tradizionale

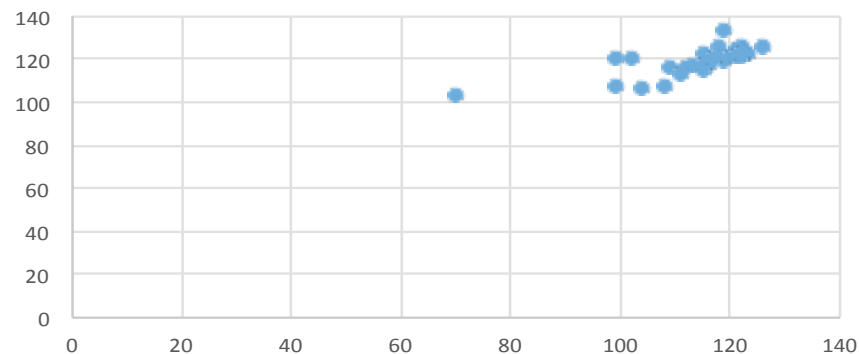
retta di regressione:  $y=0,73x+32,40$       $R=0,77$

# I lavori degli allievi:

Tradizionale



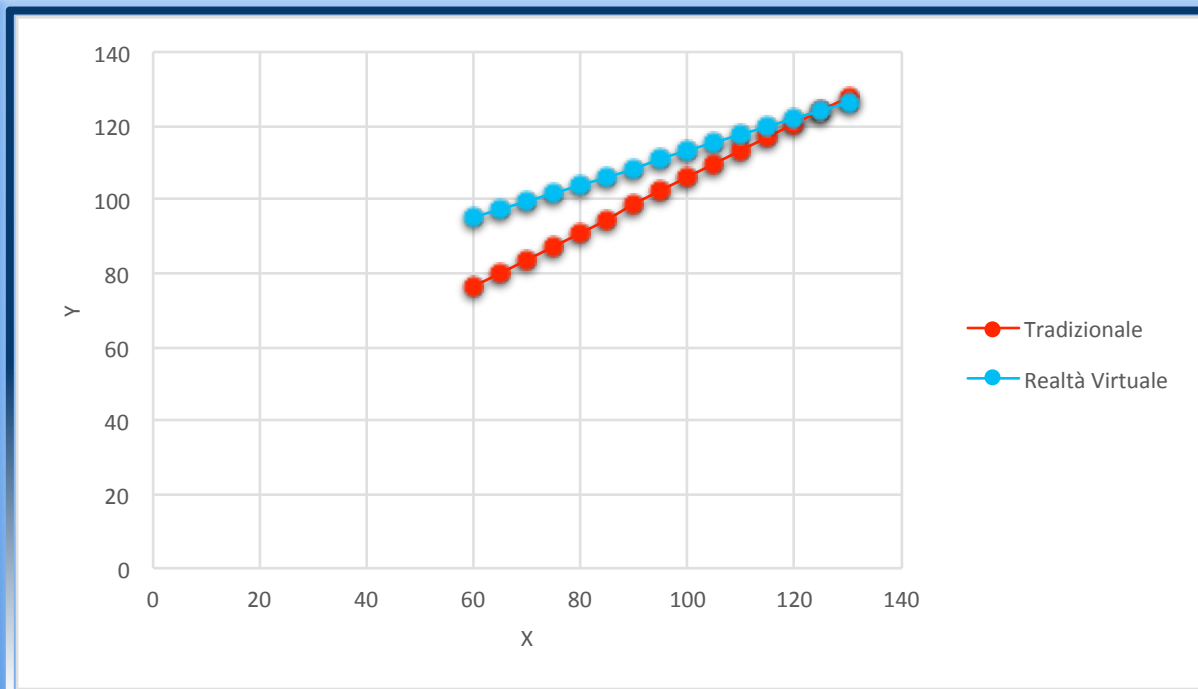
Realtà Virtuale



## Le osservazioni di un allievo:

“Nel trattamento classico vi è un coefficiente di correlazione un po’ più alto rispetto a quello trovato dal trattamento nuovo. Ciò significa che i punti nel grafico del trattamento classico seguono meglio una retta ideale ( $y = mx + q$ ) rispetto ai punti del grafico del trattamento nuovo.”

# I lavori degli allievi:



**Le conclusioni di un allievo:**

“A parità di valori di X, i valori di Y trovati guardando la retta del trattamento nuovo sono più alti di quelli trovati con la retta del trattamento classico.

(Tranne verso i valori di X corrispondenti a 130 dove le due rette tendono ad incontrarsi)

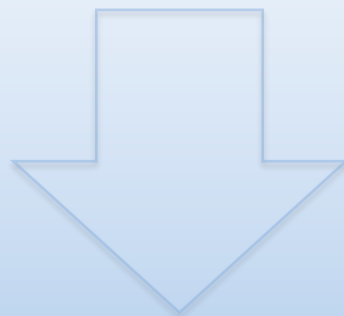
Ciò significa che con il trattamento nuovo c'è un miglior rapporto tra FIMPRE e FIMPOST, quindi una migliore riabilitazione da parte del paziente.”

**Le conclusioni di un altro allievo:** “In casi molto gravi sarebbe più conveniente utilizzare la terapia con la realtà virtuale.

Nei casi meno gravi non vi è differenza tra utilizzare la realtà virtuale e la cura tradizionale.”

# E quindi?

- ❑ La terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale consente un miglioramento della performance motoria.
- ❑ Il gruppo trattato con la realtà virtuale manifesta un miglioramento superiore rispetto al gruppo di controllo.



All'ospedale "San Camillo" conviene investire nell'introduzione della terapia riabilitativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto.



# E quindi?

- ❑ La terapia di riabilitazione innovativa con realtà virtuale consente un miglioramento della performance motoria.
- ❑ Il gruppo trattato con la realtà virtuale manifesta un miglioramento superiore rispetto al gruppo di controllo.



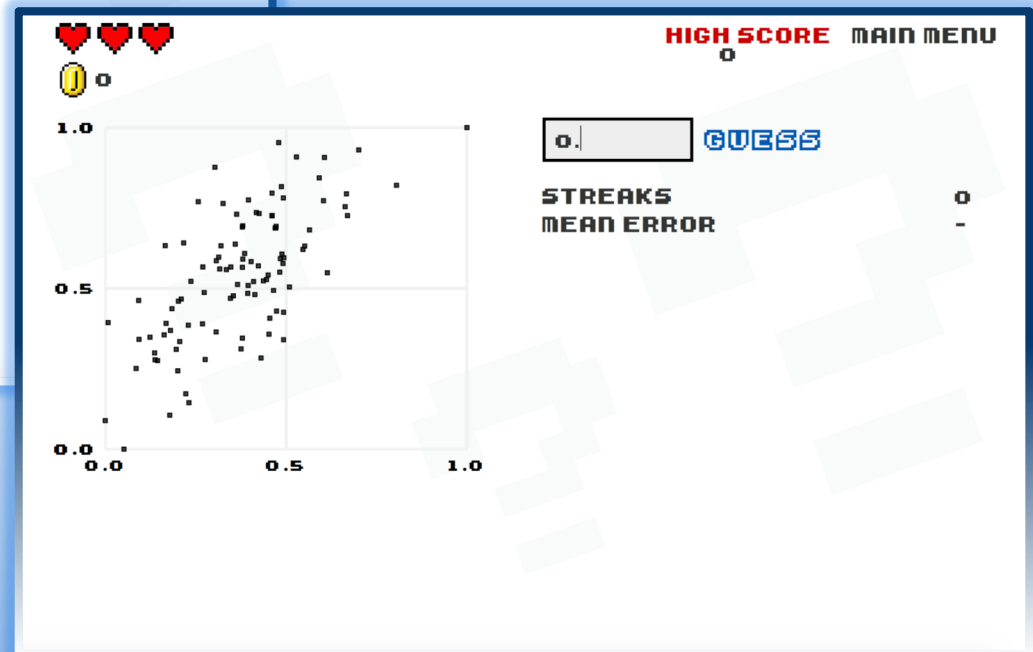
All'ospedale "San Camillo" conviene investire nell'introduzione della terapia riabilitativa con realtà virtuale rivolta a pazienti colpiti da infarto.

# Un gioco:

## GUESS THE CORRELATION

NEW GAME  
TWO PLAYERS  
SCORE BOARD  
ABOUT  
SETTINGS

HIGH SCORE 

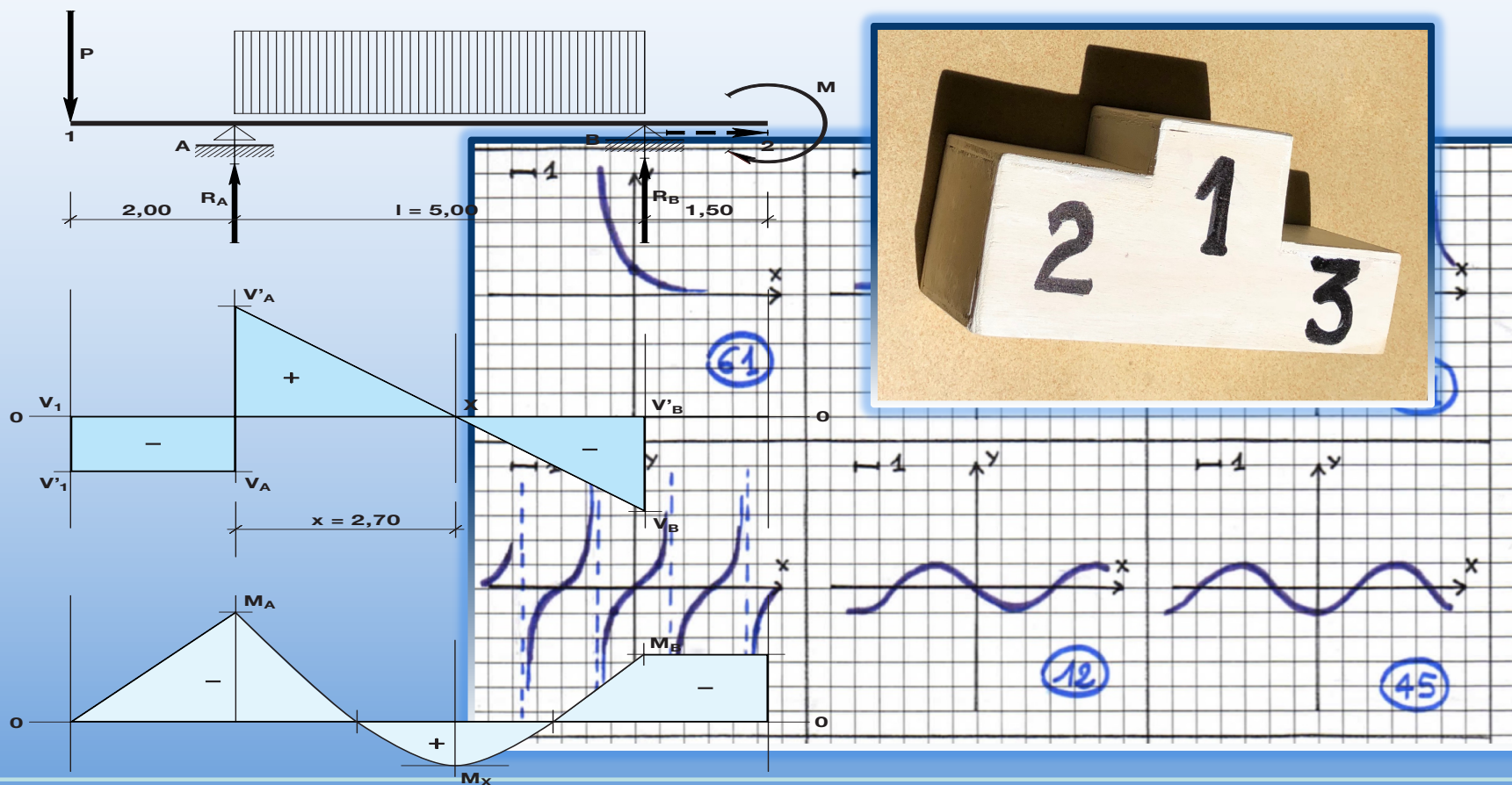


 Link:

<http://guessthecorrelation.com/index.html>

# La gara delle derivate!

La derivata e i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione in una trave inflessa per esplorare il legame tra il grafico di una funzione e quello della sua derivata prima.



# Descrizione del contesto

- ❑ L'attività proposta alla fine dell'unità didattica relativa al calcolo delle derivate e alla sua applicazione nello studio di funzione ad una classe 4<sup>^</sup> ITIS meccanico.
- ❑ Realizzazione in collaborazione col docente di Meccanica, prof. Antonio Briatore.
- ❑ Sono state impiegate **5 lezioni di un'ora ciascuna**.

## Scansione temporale

- ❑ Prima parte. I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione in una trave inflessa: esplorazione del legame tra taglio e momento.

prime 3 lezioni (le prime due in presenza con il docente di Meccanica).

Tre casi di sollecitazioni applicate ad una trave isostatica:

- Caso 1. Applicazione di carichi concentrati;
- Caso 2. Applicazione di carichi uniformemente distribuiti;
- Caso 3. Applicazione di carichi distribuiti triangolari.

# Descrizione del contesto

- ❑ L'attività proposta alla fine dell'unità didattica relativa al calcolo delle derivate e alla sua applicazione nello studio di funzione ad una classe 4<sup>^</sup> ITIS meccanico.
- ❑ Realizzazione in collaborazione col docente di Meccanica, prof. Antonio Briatore.
- ❑ Sono state impiegate 5 lezioni di un'ora ciascuna.

## Scansione temporale

- ❑ Prima parte. I diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione in una trave inflessa: esplorazione del legame tra taglio e momento.

prime 3 lezioni (le prime due in presenza con il docente di Meccanica).

Tre casi di sollecitazioni applicate ad una trave isostatica:

- Caso 1. Applicazione di carichi concentrati;
- Caso 2. Applicazione di carichi uniformemente distribuiti;
- Caso 3. Applicazione di carichi distribuiti triangolari.

# Scansione temporale

- ❑ Seconda parte. La gara delle derivate: riconoscimento di coppie di grafici rappresentanti una funzione e la relativa derivata.

ultime 2 lezioni:

Tre casi di sollecitazioni applicate ad una trave isostatica:

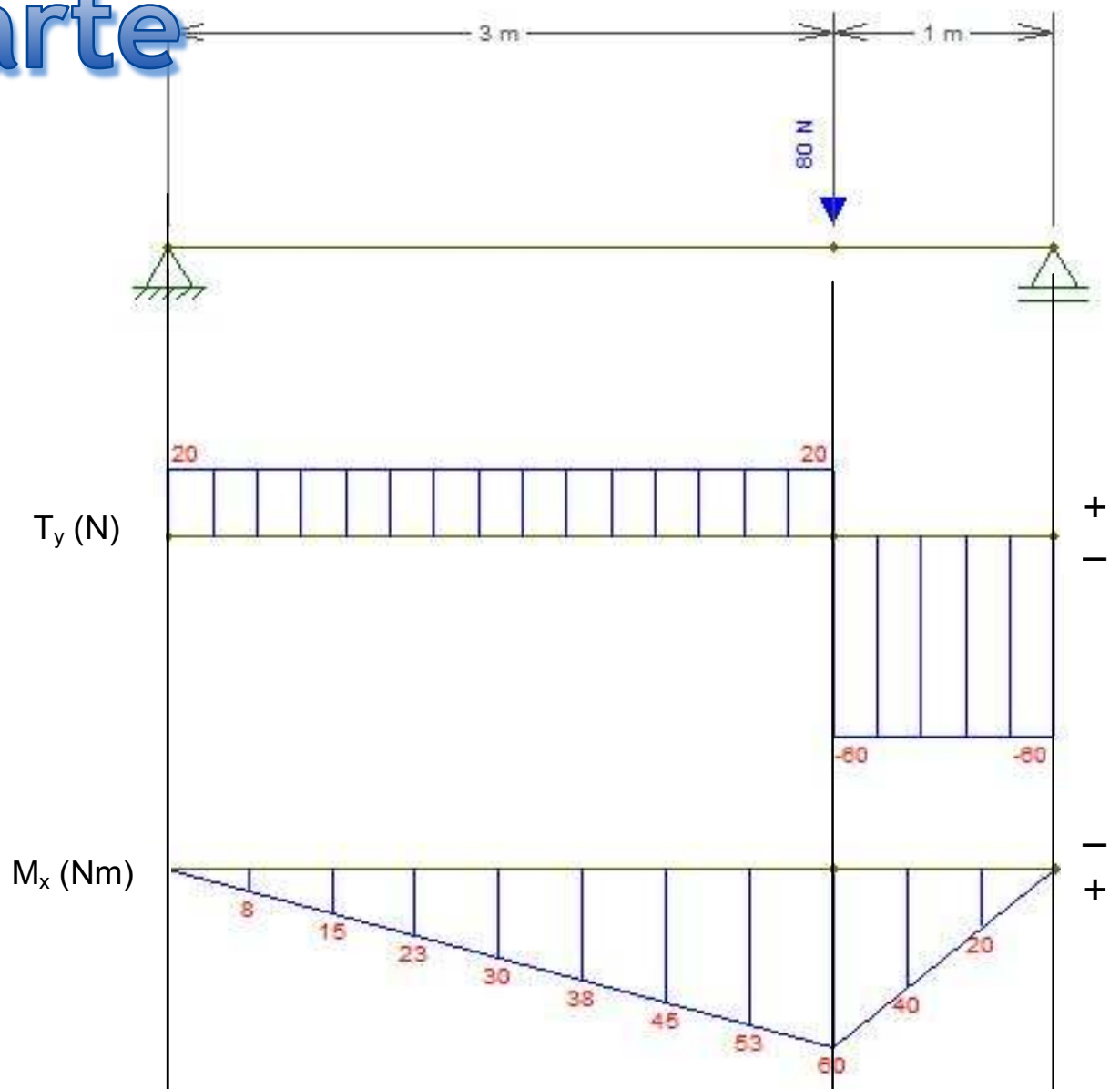
- presentazione della gara;
- organizzazione della classe in piccoli gruppi (3-4 allievi);
- svolgimento dell'attività con discussione tra le soluzioni ottenute e formazione della classifica dei vari gruppi allestiti.





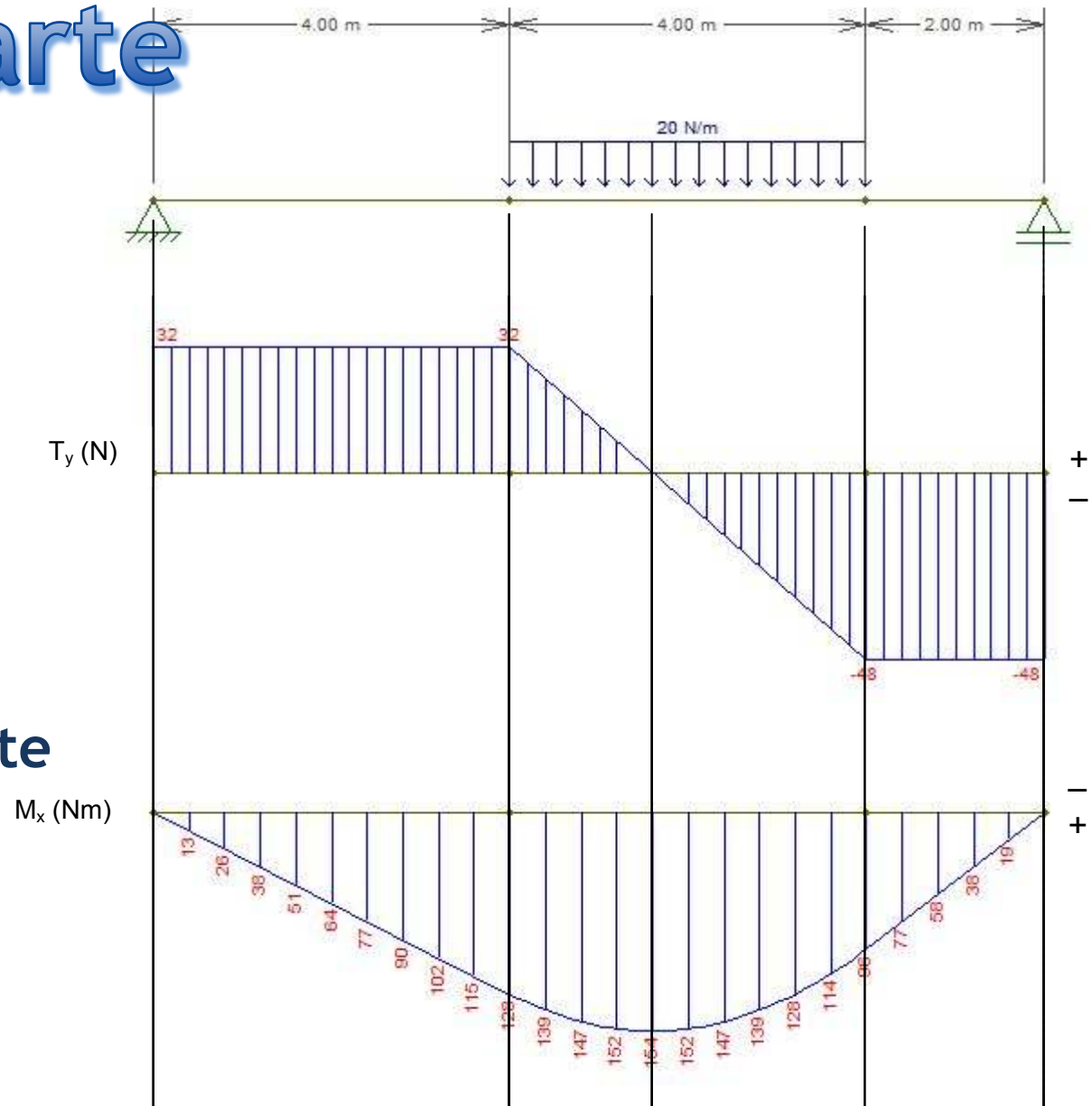
# Prima parte

- Caso 1:  
Trave  
isostatica  
soggetta a  
carichi  
concentrati.



# Prima parte

- **Caso 2:**  
**Trave**  
**isostatica**  
**soggetta a**  
**carichi**  
**uniformemente**  
**distribuiti.**



# Prime due lezioni: le fasi salienti

- Analisi dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione (normale, taglio e momento) relativi al Caso 1 e al Caso 2. Aspetti chiave:
  - A quali oggetti matematici corrispondono i grafici di taglio e momento? (grafici di funzioni, riflessione sulle variabili indipendenti e dipendenti).
  - Quale particolare tipologia di funzione viene rappresentata in ogni tratto del diagramma? (in particolare, relativamente agli intervalli nei quali taglio e momento presentano un andamento costante, lineare o lineare affine).
  - Quali equazioni possono rappresentare le funzioni coinvolte?
  - Facendo riferimento a funzioni polinomiali, quale grado si riscontra?

# Prime due lezioni: le fasi salienti

- Analisi dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione (normale, taglio e momento) relativi al Caso 1 e al Caso 2. Aspetti chiave:
  - A quali oggetti matematici corrispondono i grafici di taglio e momento? (grafici di funzioni, riflessione sulle variabili indipendenti e dipendenti).
  - Quale particolare **tipologia di funzione** viene rappresentata in ogni tratto del diagramma? (in particolare, relativamente agli intervalli nei quali taglio e momento presentano un andamento costante, lineare o lineare affine).
  - Quali equazioni possono rappresentare le funzioni coinvolte?
  - Facendo riferimento a funzioni polinomiali, quale grado si riscontra?

# Prime due lezioni: le fasi salienti

- Analisi dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione (normale, taglio e momento) relativi al Caso 1 e al Caso 2. Aspetti chiave:
  - A quali oggetti matematici corrispondono i grafici di taglio e momento? (grafici di funzioni, riflessione sulle variabili indipendenti e dipendenti).
  - Quale particolare **tipologia di funzione** viene rappresentata in ogni tratto del diagramma? (in particolare, relativamente agli intervalli nei quali taglio e momento presentano un andamento costante, lineare o lineare affine).
  - Quali **equazioni** possono rappresentare le funzioni coinvolte?
  - Facendo riferimento a funzioni polinomiali, **quale grado** si riscontra?

# Prime due lezioni: le fasi salienti

- Date le condizioni di carico e i vincoli, **costruzione delle equazioni che descrivono le caratteristiche di sollecitazione** agenti sulla struttura (ad es., l'equazione del momento nel Caso 2 è stata ottenuta ricercando la parabola passante per tre punti);
  - Osservazioni sui punti di discontinuità e di non derivabilità (aspetti matematici e meccanici);
  - Brainstorming relativo al possibile legame esistente tra le equazioni di taglio e momento (tra varie congetture errate proposte dai compagni, un allievo ha, finalmente, esclamato: “il taglio è la derivata del momento!”).

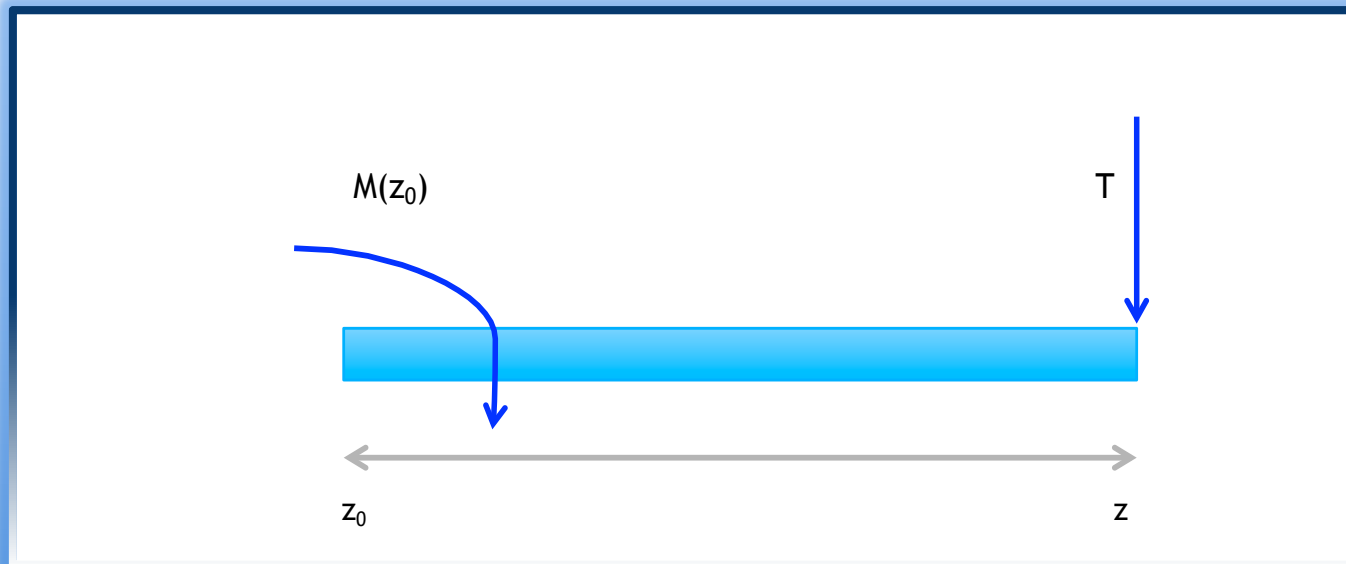


# Prime due lezioni: le fasi salienti

- Date le condizioni di carico e i vincoli, costruzione delle equazioni che descrivono le caratteristiche di sollecitazione agenti sulla struttura (ad es., l'equazione del momento nel Caso 2 è stata ottenuta ricercando la parabola passante per tre punti);
- Osservazioni sui punti di discontinuità e di non derivabilità (aspetti matematici e meccanici);
- Brainstorming relativo al possibile legame esistente tra le equazioni di taglio e momento (tra varie congetture errate proposte dai compagni, un allievo ha, finalmente, esclamato: “il taglio è la derivata del momento!”).

# E quindi?

- A questo punto gli allievi intuiscono che, sezione per sezione (proprio per come vengono definite in Meccanica le caratteristiche di sollecitazione taglio e momento flettente), **il taglio costituisce la derivata del momento flettente al variare dell'ascissa  $z$  relativa alla sezione** (livello di formalismo adeguato alla classe)



# Osservazioni di carattere metodologico

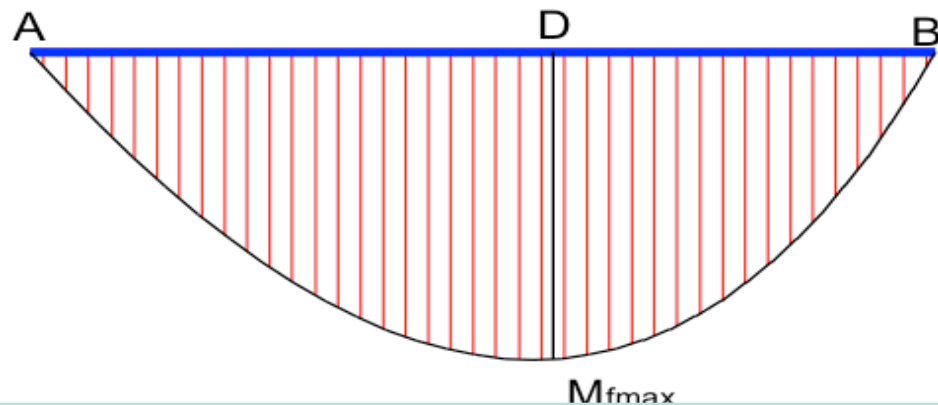
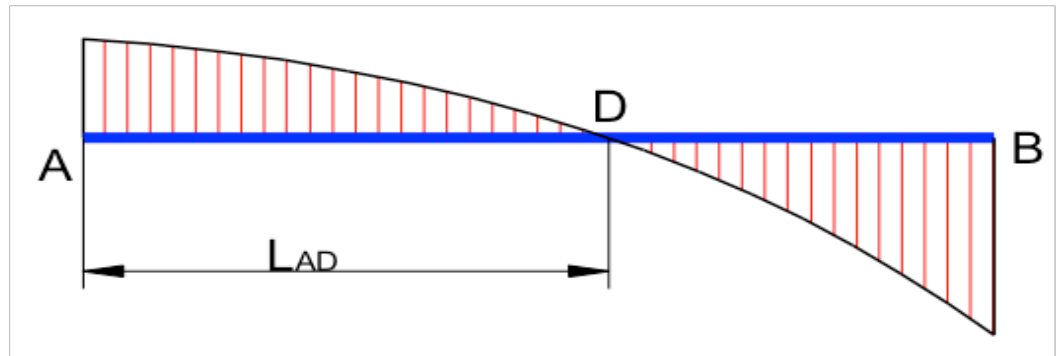
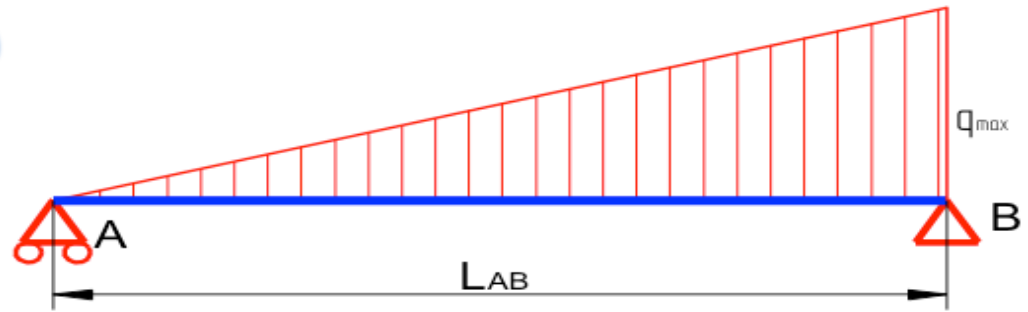
- Poiché, in una prima fase, agli allievi vengono mostrati soltanto i grafici di taglio e momento, mantenendone celate le relative equazioni in funzione dell'ascissa  $z$ , successivamente, a partire dalle condizioni di carico e dai dati relativi alla struttura, **costruire le funzioni taglio e momento.**
- A partire dalle equazioni di taglio e momento, **calcolare la derivata prima del momento** al variare dell'ascissa per verificare che il taglio è la derivata del momento.
- Ricordando ipotesi e tesi del teorema di Fermat, è, a questo punto, possibile chiarire agli allievi il significato matematico dell'affermazione utilizzata in Meccanica: "quando il momento è massimo o minimo il taglio è nullo".

# Osservazioni di carattere metodologico

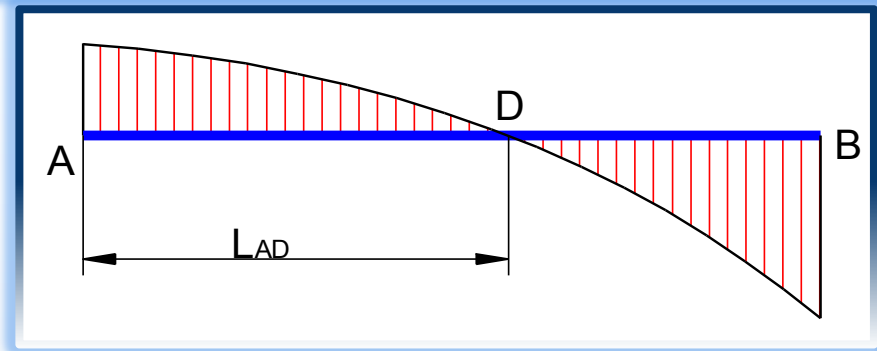
- Poiché, in una prima fase, agli allievi vengono mostrati soltanto i grafici di taglio e momento, mantenendone celate le relative equazioni in funzione dell'ascissa  $z$ , successivamente, a partire dalle condizioni di carico e dai dati relativi alla struttura, **costruire le funzioni taglio e momento.**
- A partire dalle equazioni di taglio e momento, **calcolare la derivata prima del momento al variare dell'ascissa per verificare che il taglio è la derivata del momento.**
- Ricordando ipotesi e tesi del **teorema di Fermat**, è, a questo punto, possibile chiarire agli allievi il significato matematico dell'affermazione utilizzata in Meccanica: **“quando il momento è massimo o minimo il taglio è nullo”.**

# Prima parte

- **Caso 3:**  
Trave  
isostatica  
soggetta a  
carichi  
distribuiti a  
forma  
triangolare.



# Terza lezione: le fasi salienti



## □ Analisi del diagramma del taglio relativo al Caso 3. Aspetti chiave:

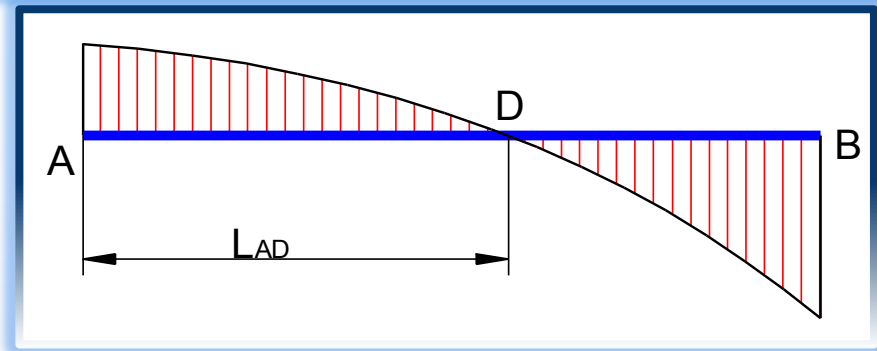
- A partire dal grafico del taglio è possibile dedurre l'equazione?
- È possibile ricavare, a partire solamente dall'equazione del taglio (senza conoscere i vincoli e le condizioni di carico), “l'” equazione del relativo momento?

Gli allievi in Meccanica sanno che nel carico triangolare il diagramma del taglio è una parabola e quello del momento è una cubica: introduzione del concetto di primitiva e di integrale indefinito.

• Possibile approfondimento: date le condizioni di carico e i vincoli ai quali la trave è soggetta ricavare l'equazione del momento ed il relativo diagramma.



# Terza lezione: le fasi salienti



## □ Analisi del diagramma del taglio relativo al Caso 3. Aspetti chiave:

- A partire dal grafico del taglio è possibile dedurre l'equazione?
- È possibile ricavare, a partire solamente dall'equazione del taglio (senza conoscere i vincoli e le condizioni di carico), "l'" equazione del relativo momento?

Gli allievi in Meccanica sanno che nel carico triangolare il diagramma del taglio è una parabola e quello del momento è una cubica: **introduzione del concetto di primitiva e di integrale indefinito.**

- **Possibile approfondimento:** date le condizioni di carico e i vincoli ai quali la trave è soggetta ricavare l'equazione del momento ed il relativo diagramma.

# Quadro generale

CONDIZIONI DI CARICO DI UNA TRAVE ISOSTATICA	GRAFICO DEL TAGLIO AL VARIARE DELL'ASCISSA	GRAFICO DEL MOMENTO AL VARIARE DELL'ASCISSA
Carico concentrato	Retta orizzontale	Retta obliqua
Carico distribuito in maniera uniforme	Retta obliqua	Parabola
Carico triangolare	Parabola	Cubica

Tabella 1

$y=f(x)$	$y=f'(x)$
$y=a$	$y=ax+b$
$y=ax+b$	$y=ax^2/2+bx+c$
$y=ax^2+bx+c$	$y=ay=ax^3/3+bx^2/2+cx+d$

Tabella 2 (a,b,c,d: costanti reali)

DESCRIZIONE DEL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE	GRAFICO DELLO SPOSTAMENTO AL VARIARE DEL TEMPO	GRAFICO DELLA VELOCITÀ AL VARIARE DEL TEMPO	GRAFICO DELL'ACCELERAZIONE AL VARIARE DEL TEMPO
Moto rettilineo uniforme	Retta obliqua	Retta orizzontale	Asse delle ascisse
Moto rettilineo uniformemente accelerato	Parabola	Retta obliqua	Retta orizzontale
Moto vario	$s(t)$	$s'(t)$	$s''(t)$

Tabella 3

# Seconda parte

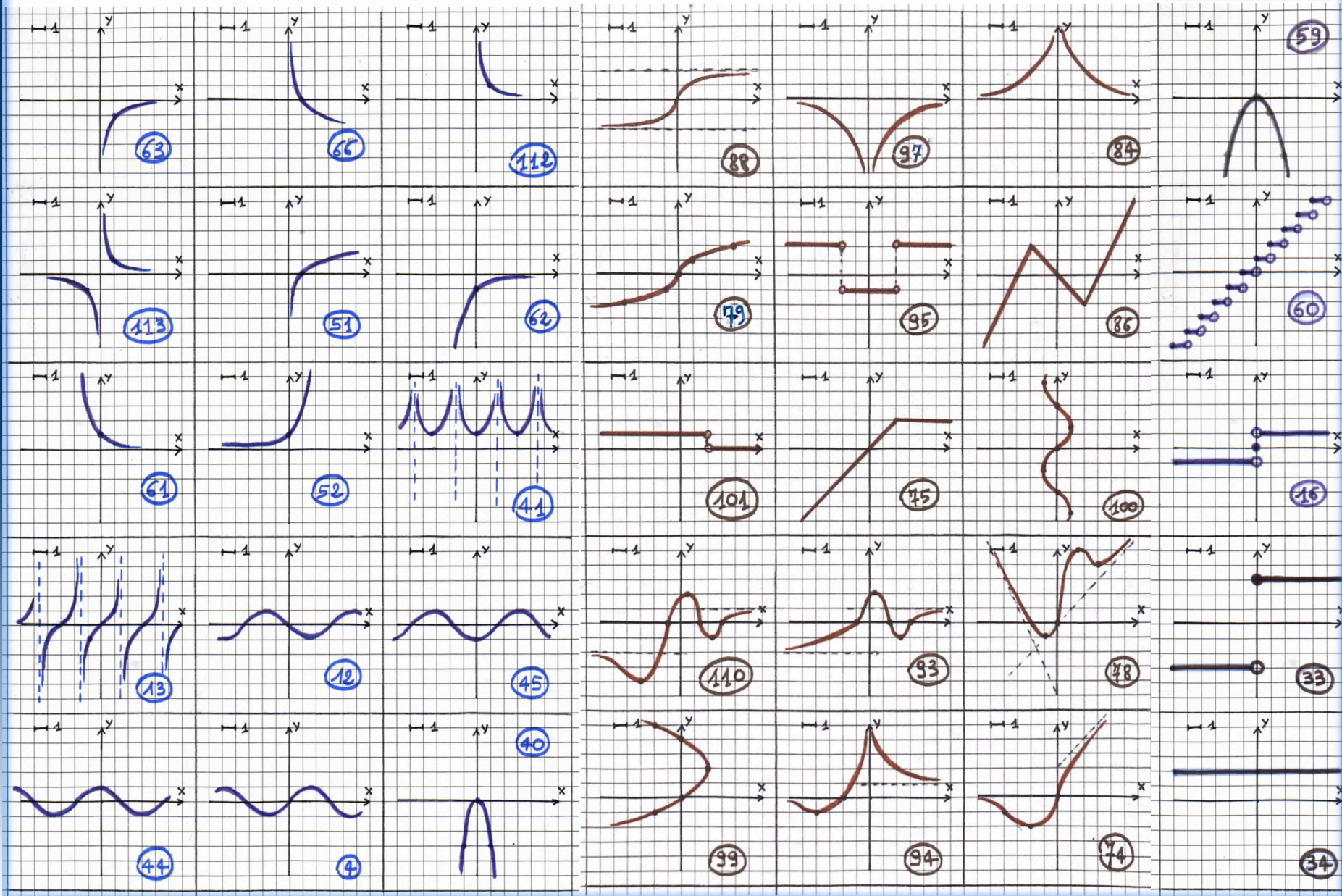
## La gara. Le fasi salienti:

- ❑ Ciascun gruppo (3-4 allievi) riceve un mazzetto contenente 120 grafici numerati da 1 a 120.
- ❑ **Obiettivo:** individuare le coppie che riportino il grafico di una funzione e quello della relativa derivata.
- ❑ L'attività viene presentata sotto forma di una gara tra i vari gruppi che dovranno comunicare all'insegnante il numero totale di coppie individuate.
- ❑ Viene stilata la classifica dei gruppi in funzione del numero di coppie riconosciute nel minor tempo.



# Seconda parte

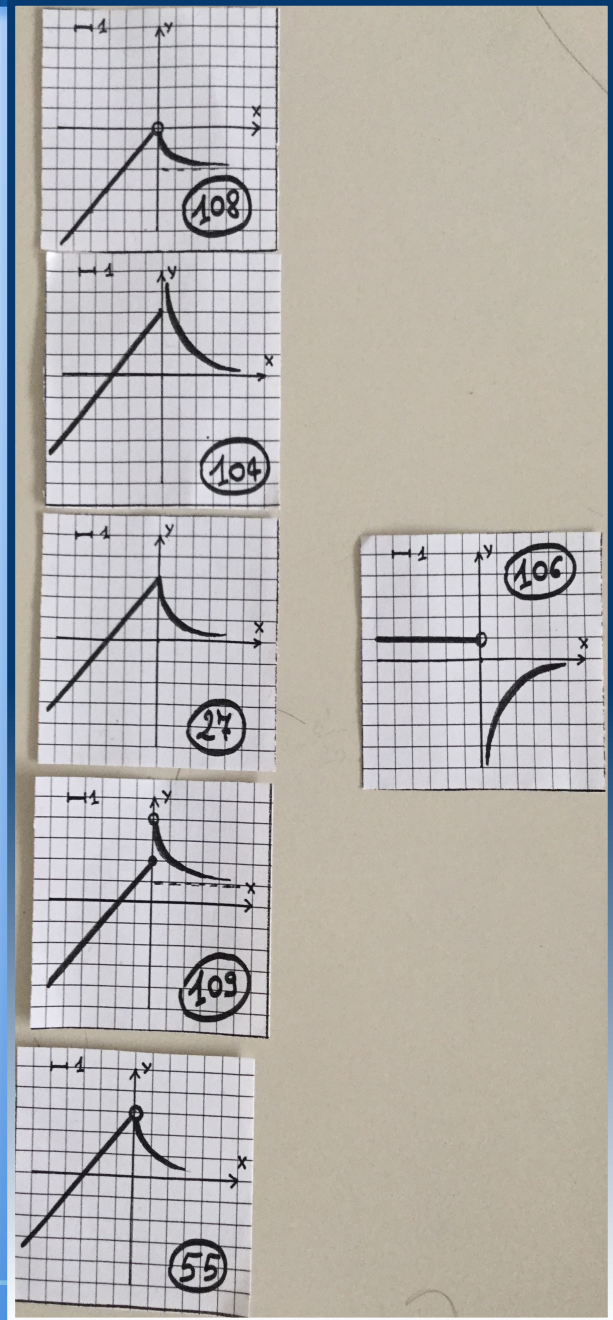
# I grafici





# La gara. Le fasi salienti:

- ❑ I grafici distribuiti agli allievi contengono:
  - coppie funzione - derivata;
  - funzioni prive della controparte derivata;
  - oggetti matematici non corrispondenti a funzioni (immediatamente individuati dagli allievi);
  - casi in cui più funzioni corrispondono alla stessa derivata.



# Le soluzioni:

- **Riflessione:** ad una funzione data corrisponde un'unica derivata mentre una certa funzione può rappresentare la derivata di differenti (infinite) funzioni (introduzione dei concetti di primitiva e integrale indefinito).

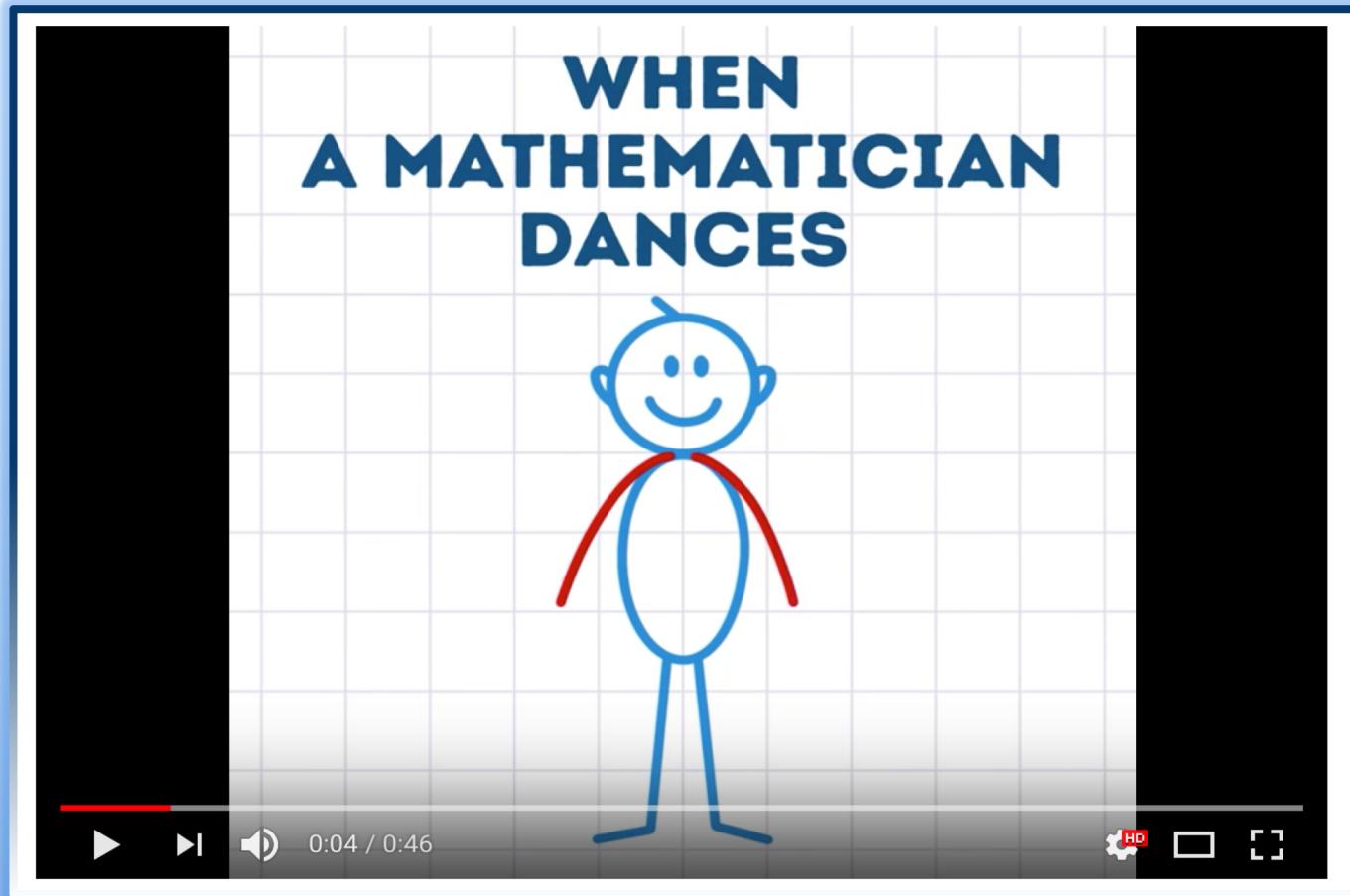
GRAFICI ISOLATI:  NON SONO FUNZIONI O NON CORRISPONDONO AD ALTRI	COPPIE DI GRAFICI: FUNZIONE E SUA DERIVATA					
	y=f(x)	y=f'(x)	y=f(x)	y=f'(x)	y=f(x)	y=f'(x)
	3	34	19	23	73	89
10	19	19	50	40	81	87
22	11	14	4	44	83	76
28	33	18	44	12	103	53
39	7	32	12	45	8	53
57	16	18	13	41	26	53
58	31	32	52	52	6	53
68	60	32	61	62	105	59
69	30	47	51	112	104	106
70	59	29	66	63	27	106
71	25	47	15	43	55	106
82	48	47	2	20	54	114
97	49	34	42	21	17	114
99	29	9	90	91	108	106
100	72	24	96	98	109	106
107	35	5	92	91	79	84
110	36	5	85	77	80	84
113	47	34	74	94	88	84
115	67	24	78	93	56	37
116	65	111	75	101	64	34
117	38	46	86	95	5	34
118	1	19	24	19		
119						
120	TOTALE COPPIE: 61					
	TOTALE GRAFICI ISOLATI: 26					

# Spunti di approfondimento:

- **Costruzione, a partire dal grafico di una funzione, del grafico qualitativo della relativa derivata;**
- **Costruzione, a partire dal grafico di una funzione, del grafico qualitativo di una possibile relativa primitiva;**
- **Attività che consentano di far emergere il ruolo della derivata prima e seconda come legame tra spostamento, velocità e accelerazione (caso più complesso del sistema biella manovella e costruzione della legge di variazione dello spazio percorso dal piede di biella, della relativa velocità ed accelerazione).**



# Una curiosità:



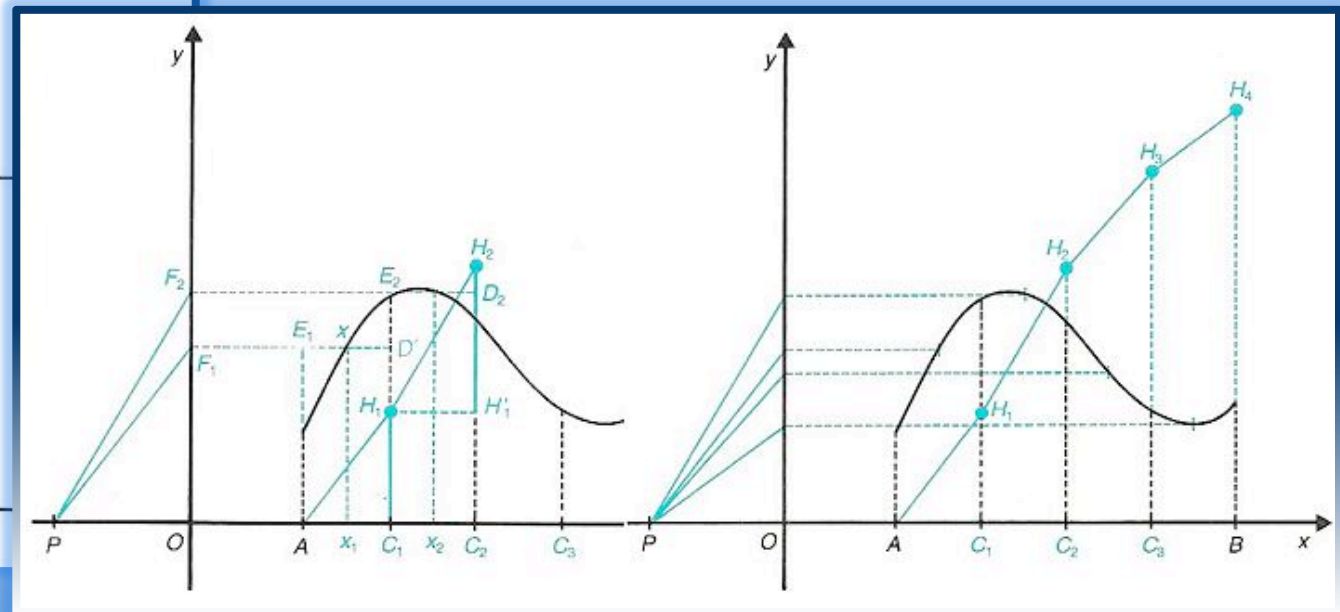
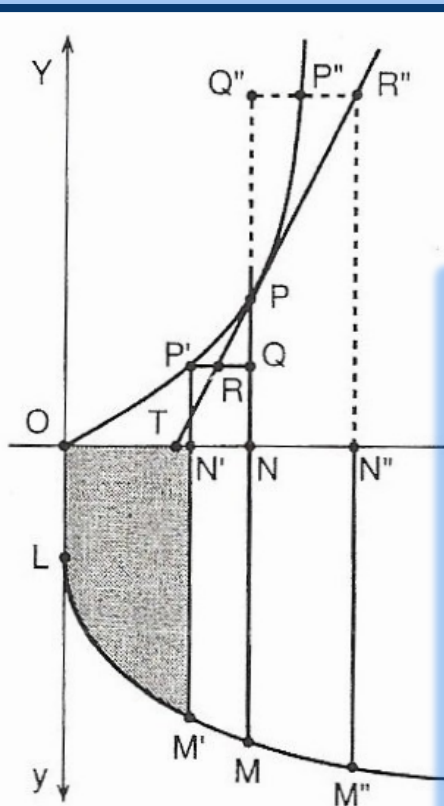
 Link:

<https://www.youtube.com/watch?v=OFzqDatEvCo>

# La scoperta dell'integrale definito!

Un metodo grafico per il calcolo  
approssimato dell'area sottesa da una  
curva

Fonte: Castelnuovo, Gori Giorgi, Valenti,  
"Elementi di Analisi Matematica", La Nuova Italia



# Descrizione del contesto

- ❑ L'intervento può essere preceduto dall'unità didattica relativa agli integrali indefiniti e utilizzato per introdurre gli integrali definiti;
- ❑ L'attività è stata proposta alle classi:
  - 5<sup>^</sup> ITIS (meccanico e elettronico);
  - terza liceo classico.
- ❑ L'attività è basata su una dimostrazione elaborata dal matematico inglese Isaac Barrow nel 1674 (di cui fu allievo Newton).

## Scansione temporale

- ❑ Sono necessarie 4-5 lezioni di un'ora ciascuna;
- ❑ L'attività è suddivisa in tre parti:
  - Prima parte: fonte storica di riferimento;
  - Seconda parte: dimostrazione di Barrow;
  - Terza parte: proposta di prova di verifica.

# Descrizione del contesto

- ❑ L'intervento può essere preceduto dall'unità didattica relativa agli integrali indefiniti e utilizzato per introdurre gli integrali definiti;
- ❑ L'attività è stata proposta alle classi:
  - 5<sup>^</sup> ITIS (meccanico e elettronico);
  - terza liceo classico.
- ❑ L'attività è basata su una dimostrazione elaborata dal matematico inglese Isaac Barrow nel 1674 (di cui fu allievo Newton).

## Scansione temporale

- ❑ Sono necessarie 4-5 lezioni di un'ora ciascuna;
- ❑ L'attività è suddivisa in tre parti:
  - Prima parte: fonte storica di riferimento;
  - Seconda parte: attività laboratoriale;
  - Terza parte: proposta di prova di verifica.

## La fonte storica:

# dimostrazione relativa ad un metodo di calcolo dell'area sottesa ad una curva basato sul legame esistente tra area e retta tangente

### SCHEDA DI APPROFONDIMENTO

Non è sempre possibile calcolare con le formule già note l'area di una determinata figura.

Vediamo ora un metodo di calcolo dell'area *sottesa* ad una curva basato sul legame esistente tra area e retta tangente.

Questo metodo è stato elaborato dal matematico Barrow nel 1674.

Sia data  $y = f(x)$  funzione *crescente*,  $MN = f(ON)$ .

L'asse  $Oy$  è rivolto verso il basso. Si prenda un altro asse  $OY$  rivolto verso l'alto e si prolunghi  $MN$  di un segmento  $NP$  di misura uguale all'area  $OLMN$ . Al variare di  $M$  il punto  $P$  descrive una nuova curva.

Se prendiamo sull'asse  $x$  un segmento  $NT = NP/MN$  la retta  $PT$  sarà tangente in  $P$  alla nuova curva. Infatti:

sia  $N' \neq N$      $ON' < ON$

$PQ = NP - QN = NP - P'N' = \text{Area}(OLMN) - \text{Area}(OLM'N') = \text{Area}(MM'N'N)$

I triangoli  $PQR$  e  $PTN$  sono simili

$PQ : RQ = NP : TN = NP : NP/MN = MN$

$RQ = PQ/MN = \text{Area}(MM'N'N)/MN < MN * NN'/MN = P'Q$

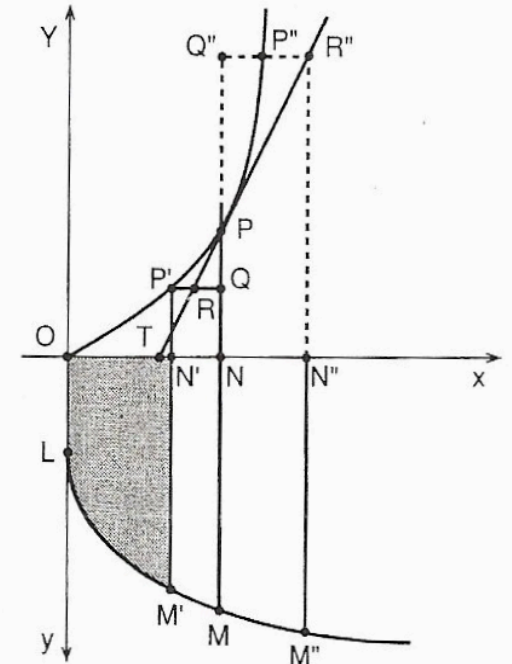
$RQ < P'Q$ ,  $P'$  è a sinistra della retta

$ON'' > ON$

$Q''R'' > Q'P''$ ,  $P''$  a sinistra della retta.

Allora in un intorno di  $P$  la curva sta dalla stessa parte rispetto alla retta  $PT$  e, quindi, quest'ultima è la retta tangente (ricordiamo che Barrow usa l'antica definizione di tangente).

**BIBLIOGRAFIA:** Isaac Barrow, decima delle "Lectiones opticae et geometricae", 1674 (Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli, "Fonti per la storia della Matematica", 1992 Sansoni Editore)



# Obiettivi principali:

- ❑ **Utilizzo di una fonte storica** per l'introduzione teorica ad un metodo di calcolo dell'area sottesa ad una curva basato sul legame esistente tra area e retta tangente;
- ❑ **Comprensione della definizione antica** di retta tangente e confronto con la definizione “intuitiva” e con quella “moderna”.

# Seconda parte

## L'attività laboratoriale:

metodo grafico per calcolare  
in maniera approssimata l'area  
sottesa da una curva.

### □ Aspetti chiave:

- Rielaborazione del metodo di Barrow per ottenere un procedimento grafico che consenta di calcolare l'area sottesa ad una curva.
- Il procedimento grafico si basa su una costruzione che permette di visualizzare l'area di un rettangolo in un riferimento cartesiano.



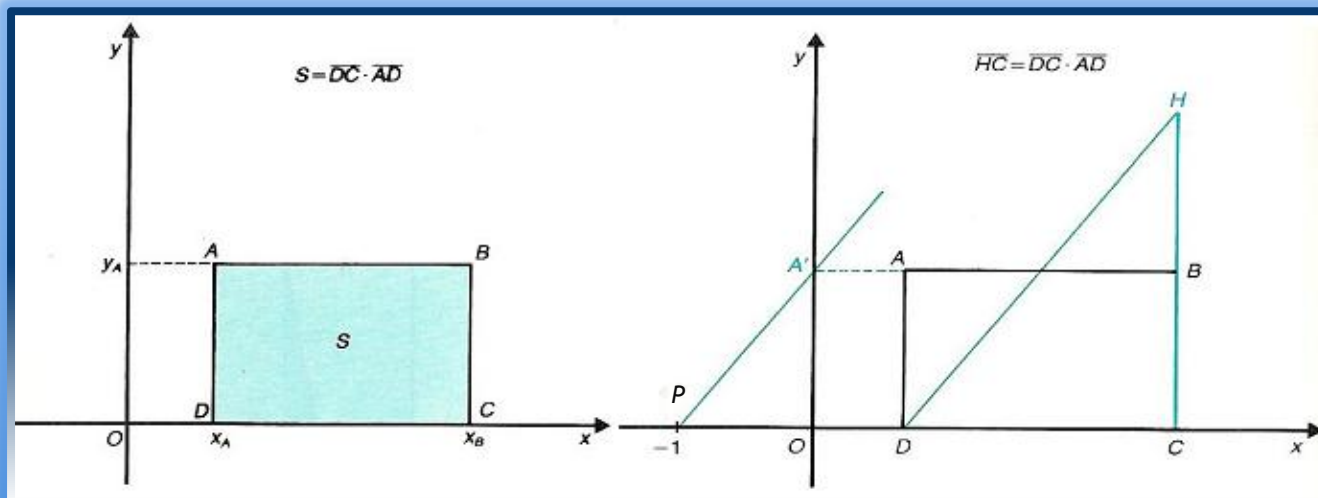
# Procedimento:

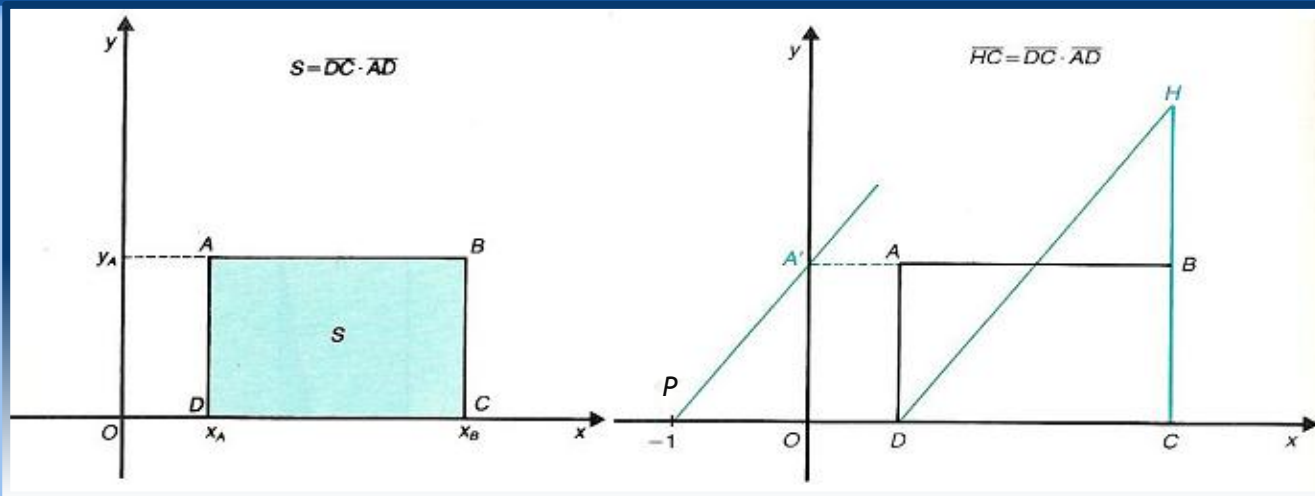
□ Esaminiamo il rettangolo ABCD per determinarne l'area S:

$$S = DC \cdot AD.$$

□ Effettuiamo ora la costruzione seguente:

- Proiettiamo il punto A sull'asse delle y ottenendo il punto A'
- Fissiamo sull'asse delle x il punto P = (-1, 0)
- Tracciamo la retta PA'
- Da D tracciamo la retta parallela a PA', fino ad incontrare in H la retta CB





- Fissiamo l'attenzione sui triangoli simili OPA' e CDH, per cui risulta

$$\frac{\overline{HC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OP}}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\overline{HC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD}}{1}, \quad \text{da cui} \quad \overline{HC} = \overline{DC} \cdot \overline{AD}$$

- Possiamo allora concludere che la lunghezza del segmento HC corrisponde al valore numerico dell'area S.

### Obiettivo:

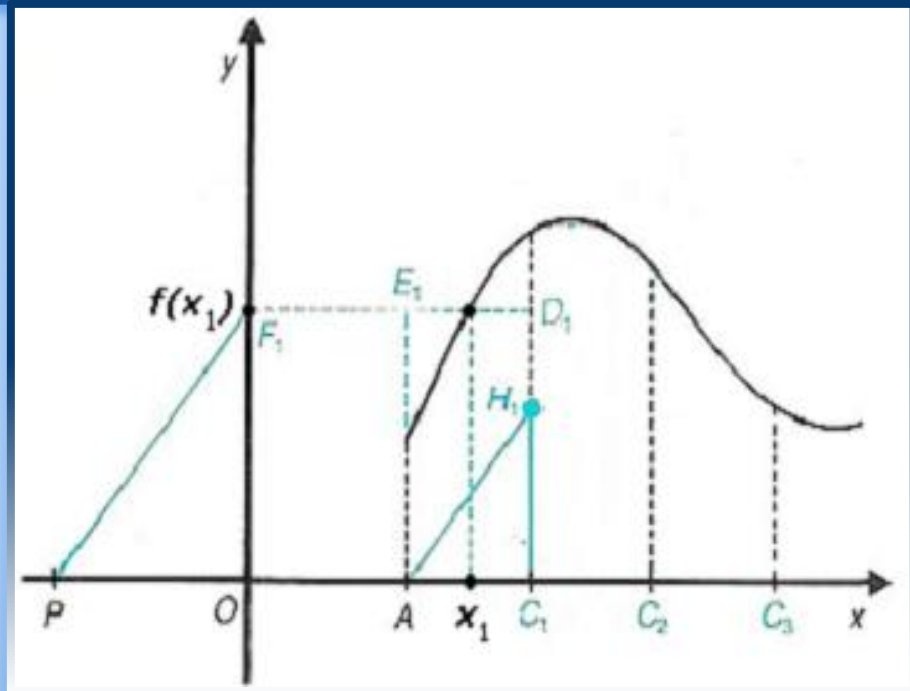
rappresentazione grafica del valore numerico dell'area di un rettangolo attraverso un segmento.

Vediamo ora come questa costruzione permette di approssimare per via grafica l'area  $S$  sottesa ad una funzione  $y = f(x)$  nell'intervallo  $[a,b]$ .

- ❑ Dividiamo l'intervallo  $[a,b]$  in  $n$  parti uguali, tutti di lunghezza pari a

$$h = (b-a)/n$$

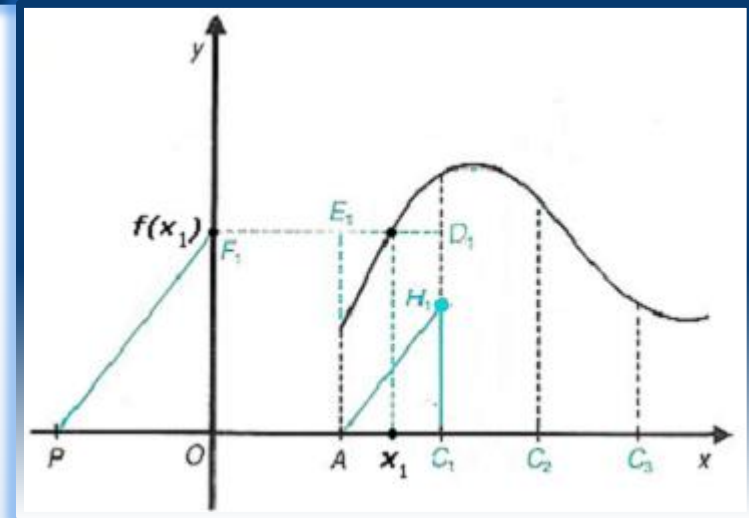
- ❑ Fissiamo sull'asse delle  $x$  il punto  $P = (-1, 0)$
- ❑ Per ogni parte prendiamo un rettangolo che approssimi l'area sotto la curva assumendo come altezza del rettangolo il punto corrispondente al punto di mezzo dell'intervallo



□ Cioè, relativamente al primo intervallo:

- Consideriamo il punto medio  $x_1$
- Disegniamo il rettangolo  $AC_1D_1E_1$  di base  $h$  e altezza  $f(x_1)$
- Proiettiamo  $E_1$  sull'asse  $y$  ottenendo il punto  $F_1$
- Tracciamo la retta  $PF_1$
- Da  $A$  tracciamo la retta parallela a  $PF_1$ , fino ad incontrare  $C_1D_1$  in  $H_1$
- Otteniamo così  $C_1H_1 = h^* f(x_1)$
- Procediamo analogamente per il secondo, il terzo, ... intervallino
- Continuiamo la costruzione fino ad esaurire gli intervalli, ottenendo

$$BH_n = h^* f(x_1) + h^* f(x_2) + h^* f(x_3) + \dots + h^* f(x_n)$$

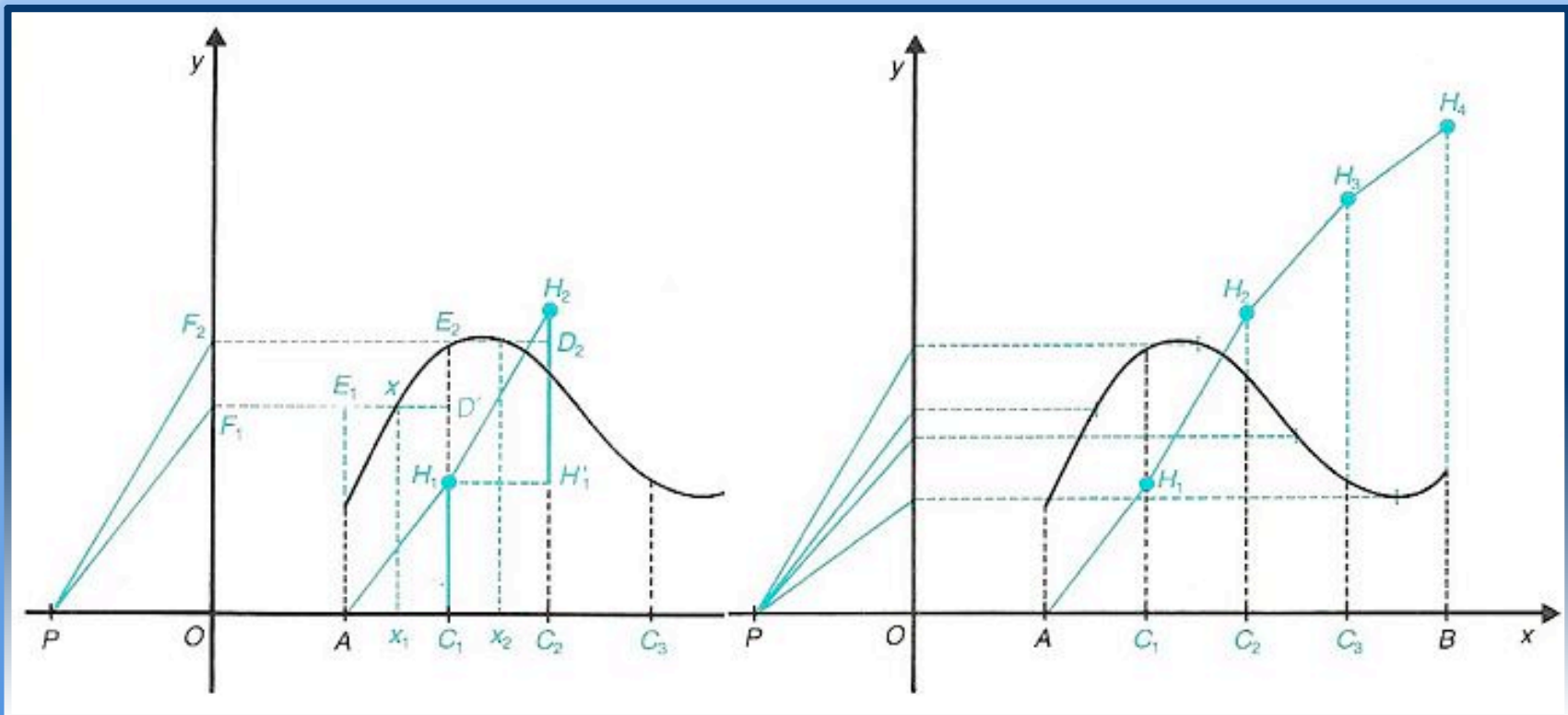


## Obiettivo:

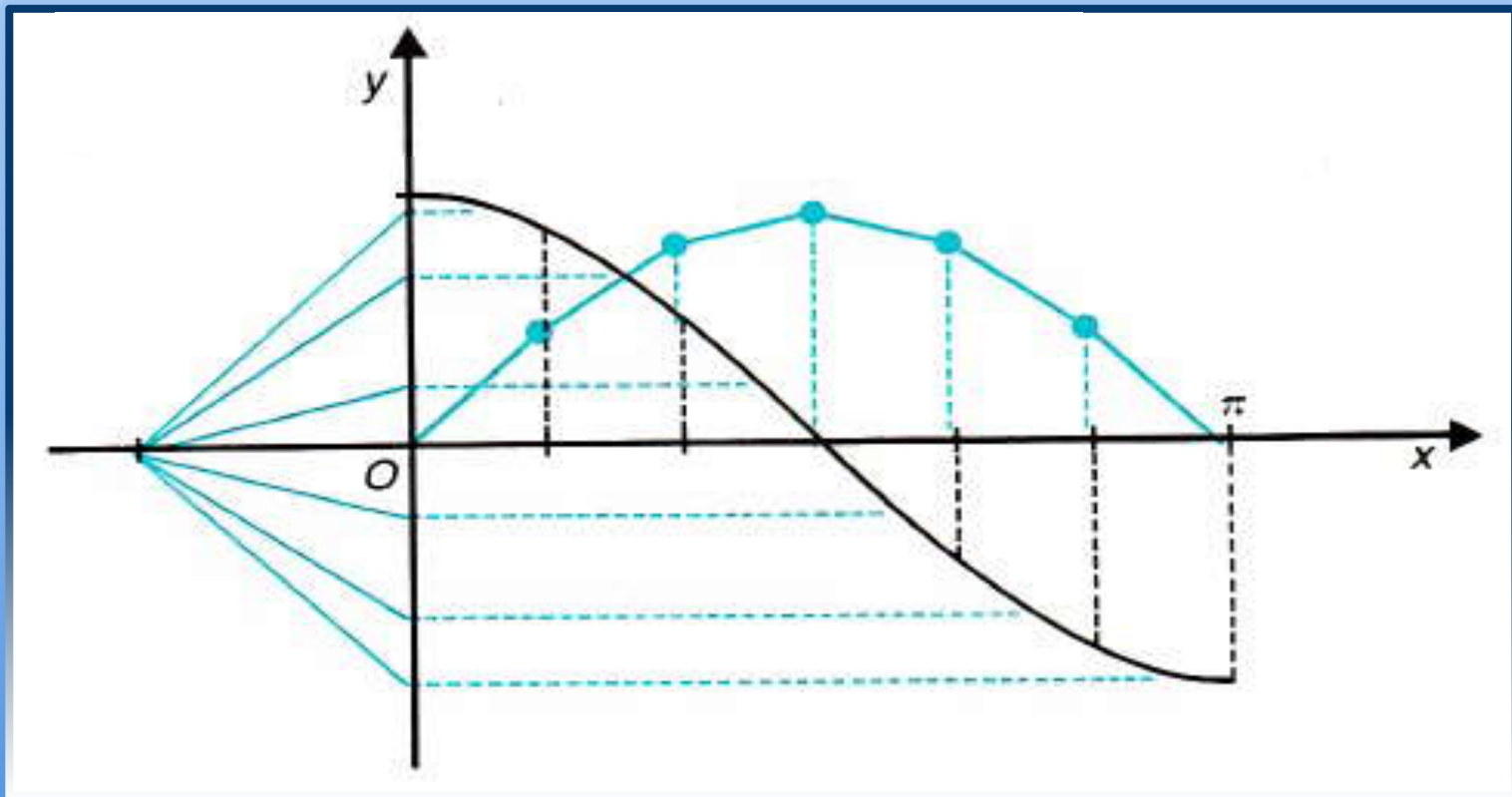
rappresentazione grafica del valore numerico dell'approssimazione dell'area sottesa alla funzione attraverso un segmento.

## Obiettivi:

- ❑ Rappresentazione grafica del valore numerico dell'area sottesa alla funzione come somma di approssimazioni corrispondenti a sottointervalli dell'intervallo di partenza sull'asse  $x$ .
- ❑ Miglioramento dell'approssimazione di  $S$  all'aumentare del numero degli intervallini in cui suddividiamo l'intervallo  $[a,b]$ .



Ma, soprattutto ...  
Scoperta del legame tra area sottesa e  
integrale indefinito!

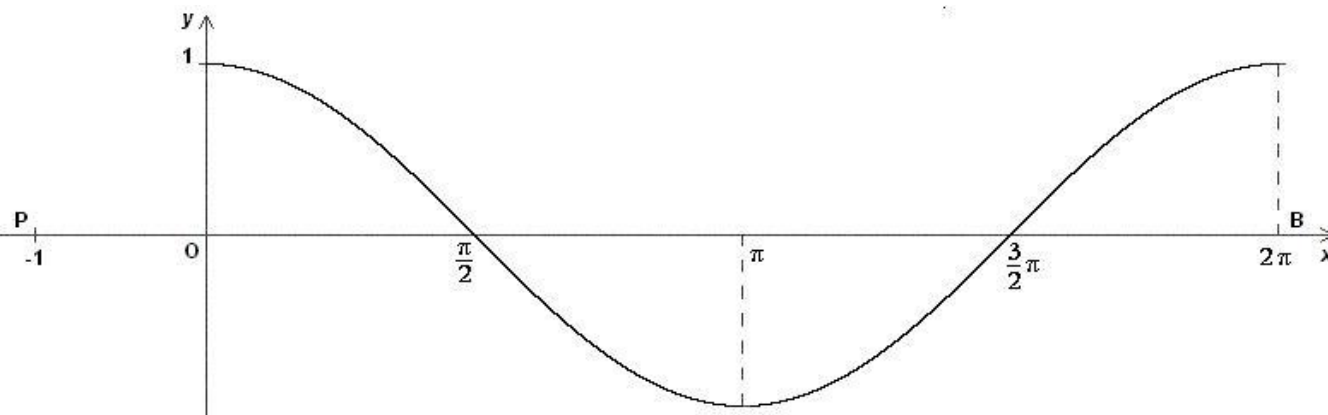


# Terza parte

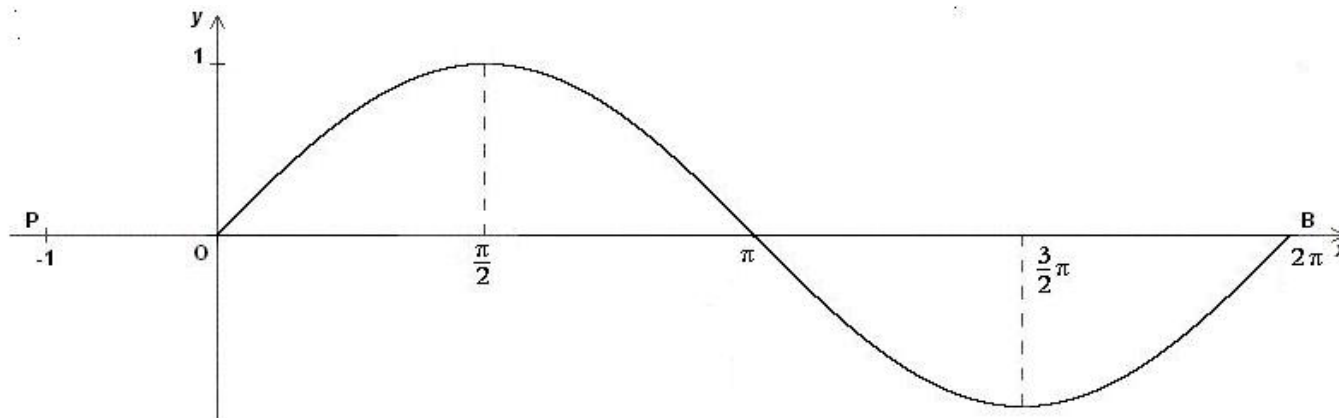
## Proposte per prova di verifica

Considera le seguenti funzioni:

1.  $f(x) = \cos x$   $[0, 2\pi]$



➤  $f(x) = \sin x$   $[0, 2\pi]$





Applica il procedimento da 0 a  $2\pi$  suddividendo l'intervallo in 12 parti uguali e rispondi alle seguenti domande:

- Che curva ottieni?
- Quanto vale l'area sottesa alla funzione  $y = f(x)$  da 0 a  $\pi/2$ ?
- Quanto vale l'area sottesa alla funzione  $y = f(x)$  da 0 a  $\pi$ ?
- Quanto vale l'area sottesa alla funzione  $y = f(x)$  da 0 a  $2\pi$ ?

(1) Perché?

## Obiettivi:

- Calcolo di aree sottese utilizzando la costruzione.**
- Passaggio mentale dalla poligonale alla funzione corrispondente all'aumentare del numero degli intervalli in cui si suddivide l'intervallo.**
- Riconoscimento di funzioni note.**

**Osservazione:** Si può proporre di calcolare l'area sottesa relativamente ad intervalli come, ad esempio,  $[\pi/3, \pi/2]$ ,  $[2\pi, \pi]$ ... (calcolo di aree come differenza di aree note)

# Grazie!



# Bibliografia

- ❑ Don Lorenzo Milani e gli allievi della scuola di Barbiana, “Lettera a una professoressa”, Casa Editrice Fiorentina
- ❑ Massimo Recalcati, “L’ora di lezione. Per un’erotica dell’insegnamento”, Giulio Einaudi Editore
- ❑ Daniel Pennac, “Diario di scuola”, ed. Feltrinelli
- ❑ appunti del corso di Meccanica del prof. Antonio Briatore, I.I.S. “G. Vallauri”, Fossano (CN)
- ❑ “Scienza delle costruzioni”, Odone, Belluzzi, Ed. Zanichelli, 1966
- ❑ Castelnuovo, Gori Giorgi, Valenti, “Elementi di Analisi Matematica”, La Nuova Italia, 1988

# Sitografia

- ❑ <http://matematicandoinsieme.wordpress.com/2013/11/18/emma-castelnuovo-una-vita-al-servizio-della-passione-per-la-matematica/>
- ❑ <http://matematica.unibocconi.it/articoli/emma-castelnuovo-compie-100-anni>
- ❑ [donlorenzomilani.it](http://donlorenzomilani.it) (fondazione Don Lorenzo Milani)
- ❑ [www.massimorecalcati.it](http://www.massimorecalcati.it)
- ❑ <https://tuttoggi.info/sellano-al-castello-postignano-reading-letterario-daniel-pennac/415083/>
- ❑ <http://homes.stat.unipd.it/ventura/>
- ❑ <http://www.carmnap.it/FilePdf/Trave%20%20Appoggiata%20%20con%20carico%20triangolare.pdf>
- ❑ [https://seieditrice.com/progettazione-costruzioni-impianti/files/2012/04/7\\_4\\_3\\_esercizi\\_svolti.pdf](https://seieditrice.com/progettazione-costruzioni-impianti/files/2012/04/7_4_3_esercizi_svolti.pdf)