LESSENZIALE2

Pesaro, 11–13 ottobre 2024

Matematica agonistica: giochi e spunti per l'allenamento

Giacomo Bertolucci

13 ottobre 2024

Principali tipologie di gara della **Matematica Agonistica** in Italia:

- Matematica Olimpica
- Giochi Matematici
- Matematica a Squadre

Principali tipologie di gara della **Matematica Agonistica** in Italia:

- **Matematica Olimpica**
- Giochi Matematici
- Matematica a Squadre

Caratteristiche

- La disciplina più antica, tradizionalmente nata nel 1894
- Diffusa in tutto il mondo: 130+ paesi
- Limite d'età: circa dagli 8 ai 20 anni
- Salendo di livello richiede grande preparazione tecnica ed allenamento

Principali competizioni in Italia

- Olimpiadi Italiane della Matematica
- Kangourou della Matematica
- competizioni locali (Gara Matematica di Firenze, ...)

Principali tipologie di gara della **Matematica Agonistica** in Italia:

- Matematica Olimpica
- **Giochi Matematici**
- Matematica a Squadre

Caratteristiche

- Nella versione diffusa in Italia, nata nel 1987
- Nessun limite massimo d'età
- Dà risalto all'intuito, alla velocità di ragionamento e alla capacità di concentrazione

Principali competizioni in Italia

- Campionati Internazionali di Giochi Matematici
- Campionati Junior
- Gara a Squadre di Giochi Matematici
- Giochi d'Autunno, Giochi di Rosi

Principali tipologie di gara della **Matematica Agonistica** in Italia:

- Matematica Olimpica
- Giochi Matematici
- **Matematica a Squadre**

Caratteristiche

- Nella versione diffusa in Italia, nata nel 2000
- Giocatori tutti iscritti alla stessa scuola, limite d'eta ai 20 anni
- Richiede preparazione tecnica specifica, ma anche tattica e gioco di squadra

Principali competizioni in Italia

- Gara Nazionale a Squadre (Campionati Italiani Assoluti)
- Gara Nazionale Femminile a Squadre (Campionati Italiani Femminili)
- Coppe del circuito Kangourou (Coppa Junior, Coppa Student, Coppa Cadet, ...)
- competizioni locali (Coppa Gauss, Coppa Nash, Disfida, Coppa Marconi, ...)

Se si tratta di punti, rette, circonferenze, allora è
Geometria

Suddivisione tratta da M. Gobbino, *Schede Olimpiche*

Se si tratta di punti, rette, circonferenze, allora è
Geometria

Se si tratta di numeri interi, allora è
Teoria dei Numeri

Suddivisione tratta da M. Gobbino, *Schede Olimpiche*

Se si tratta di punti, rette, circonferenze, allora è

Geometria

Se si tratta di numeri interi, allora è

Teoria dei Numeri

Se si tratta di numeri reali, polinomi, funzioni, allora è

Algebra

Suddivisione tratta da M. Gobbino, *Schede Olimpiche*

Se si tratta di punti, rette, circonferenze, allora è
Geometria

Se si tratta di numeri interi, allora è
Teoria dei Numeri

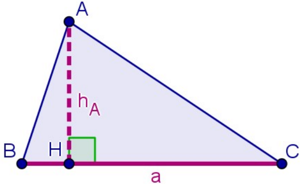
Se si tratta di numeri reali, polinomi, funzioni, allora è
Algebra

Se si tratta di qualcos'altro, allora è
Combinatoria

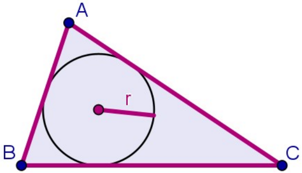
Suddivisione tratta da M. Gobbino, *Schede Olimpiche*

Geometria

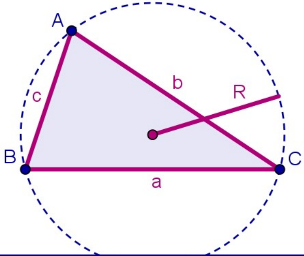
- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$



- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$

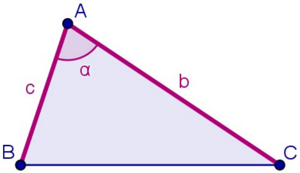


- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$

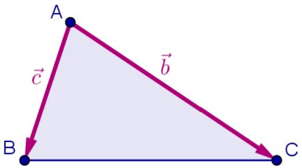


Area di un triangolo

- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$



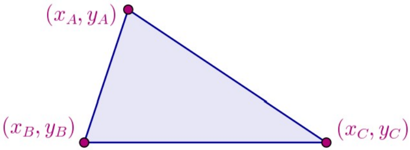
- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$
- $S = \frac{1}{2} \left\| \vec{c} \times \vec{b} \right\|$



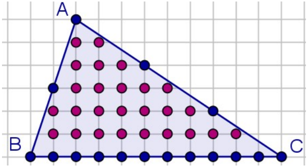
Geometria

Area di un triangolo

- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$
- $S = \frac{1}{2} \left\| \vec{c} \times \vec{b} \right\|$
- $S = \frac{1}{2} \left(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C \right)$



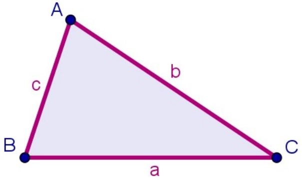
- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$
- $S = \frac{1}{2} \left\| \vec{c} \times \vec{b} \right\|$
- $S = \frac{1}{2} \left(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C \right)$
- $S = I + \frac{P}{2} - 1$



Geometria

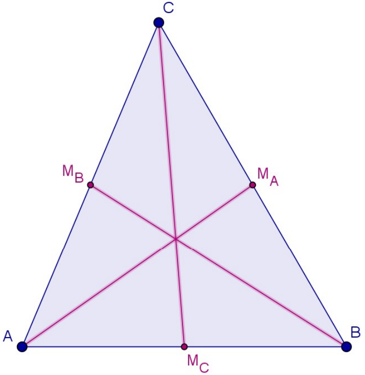
Area di un triangolo

- $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$
- $S = \frac{1}{2} \left\| \vec{c} \times \vec{b} \right\|$
- $S = \frac{1}{2} \left(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C \right)$
- $S = I + \frac{P}{2} - 1$
- $S = \sqrt{p (p-a)(p-b)(p-c)}$



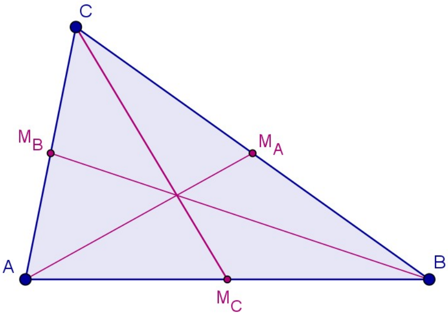
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



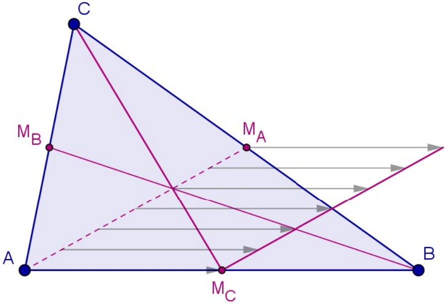
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



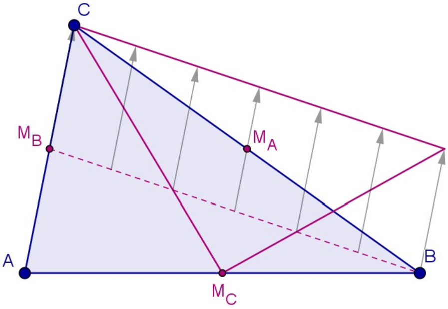
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Lausanne 2022



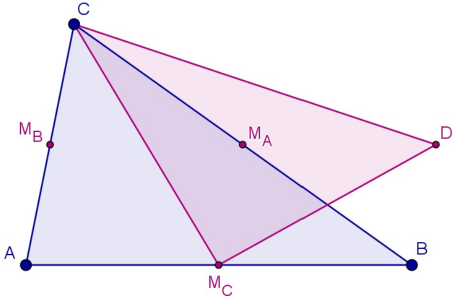
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Lausanne 2022



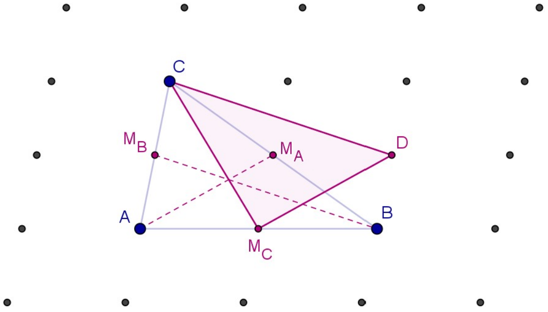
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



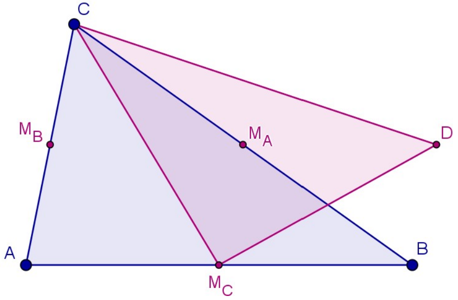
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



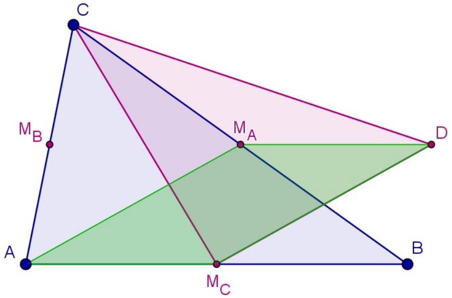
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



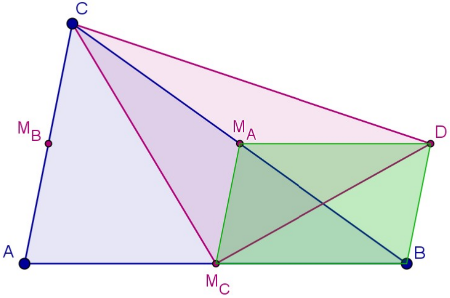
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



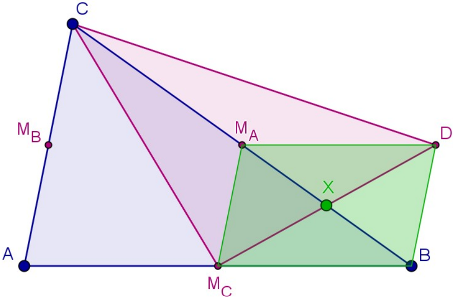
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Lausanne 2022



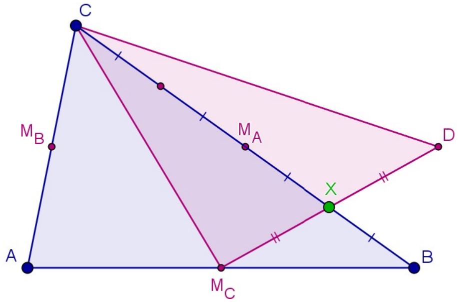
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



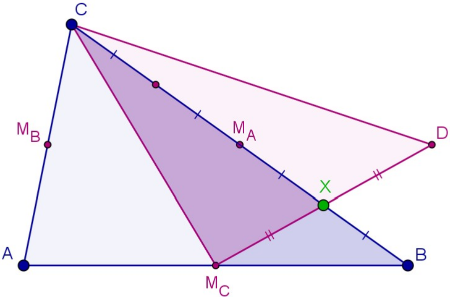
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



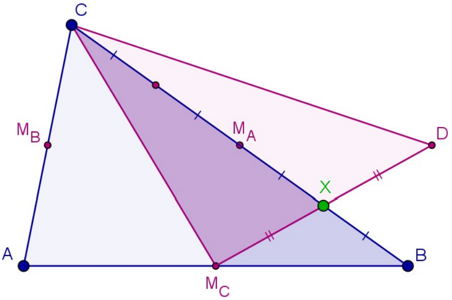
Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



Un triangolo ha le mediane lunghe 13, 14 e 15. Qual è la sua area?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici,
Finale Internazionale Lausanne 2022



$$[ABC] = \frac{4}{3}\,[M_C DC] = \frac{4}{3}\sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 112$$

Difficoltà: media

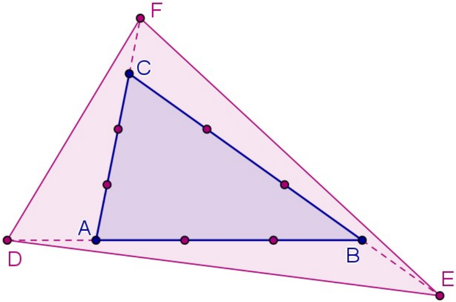
Un triangolo ha le altezze lunghe 110, 132 e 300. Qual è la sua area?

tratto da: Progetto PhiQuadro, III AoL 2016/17

Difficoltà: media

Il punto A si trova a un quarto della distanza tra D e B; il punto B si trova a un quarto della distanza tra E e C; il punto C si trova a un quarto della distanza tra F e A. L'area di ABC è 2024. Qual è l'area di DEF?

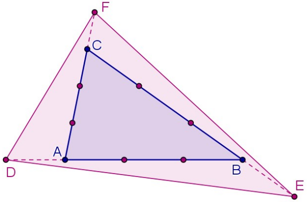
tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Paris 2024



Difficoltà: media

Il punto A si trova a un quarto della distanza tra D e B; il punto B si trova a un quarto della distanza tra E e C; il punto C si trova a un quarto della distanza tra F e A. L'area di ABC è 2024. Qual è l'area di DEF?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Paris 2024



Hint: risolvere prima il problema che si ottiene sostituendo "a un quarto della distanza" con "a metà della distanza".

Teoria dei Numeri

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$\begin{array}{cccccccccc} 1_3 & 10_3 & 11_3 & 100_3 & 101_3 & 110_3 & 111_3 & 1000_3 & 1001_3 & \dots \\ 1_{10} & 3_{10} & 4_{10} & 9_{10} & 10_{10} & 12_{10} & 13_{10} & 27_{10} & 28_{10} & \dots \end{array}$$

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ 1000,\ 1001,\ \dots$$

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$\begin{array}{cccccccccc} 1_2 & 10_2 & 11_2 & 100_2 & 101_2 & 110_2 & 111_2 & 1000_2 & 1001_2 & \dots \\ 1_{10} & 2_{10} & 3_{10} & 4_{10} & 5_{10} & 6_{10} & 7_{10} & 8_{10} & 9_{10} & \dots \end{array}$$

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$2024_{10} = 11111101000_2$$

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$2024_{10} = 11111101000_2$$

$$\mathbf{11111101000}$$

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 3 non contiene la cifra 2?

$$2024_{10} = 11111101000_2$$

$$11111101000_3 = 88479_{10}$$

Difficoltà: medio-facile

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 6 non contiene le cifre 1 e 3?

Difficoltà: medio-facile

Qual è il 2024-esimo numero intero positivo la cui scrittura in base 6 non contiene le cifre 1 e 3?

Difficoltà: medio-facile

Qual è il 2023-esimo numero intero positivo che (in base 10) si scrive utilizzando solo le cifre 3 e 7?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Internazionale Wrocław 2023

Algebra

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x + 2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

$$q(x) = 5x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 5$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$?

$$q(x) = 5x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 5$$

$$\begin{aligned} q(1) &= 5 \cdot 1^8 + 2 \cdot 1^7 - 3 \cdot 1^6 - 4 \cdot 1^5 + 6 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 5 = \\ &= 5 + 2 - 3 - 4 + 6 - 3 - 2 + 7 + 5 = 13. \end{aligned}$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$

$$\boldsymbol{p(1) = \left(1^2 - 2\right)^{2024} \cdot (1+2)^5 = 1^{2024} \cdot 3^5 = 243}$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$?

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 \mathbf{-3}x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 \mathbf{-2}x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$q(1) = 5 \cdot 1^8 + 2 \cdot 1^7 - 3 \cdot 1^6 - 4 \cdot 1^5 + 6 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + \\ + 7 \cdot 1 + 5$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 \mathbf{-3}x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 \mathbf{-2}x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$q(1) = 5 \cdot 1^8 + 2 \cdot 1^7 - 3 \cdot 1^6 - 4 \cdot 1^5 + 6 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + \\ + 7 \cdot 1 + 5$$

$$q(-1) = 5 \cdot (-1)^8 + 2 \cdot (-1)^7 - 3 \cdot (-1)^6 - 4 \cdot (-1)^5 + 6 \cdot (-1)^4 + \\ - 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot 1 + 5$$

Algebra

Somme di coefficienti di un polinomio

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 \mathbf{-3}x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 \mathbf{-2}x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$q(1) = 5 + 2 - 3 - 4 + 6 - 3 - 2 + 7 + 5$$
$$q(-1) = 5 - 2 - 3 + 4 + 6 + 3 - 2 - 7 + 5$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 \mathbf{-3}x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 \mathbf{-2}x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$\begin{aligned} q(1) &= 5 + 2 - 3 - 4 + 6 - 3 - 2 + 7 + 5 \\ q(-1) &= 5 - 2 - 3 + 4 + 6 + 3 - 2 - 7 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(1) + q(-1) &= 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = \\ &= 2\,(5 - 3 + 6 - 2 + 5) \end{aligned}$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$? $\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2}}$

$$\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2} = \frac{3^5+1}{2} = 122}$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$? $\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2}}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado multiplo di 4 di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$q(1) = 5 + 2 - 3 - 4 + 6 - 3 - 2 + 7 + 5$$
$$q(-1) = 5 - 2 - 3 + 4 + 6 + 3 - 2 - 7 + 5$$

Sia $p(x) = \left(x^2-2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$? $\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2}}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado multiplo di 4 di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$\begin{aligned} q(1) &= 5+2-3-4+6-3-2+7+5 \\ q(-1) &= 5-2-3+4+6+3-2-7+5 \\ q(i) &= 5-2i+3-4i+6+3i+2+7i+5 \\ q(-i) &= 5+2i+3+4i+6-3i+2-7i+5 \end{aligned}$$

Sia $p(x) = \left(x^2-2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$? $\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2}}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado multiplo di 4 di $p(x)$?

$$q(x) = \mathbf{5}x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + \mathbf{6}x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + \mathbf{5}$$

$$\begin{aligned} q(1) &= 5+2-3-4+6-3-2+7+5 \\ q(-1) &= 5-2-3+4+6+3-2-7+5 \\ q(i) &= 5-2i+3-4i+6+3i+2+7i+5 \\ q(-i) &= 5+2i+3+4i+6-3i+2-7i+5 \end{aligned}$$

$$q(1)+q(-1)+q(i)+q(-i) = 4\cdot 5 + 4\cdot 6 + 4\cdot 5 = 4\cdot(5+6+5)$$

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti di $p(x)$? $\boldsymbol{p(1)}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado pari di $p(x)$? $\boldsymbol{\frac{p(1)+p(-1)}{2}}$
Qual è la somma dei coeff. dei termini di grado multiplo di 4 di $p(x)$?

$$\frac{p(1)+p(-1)+p(i)+p(-i)}{4} =$$

$$= \frac{3^5 + 1 + 3^{2024}(i+2)^5 + 3^{2024}(-i+2)^5}{4} = 61 - 19 \cdot 3^{2024}$$

Difficoltà: medio-facile

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti dei termini di $p(x)$ il cui grado dà resto 3 nella divisione per 4?

Difficoltà: medio-facile

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti dei termini di $p(x)$ il cui grado dà resto 3 nella divisione per 4?

Difficoltà: medio-difficile

Sia $p(x) = x^5(x-1)^8(2x+1)^{11}$.
Qual è la somma dei coefficienti dei termini di grado multiplo di 3 di $p(x)$?

Difficoltà: medio-facile

Sia $p(x) = \left(x^2 - 2\right)^{2024} \cdot (x+2)^5$.
Qual è la somma dei coefficienti dei termini di $p(x)$ il cui grado dà resto 3 nella divisione per 4?

Difficoltà: medio-difficile

Sia $p(x) = x^5(x-1)^8(2x+1)^{11}$.
Qual è la somma dei coefficienti dei termini di grado multiplo di 3 di $p(x)$?

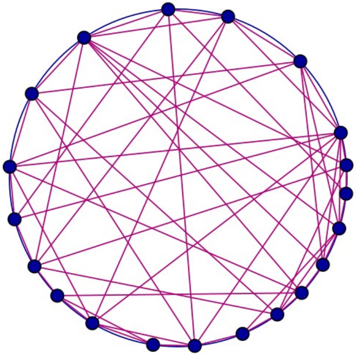
Difficoltà: medio-facile

Quanto vale $\binom{2024}{0} + \binom{2024}{4} + \binom{2024}{8} + \binom{2024}{12} + \ldots + \binom{2024}{2020} + \binom{2024}{2024}$?

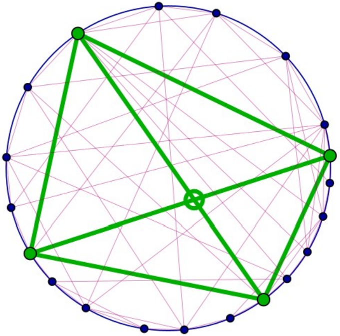
(La risposta è della forma $2^a + 2^b$ per qualche a, b interi)

Combinatoria

Prendiamo 20 punti distinti su una circonferenza, e tracciamo tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Quanti sono al massimo i punti di intersezione delle corde tracciate?



Prendiamo 20 punti distinti su una circonferenza, e tracciamo tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Quanti sono al massimo i punti di intersezione delle corde tracciate?



Prendiamo 20 punti distinti su una circonferenza, e tracciamo tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Quanti sono al massimo i punti di intersezione delle corde tracciate?

$$\binom{20}{4}$$

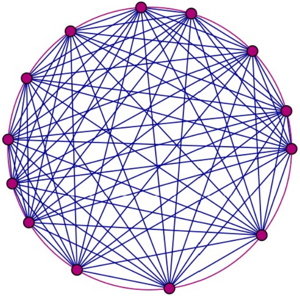
Prendiamo 20 punti distinti su una circonferenza, e tracciamo tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Quanti sono al massimo i punti di intersezione delle corde tracciate?

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845$$

Difficoltà: medio-facile

Nella figura sotto abbiamo preso 13 punti distinti su una circonferenza e abbiamo tracciato tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Da nessun punto interno alla circonferenza passano più di due corde. Quanti triangoli si possono vedere all'interno della circonferenza?

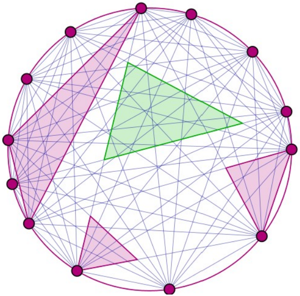
tratto da: Campionati Italiani Assoluti di Matematica a Squadre, Qualificazioni 2007



Difficoltà: medio-facile

Nella figura sotto abbiamo preso 13 punti distinti su una circonferenza e abbiamo tracciato tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Da nessun punto interno alla circonferenza passano più di due corde. Quanti triangoli si possono vedere all'interno della circonferenza?

tratto da: Campionati Italiani Assoluti di Matematica a Squadre, Qualificazioni 2007



Difficoltà: medio-facile

Nella figura sotto abbiamo preso 13 punti distinti su una circonferenza e abbiamo tracciato tutte le corde che hanno due di questi punti come estremi. Da nessun punto interno alla circonferenza passano più di due corde. Quanti triangoli si possono vedere all'interno della circonferenza?

tratto da: Campionati Italiani Assoluti di Matematica a Squadre, Qualificazioni 2007

Difficoltà: media

Quale sarebbe la risposta al problema precedente se considerassimo anche i triangoli che hanno uno o più vertici sulla circonferenza?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Nazionale 2023

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

$$n = d_4 + d_6 + d_8 + d_{12} + d_{20}$$

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

$$n = (d_4 + d_6 + d_{12} + d_{20}) + d_8$$

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

$$n = \underbrace{(d_4 + d_6 + d_{12} + d_{20})}_{k} + d_8$$

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

$$n = \underbrace{(d_4 + d_6 + d_{12} + d_{20})}_{k} + d_8$$

$$n \in \{k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6, k+7, k+8\}$$

Abbiamo a disposizione un dado regolare a 4 facce, uno a 6 facce, uno a 8 facce, uno a 12 facce ed uno a 20 facce. Ciascun dado è numerato con numeri interi distinti consecutivi, da 1 fino al numero delle sue facce. Lanciando tutti e cinque i dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia multipla di 8?

$$\frac{1}{8}$$

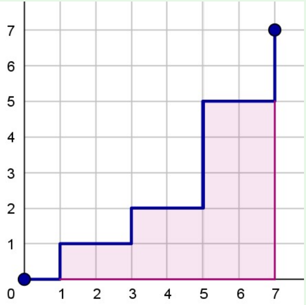
Difficoltà: facile

Quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 7050 tali che la somma delle loro cifre è divisibile per 7?

tratto da: Campionati Italiani Assoluti di Matematica a Squadre, Finale 2012

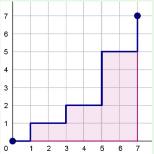
Difficoltà: difficile

Un *percorso minimo* da $(0,0)$ ad (a,b) è un percorso costituito solamente da passi lunghi 1 verso destra oppure verso l'alto. Chiamiamo *sottoarea* di un percorso minimo l'area della zona compresa tra il percorso e l'asse x. Ad esempio, in questa figura è indicato un percorso minimo da $(0,0)$ a $(7,7)$ con sottoarea 16:



Difficoltà: difficile

Un *percorso minimo* da $(0,0)$ ad (a,b) è un percorso costituito solamente da passi lunghi 1 verso destra oppure verso l'alto. Chiamiamo *sottoarea* di un percorso minimo l'area della zona compresa tra il percorso e l'asse x. Ad esempio, in questa figura è indicato un percorso minimo da $(0,0)$ a $(7,7)$ con sottoarea 16:



Quanti sono i perc. minimi da $(0,0)$ a $(3,4)$ con sottoarea multipla di 7?
Quanti sono i perc. minimi da $(0,0)$ a $(7,7)$ con sottoarea multipla di 7?
Quanti sono i perc. minimi da $(0,0)$ a $(14,7)$ con sottoarea multipla di 7?

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

$$24x + 13y = n$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

$$ax + by = n, \quad a, b \text{ coprimi}$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

$$ax + by = n, \quad a, b \text{ coprimi}$$

1. Il più grande n per cui non esistono soluzioni naturali è $ab - a - b$.

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

$$ax + by = n, \quad a, b \text{ coprimi}$$

1. Il più grande n per cui non esistono soluzioni naturali è $ab - a - b$.
2. Esattamente la metà dei valori di n tra 0 e $ab - a - b$ non ammettono soluzioni naturali.

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

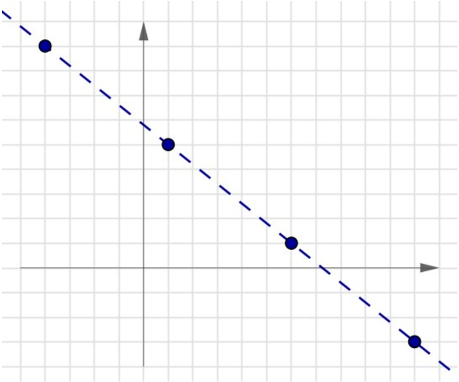
$$ax + by = n, \quad a, b \text{ coprimi}$$

1. Il più grande n per cui non esistono soluzioni naturali è $ab - a - b$.
2. Esattamente la metà dei valori di n tra 0 e $ab - a - b$ non ammettono soluzioni naturali.
3. I valori di n tra 0 e $ab - a - b$ che ammettono soluzioni naturali sono simmetrici rispetto a quelli che non ne ammettono: se $n + m = ab - a - b$, allora esattamente una tra $ax + by = n$ e $ax + by = m$ ammette soluzioni naturali.

Se abbiamo a disposizione solo monete da 24 e da 13 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

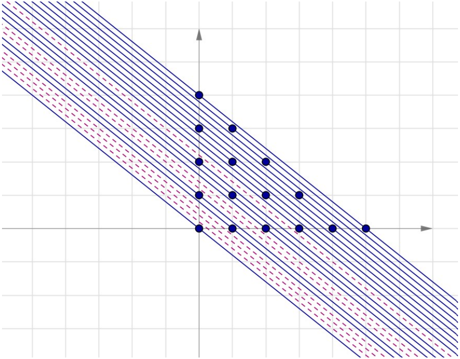
$$\frac{24 \cdot 13 - 24 - 13 + 1}{2} = 138$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{b}$ euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?



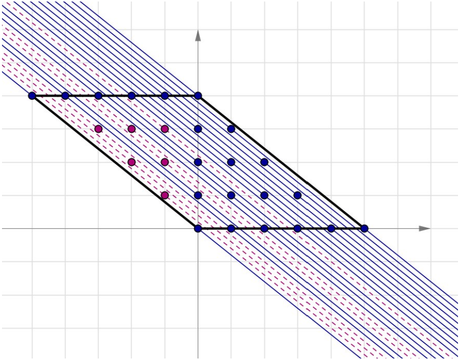
$$4x + 5y = 29$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{b}$ euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?



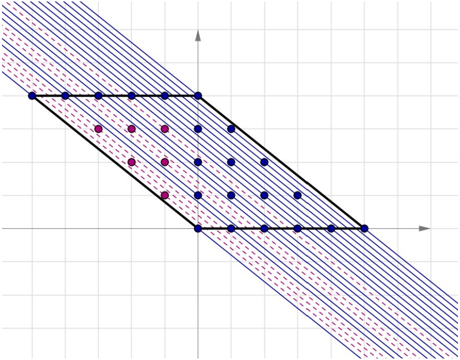
$$4x + 5y = n$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da a e da b euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?



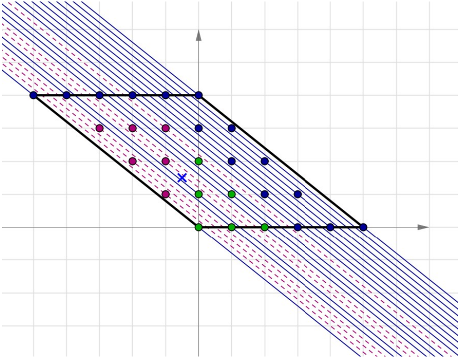
$$4x + 5y = n$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{b}$ euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?



$$S = I + \frac{P}{2} - 1 \longrightarrow \frac{ab}{2} = I + \frac{a+b+1}{2} - 1 \longrightarrow I = \frac{ab-b-a+1}{2}$$

Se abbiamo a disposizione solo monete da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{b}$ euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?



$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{a-1}{2}\right)$$

Difficoltà: media

Se abbiamo a disposizione solo monete da 13, da 24 e da 31 euro, quanti importi non possiamo pagare senza ricevere il resto?

tratto da: Campionati Internazionali di Giochi Matematici, Finale Nazionale 2019

Grazie per l'attenzione

Link a questa presentazione