L'appello evangelico di R. May del 1976: insegnare il caos deterministico con carta, matita e calcolatrice

Titolo breve: **Il caos a scuola**

Gian Italo Bischi
Università di Urbino

gian.bischi@uniurb.it
https://www.mdef.it/gian-italo-bischi/

Lessenziale2, Pesaro 13 ottobre 2024

Sir Robert M. May
(1936-2020)

Nature Vol. 261 June 10 1976

review article

Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

*King's College Research Centre, Cambridge CB2 1ST; on leave from Biology Department, Princeton University, Princeton 08540.

Evangelic plea

"*Appello evangelico per l'introduzione di queste equazioni alle differenze semplici in corsi elementari di matematica, cosicchè l'intuizione degli studenti possa essere arricchita vedendo le cose bizzarre che succedono con semplici equazioni non lineari.* [...]".

"*Io vorrei sollecitare che sia presentata [l'equazione logistica] presto nell'educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non richieda un corso elementare di matematica.*

Tale studio potrebbe in generale arricchire l'intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche."

Tien-Yien Li; James A. Yorke **Period Three Implies Chaos**

The American Mathematical Monthly (Dec., 1975)

Caos Deterministico: un ossimoro

deterministico : regolare, prevedibile

fenomeni ordinati e pianificabili

caos : assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità.

Il concetto di caos deterministico spezza questa dicotomia:

Alcuni modelli matematici *deterministici* possono generare andamenti quasi indistinguibili da processi aleatori, ed estremamente sensibili a piccole perturbazioni

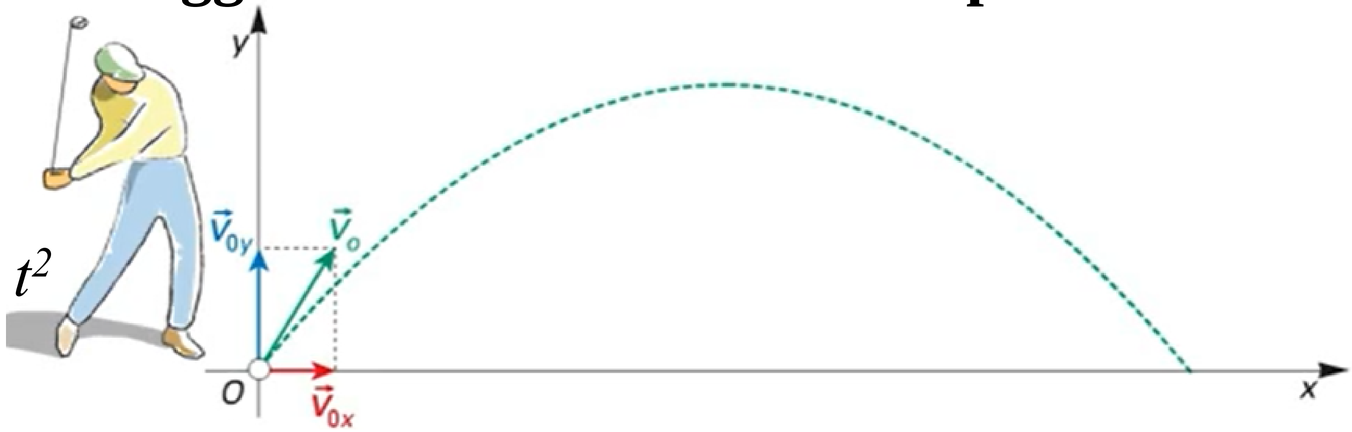
1500	Colombo
1600	Galileo
	Newton
1700	
	Laplace
1800	Positivismo
1900	Poincaré
1920	Lyapunov, Birkhoff, Andronov, Pontrjagin
1940	
	Whitney, Mother, Thom, Arnold
1950	
1963	Lorenz
1975	Li-Yorke
1976	May
1982/83	Puppi
2004	Sulle Orme del caos (Bischi, Carini, Gardini, Tenti)
2024	Lessenziale2
2025	Nuova edizione Orme del Caos

Fenomeni governati da leggi matematiche = fenomeni prevedibili

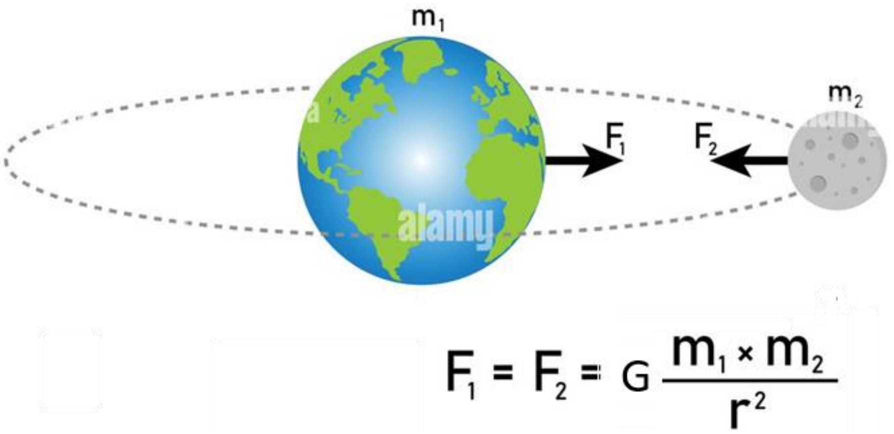
- Moto di un grave

$x(t) = x_0 + v_{0x}t$

$y(t) = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$



- Moto dei pianeti (e dei satelliti artificiali)



- Moto di un pendolo, eclissi, onde, galassie, elettroni, buchi neri
- *Biologia e scienze sociali (ecologia, economia, decisioni…)*

Vediamo allora che ogni cosa procede in modo matematico - cioè infallibilmente - nel mondo intero, in modo che se qualcuno avesse una sufficiente capacità di conoscere a fondo le cose, e avesse abbastanza intelligenza e memoria per considerare tutte le circostanze e tenerne conto, questi potrebbe essere un profeta e potrebbe vedere il futuro nel presente come in uno specchio

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646 -1716

"Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro"

Pierre-Simon Laplace
1749-1827

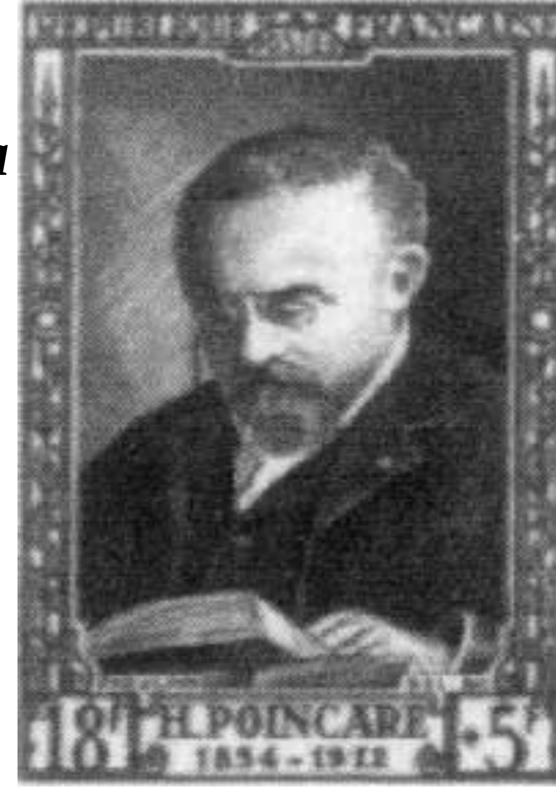
Poincaré e il re

Henri Poincaré (1854-1912)

Re Oscar II di Svezia (1829-1907)

Weierstrass: "Questo lavoro non si può considerare la soluzione del problema proposto, tuttavia è di tale importanza che la sua pubblicazione inaugurerà una nuova era nella storia della meccanica celeste."

Henry Poincaré (1903)



Henry Poincaré, 1854-1912

Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un instante successivo.

Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente.

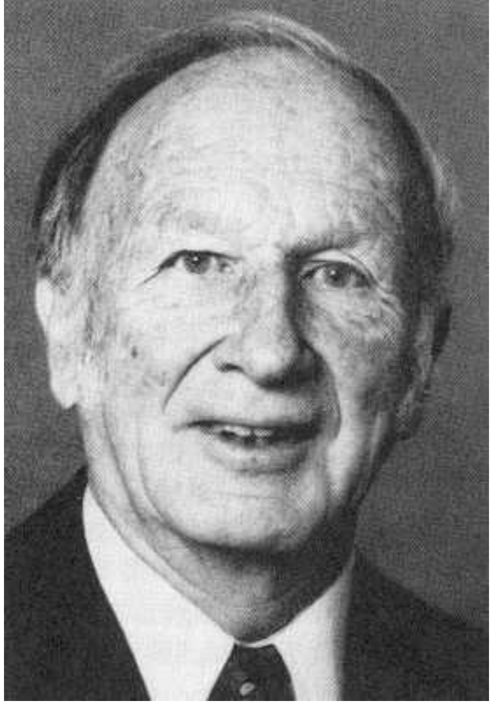
Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto.

Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali..

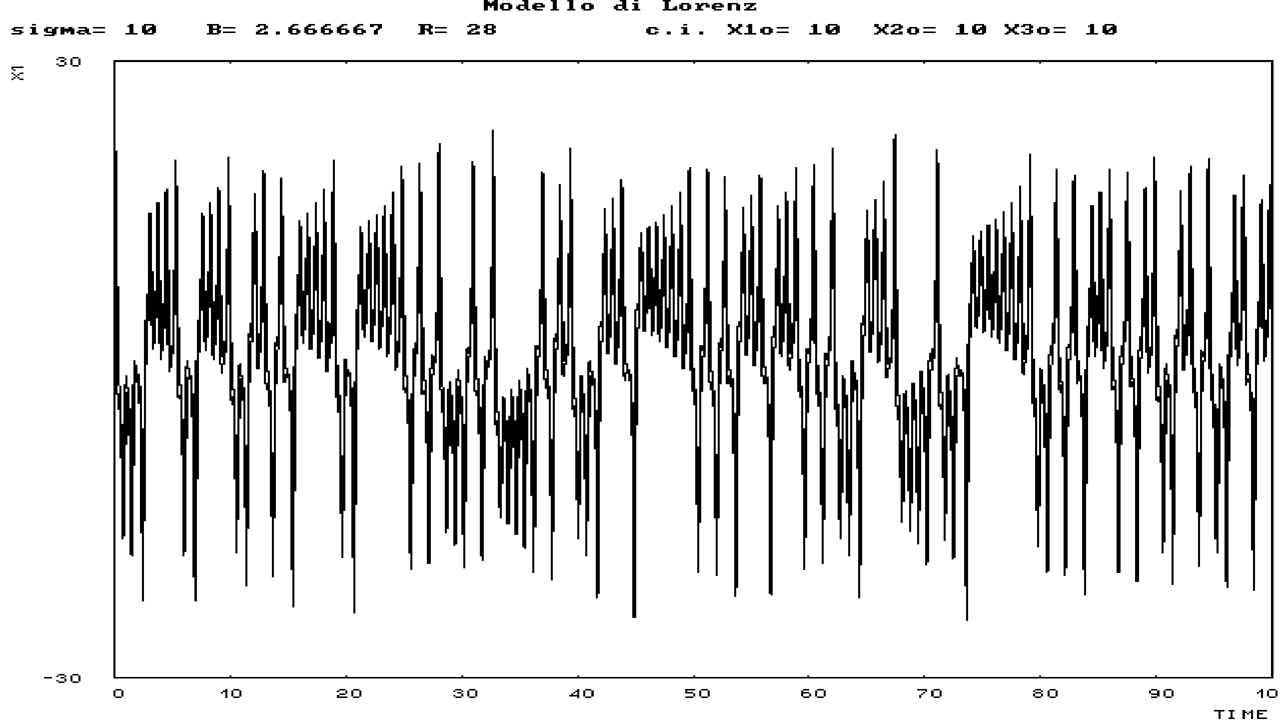
Da "Il mistero di Marie Rogêt",

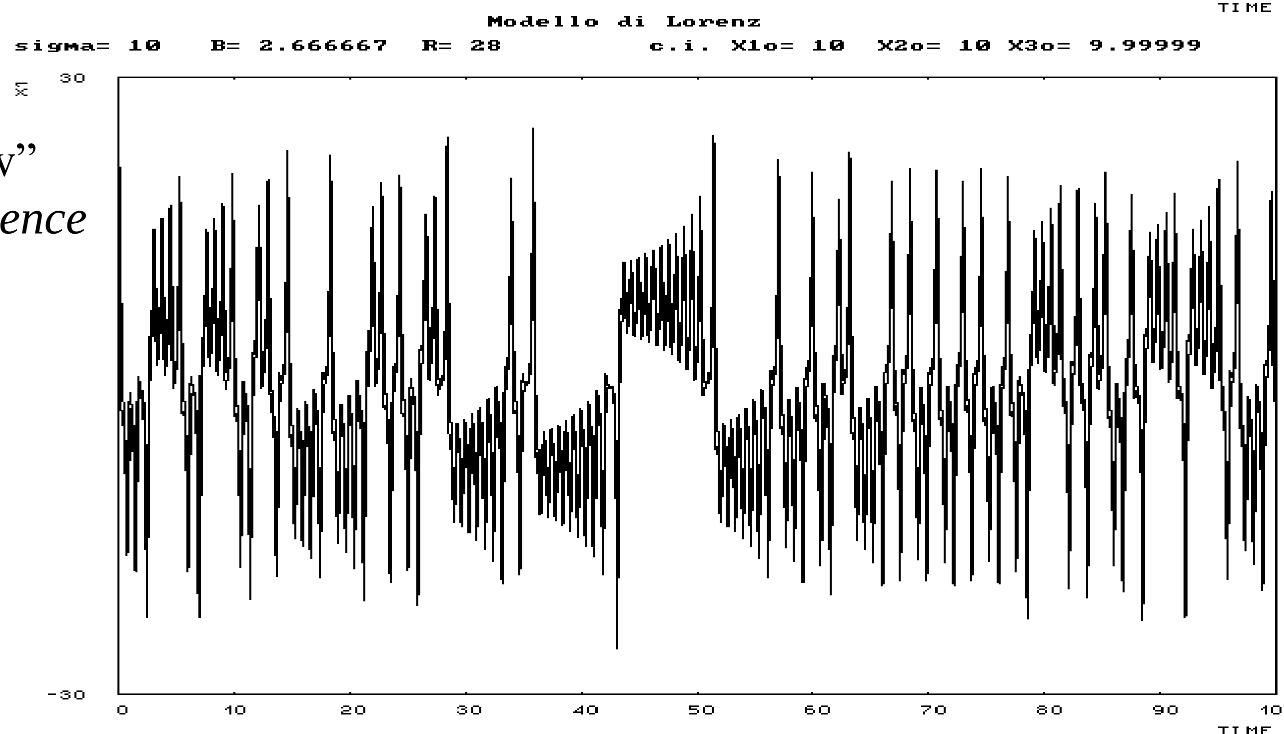
Edgar Allan Poe, 1842.

Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti; proprio come in aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero.



Edward Lorenz
(May 23, 1917–April 16, 2008)





"Deterministic nonperiodic flow"
The Journal of Atmospheric Science
1963

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$

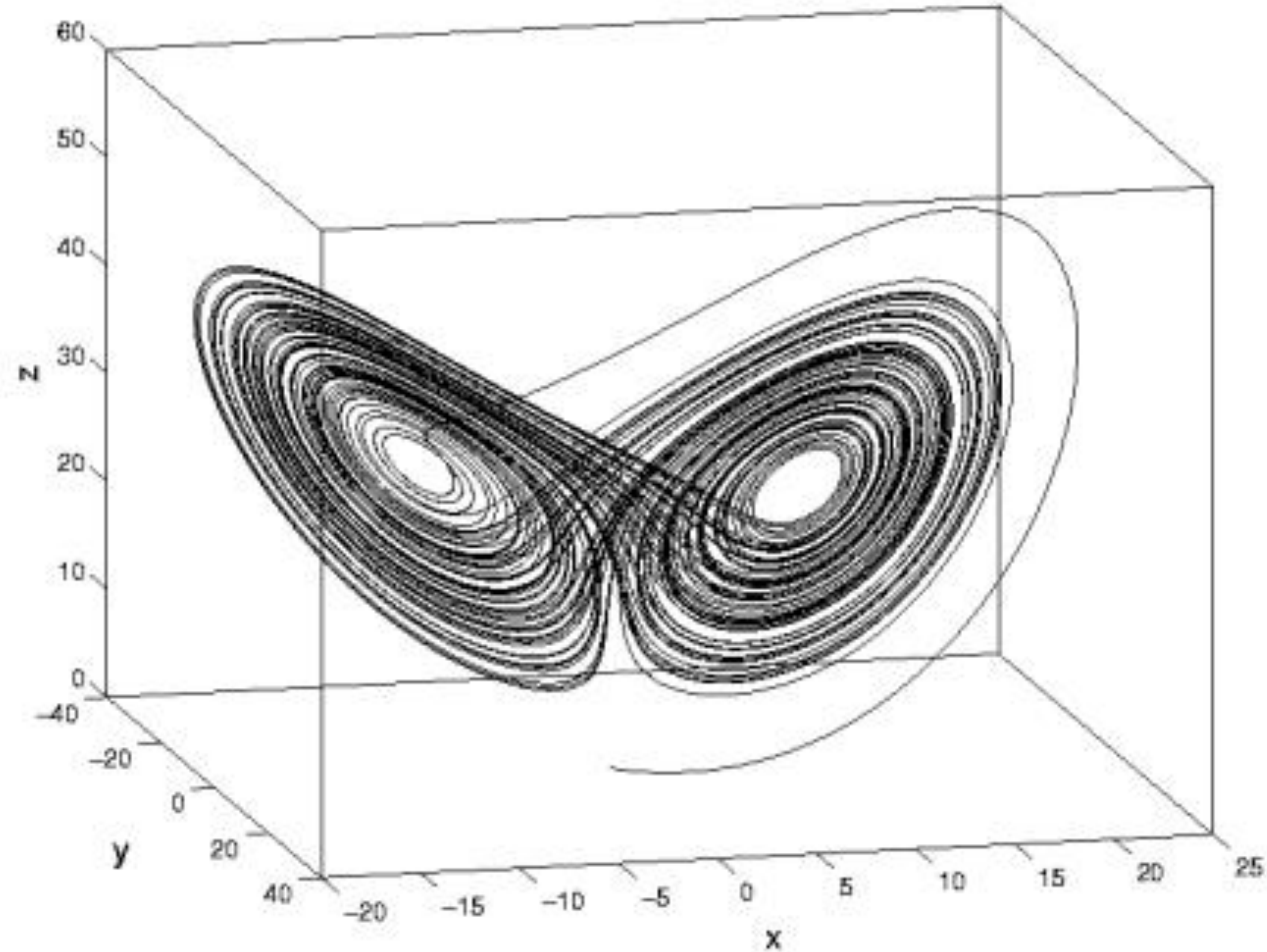
$$\frac{dz}{dt} = -Bz + xy$$

Relazione di Edward Lorenz al Meeting of the American Association for the Advancement of Science, 1972.
"Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

Ray Bradbury (1952) "A Sound of Thunder", racconto sui viaggi nel tempo
Eckels si sentì cadere su una sedia. Tastò, con frenesia lo spesso strato di fango sui suoi stivali. Sollevò un grumo di terra, tremante. «No, non può essere, una piccola cosa così. No!»
Incassata nel fango, luccicante di verde, oro e nero, c'era una farfalla, molto bella e molto morta. Una piccola e squisita creatura in grado di sconvolgere equilibri e di far cadere una fila di piccole tavolette del domino, e poi di grandi tavolette, e poi gigantesche tavolette del domino, per tutti gli anni attraverso il Tempo. La mente di Eckels vorticò. Non poteva aver cambiato le cose. L'aver ucciso una farfalla non poteva essere così importante, no!
Il suo volto era gelido. La sua bocca tremò, mentre chiedeva: «Chi... chi ha vinto le elezioni presidenziali, ieri?»

Carlo Emilio Gadda (1953) nel racconto "L'egoista"
"*Se una libellula vola a Tokio, innesca una catena di reazioni che raggiungono me*".

Attrattore di Lorenz nel diagramma di fase 3-dim



Suggerimento di May

Sistemi dinamici a tempo discreto

Assegnato x_0, la successione degli stati (traiettoria) si ottiene per induzione: $x_{t+1} = f\,(\,x_t)\quad t = 0,1,\ldots$

$$funzione\ y = f(x)$$

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y$$

Funzione composta (con se stessa)

Legge di evoluzione ottenuta mediante l'iterazione (applicazione ripetuta) di una funzione

$$x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1)$$

Per induzione, ossia iterando la f ...

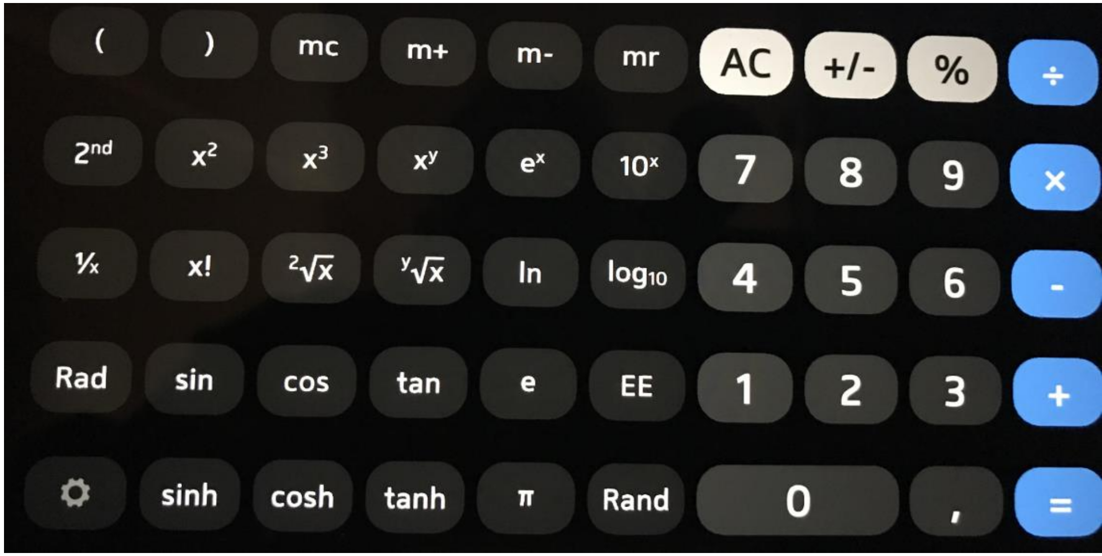
$$x(0) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(1) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(2) \ \dots \ x(t) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow x(t+1) \ \dots$$

… si ottiene una "traiettoria" del sistema dinamico

$x(1) = f\,(x(0))$ $\quad x(2) = f\,(x(1)) = f\,(f\,(x(0))) = f^{\,2}\,(\mathrm{x}(0))$ … $x(\mathrm{t}) = f^{\,\mathrm{t}}\,(x(0))$

Proviamo …

(approccio sperimentale)



Moltiplichiamo ripetutamente per un numero

legge induttiva: $x_{t+1}= ax_t$ x_0 dato (punto seme, condizione iniziale)

parametro a= 2 ; c.i. x_0= 1 … 2 … 4 … 8 … 16, ….

parametro a= 0.5 ; c.i. x_0= 1 … 0.5 … 0.25 … 0.125 … 0.0625 … 0.03125 …

Parametro a = -0.5; c.i. x_0= 1… -0.5 … 0.25 … -0.125 … 0.0625 … -0.03125 …

Mappa lineare: $f(x) = a\,x$

Evoluzione $x_{t+1} = a\,x_t$

$x_1 = a\,x_0$

$x_2 = a\,x_1 = a\,(a\,x_0) = a^2\,x_0$

$x_3 = a\,x_2 = a\,(a^2\,x_0) = a^3\,x_0$

…

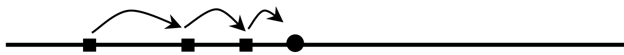
$x_n = a\,x_{n-1} = a\,(a^{n-1})\,x_0 = a^n x_0$

Soluzione in forma analitica:

$$x_t = x_0 a^t$$

- **$|a| < 1$ (contraction)**

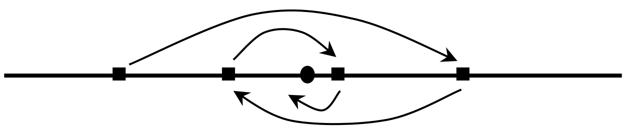
➢ *$0 < a < 1$*



Contrazione che conserva l'orientamento.

Converge a $x^*=0$ in maniera monotona

$-1 < a < 0$



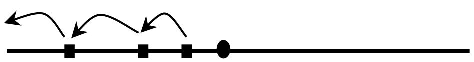
Contrazione che rovescia l'orientamento

Converge a $x^* = 0$ attraverso oscillazioni

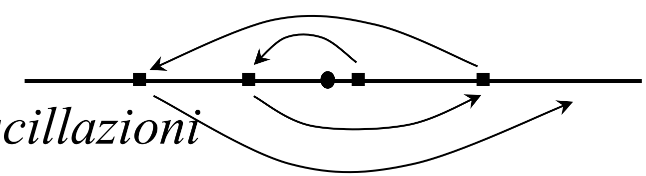
- **$|a| > 1$ (expansion)**

➢ *$a > 1$,*

Divergenza monotona



$a < -1$



Divergenza con oscillazioni

- Casi particolari

$a = 1$ $\quad x_t = x_0$ costante

$a = -1$ $\quad x_t = (-1)^t\,x_0$ oscillazioni di ampiezza costante

Moltiplichiamo e sommiamo $x_{t+1}=ax_t +1$

parametro: $a= 0.5$; c.i. : $x_0=1$,

Successione generata: 1.5 …1.75 … 1.875 … 1.9375 … 1.96875 … 1.984375, …

Perché converge a 2?

Ragioniamo insieme: se x_t tende a un numero finale x^*, anche x_{t+1} (che gli sta sempre appresso) tende allo stesso numero x^*, quindi:

$x^* = ax^*+1$, da cui $x^* = 1/(1-a)$

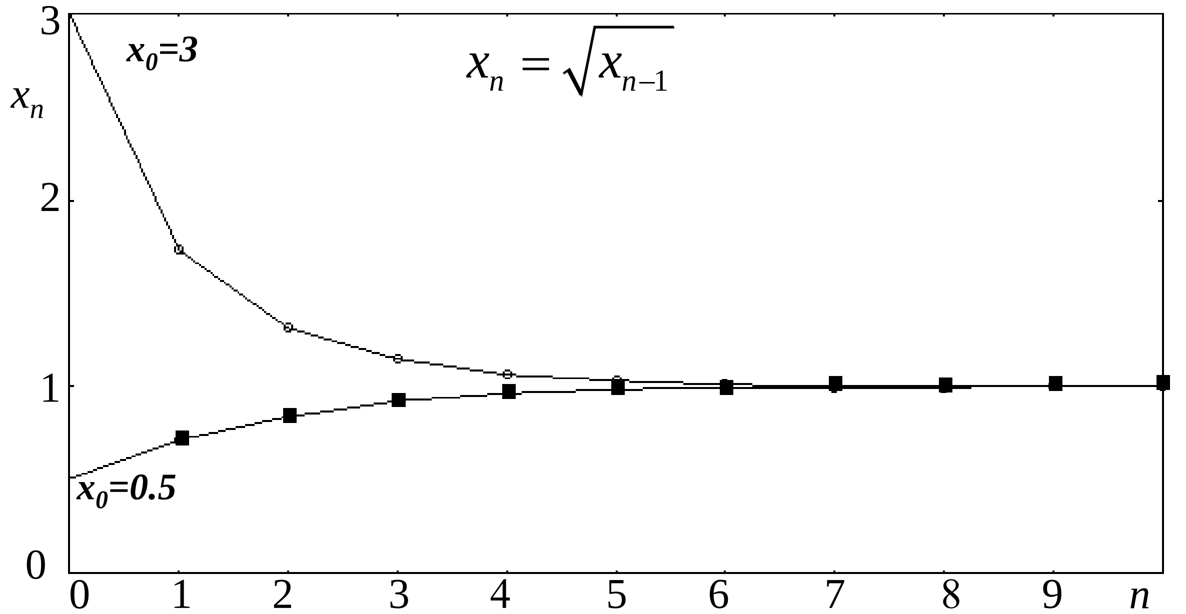
Proviamo…

parametro $a= 0.8$; c.i. $x_0=1$,

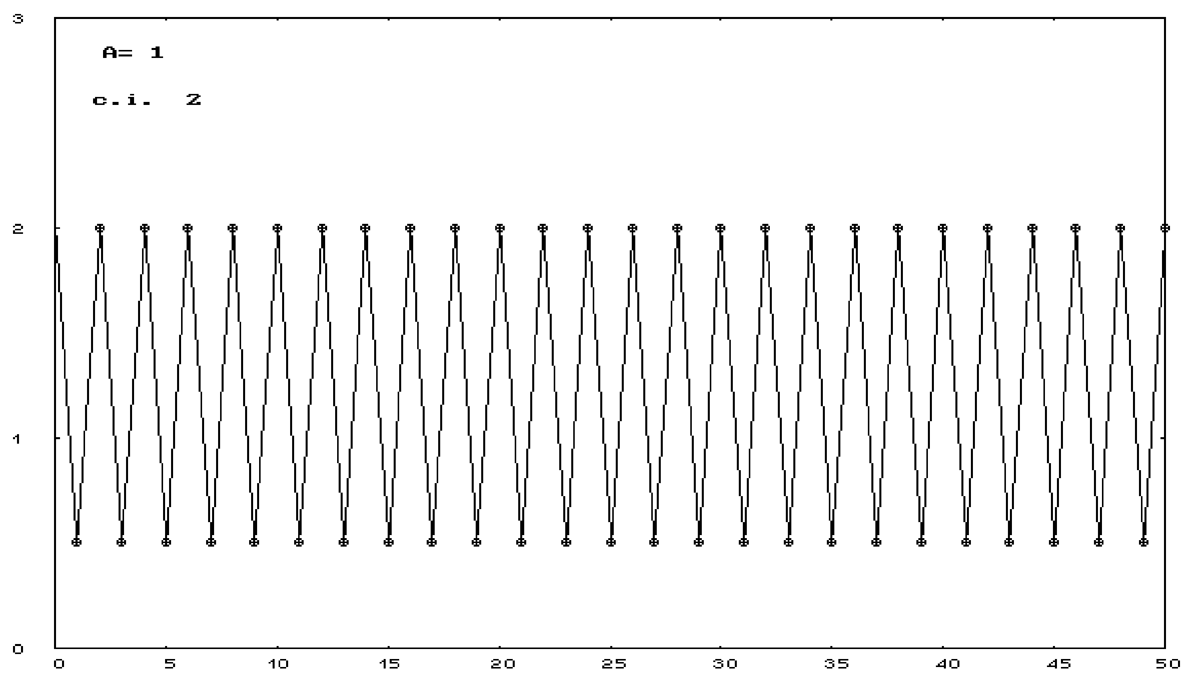
Successione generata: 1.8 … 2.44 … 2.952 … 3.3616 … 3.68928 … 3.951424 … 4.1611392 … 4.32891136 … 4.463129088 …4.570532704 … 4.65640261632 …

Dato x_0 e la regola induttiva $x_{n+1} = f(x_n)$ …. Come andrà a finire?

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$



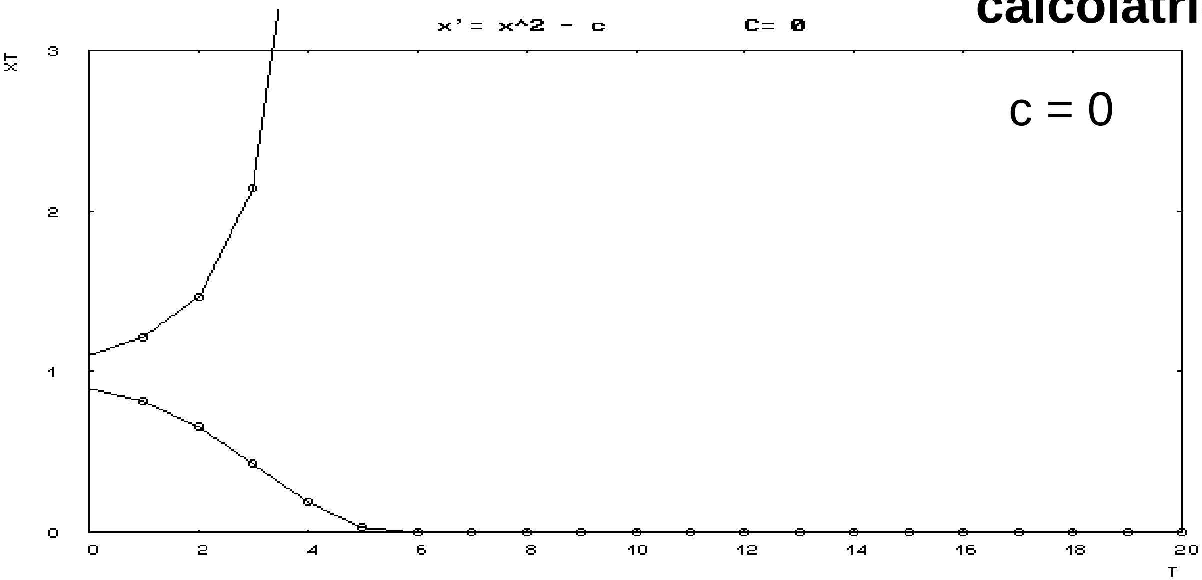
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$$

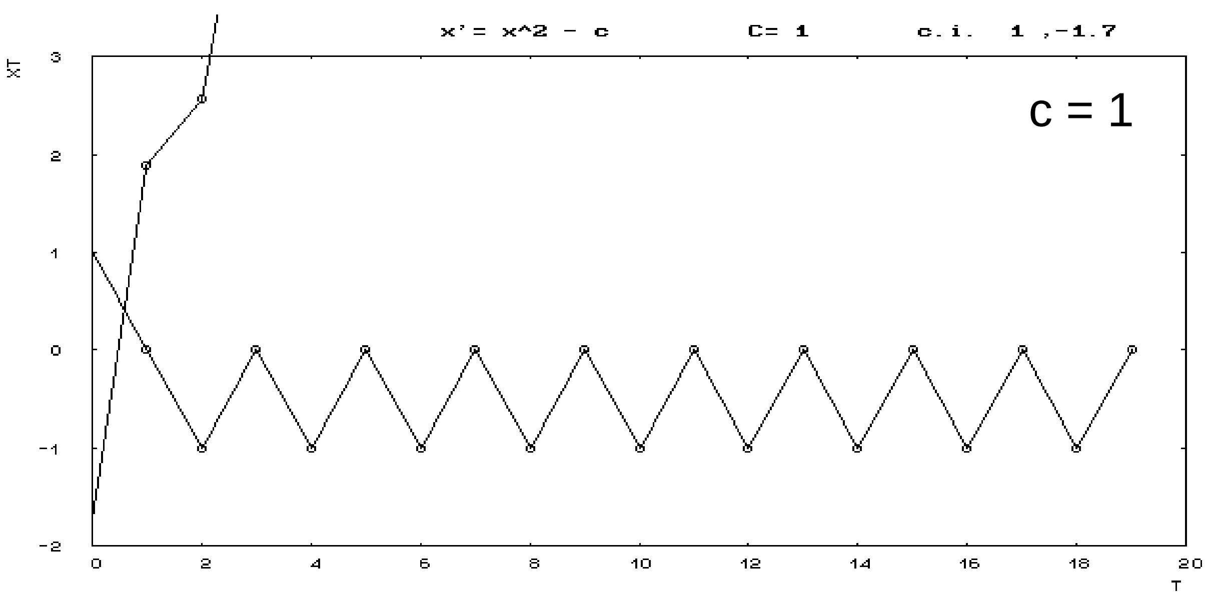


Nota: $x_{n+2} = x_n$

$$x(t+1) = f(x(t)) = x^2(t) - c$$

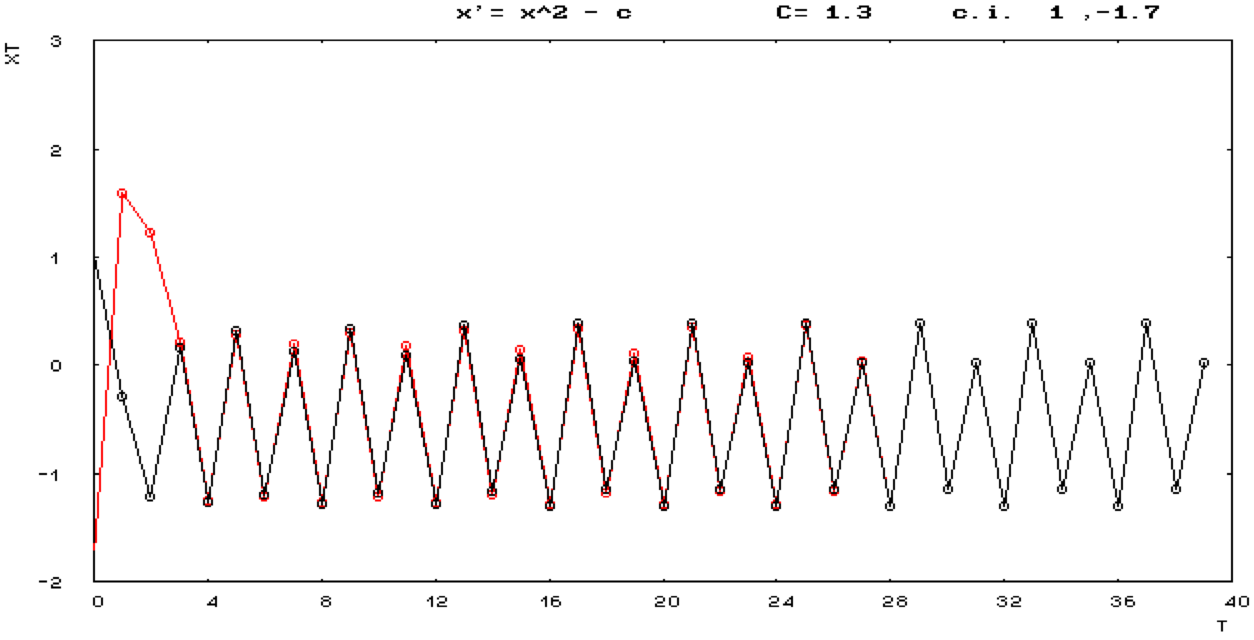
calcolatrice tascabile $\quad \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x^2}$





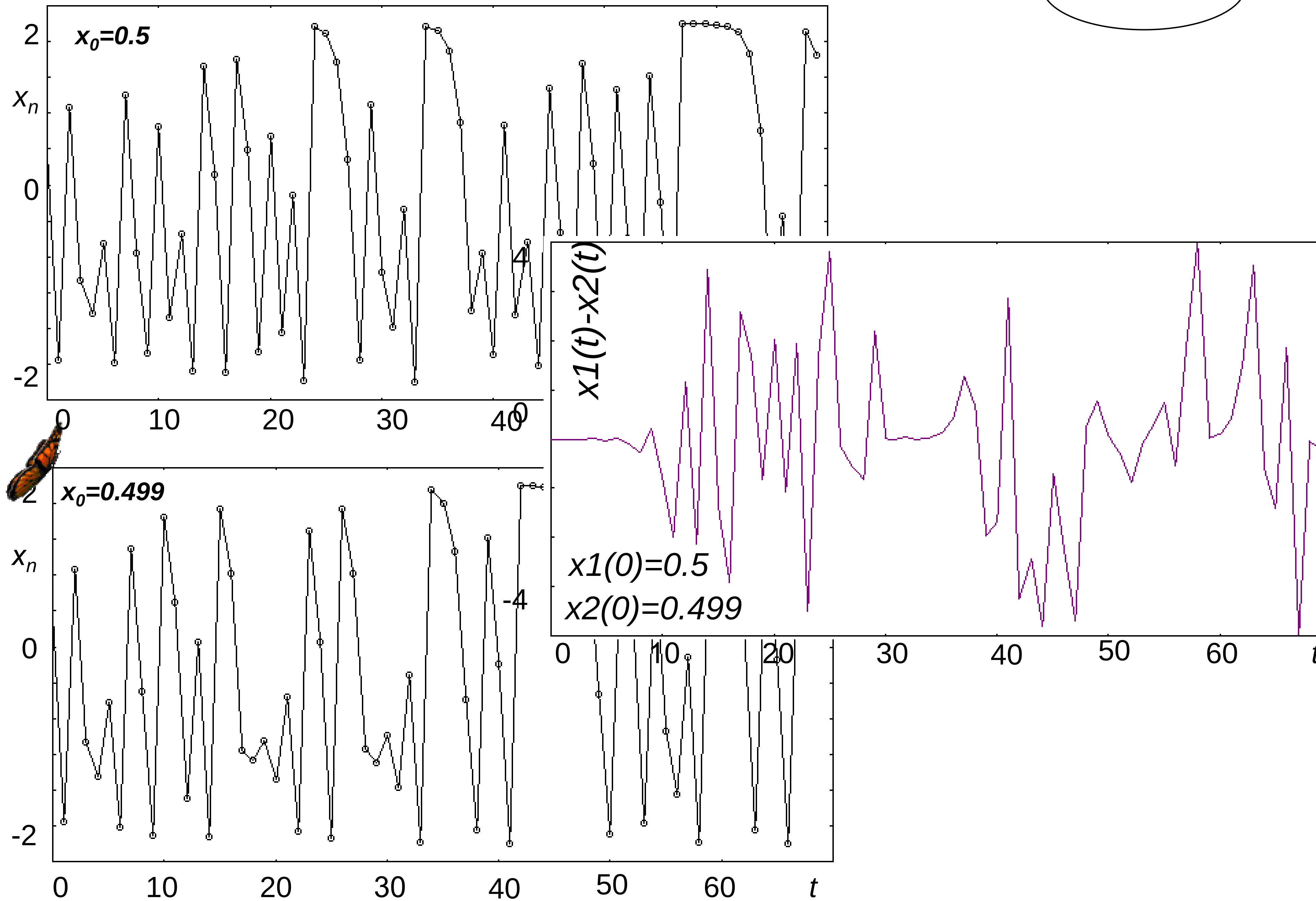
$\mathbf{x^2 - 1} \longrightarrow \mathbf{x}$

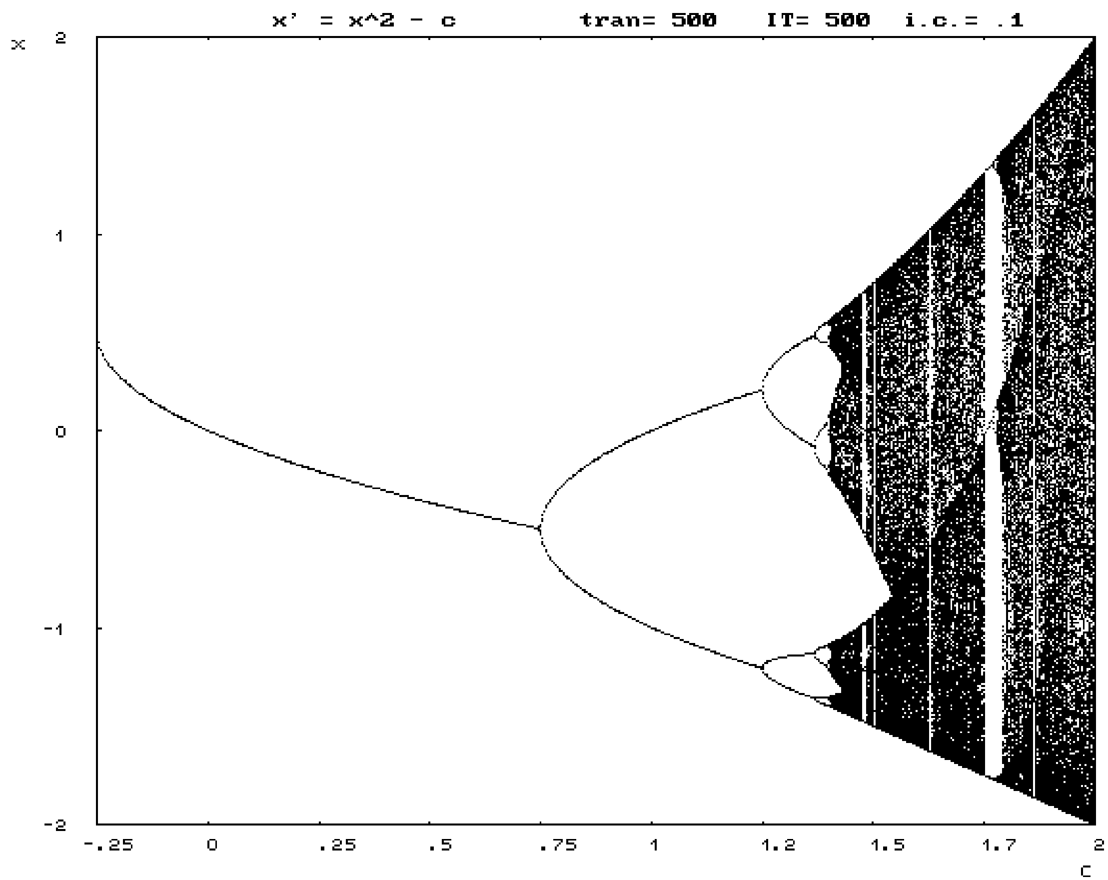
$$x_{t+1} = f(x_t) = x_t^2 - 1.3$$



$$x_n = x_{n-1}^2 - 2$$

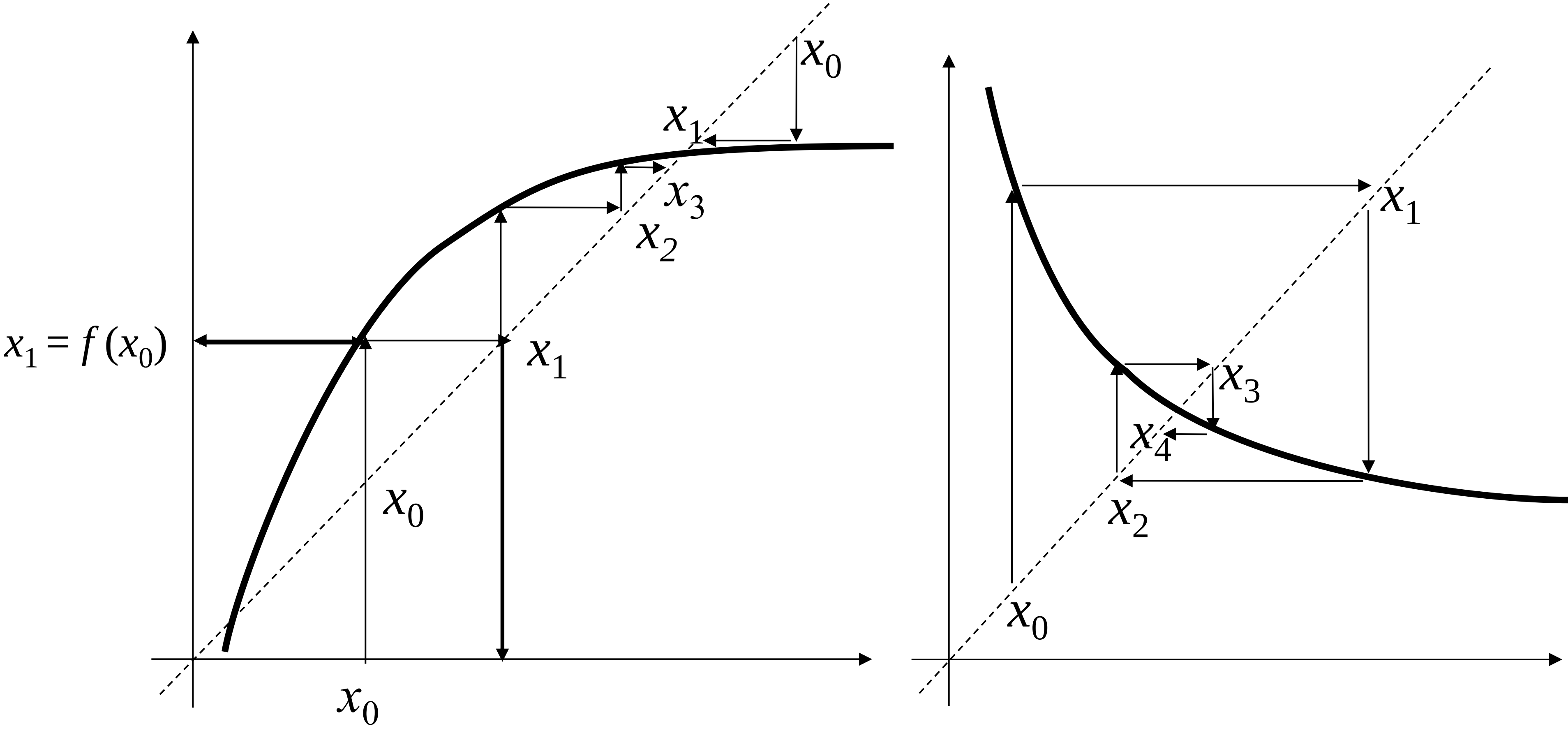
calcolatrice $\quad x^2 - 2 \longrightarrow x$

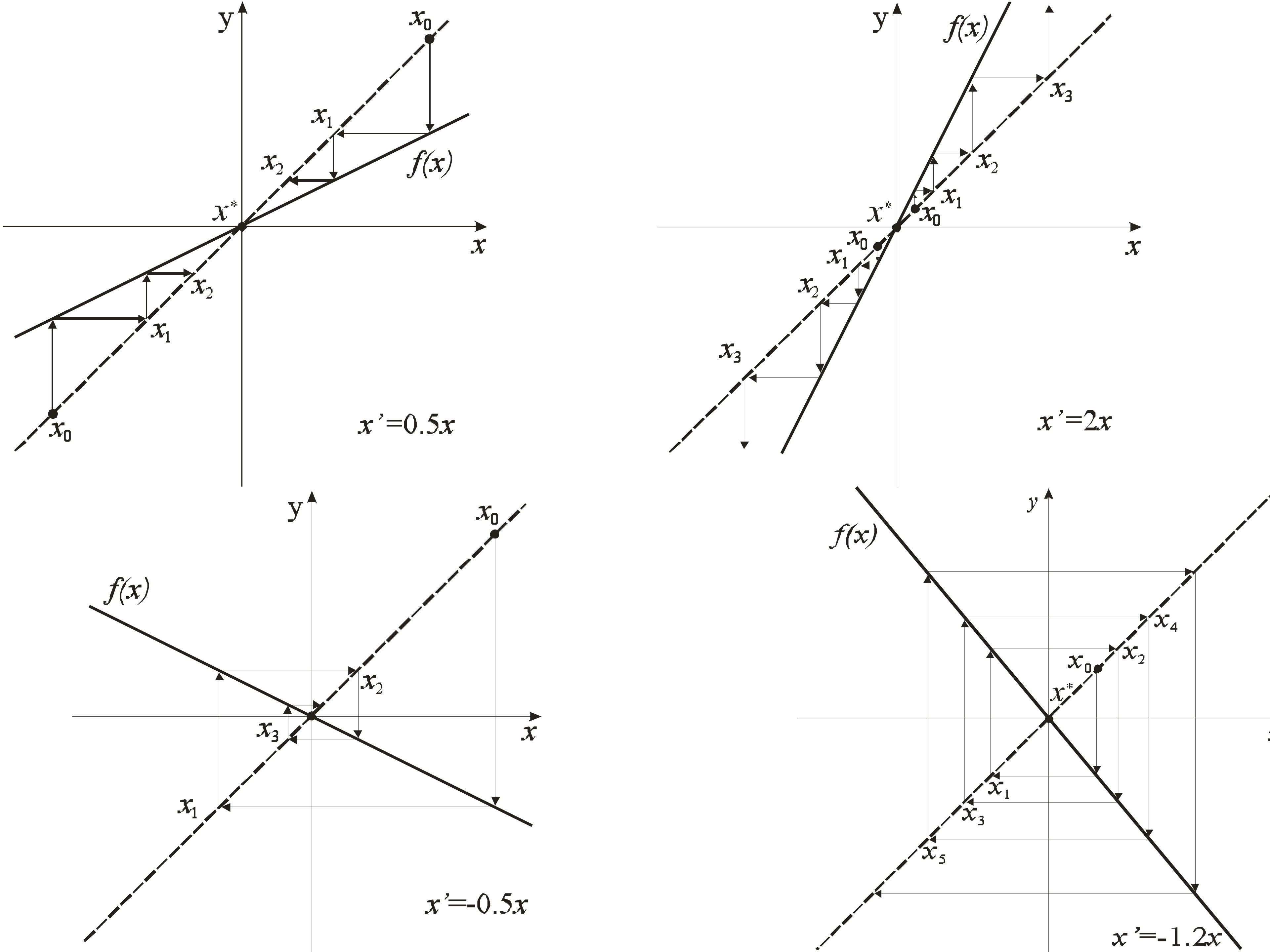



x' = x^2 - c
tran= 500
IT= 500
i.c.= .1
x
2
1
0
-1
-2
-.25
0
.25
.5
.75
1
1.2
1.5
1.7
2
c

Legge di evoluzione: $\boldsymbol{x\,(t+1) = f\,(\,x\,(t)\,)}$

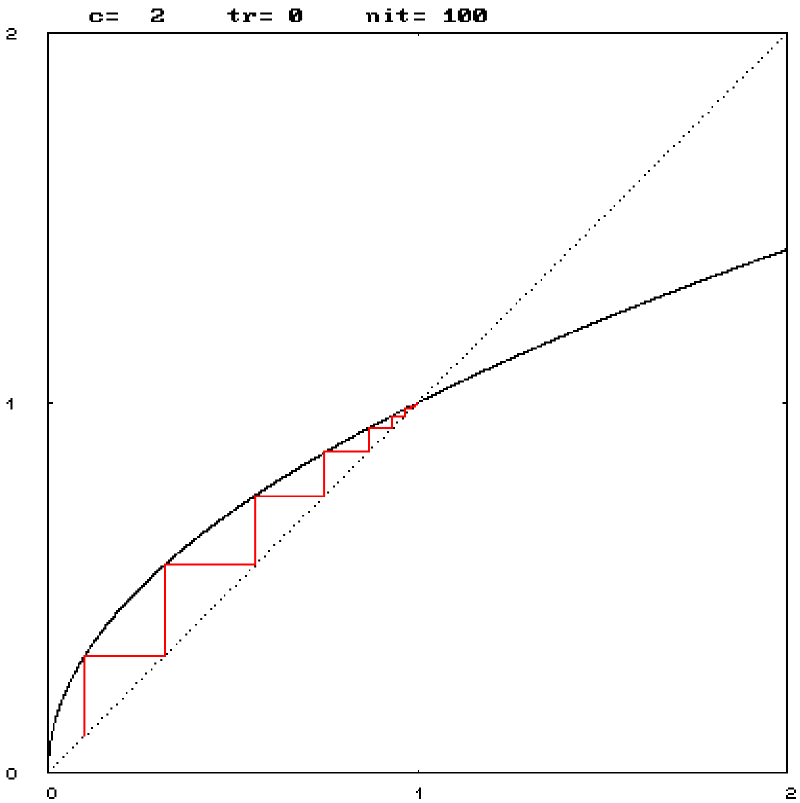
Costruzione geometrica qualitativa delle traiettorie



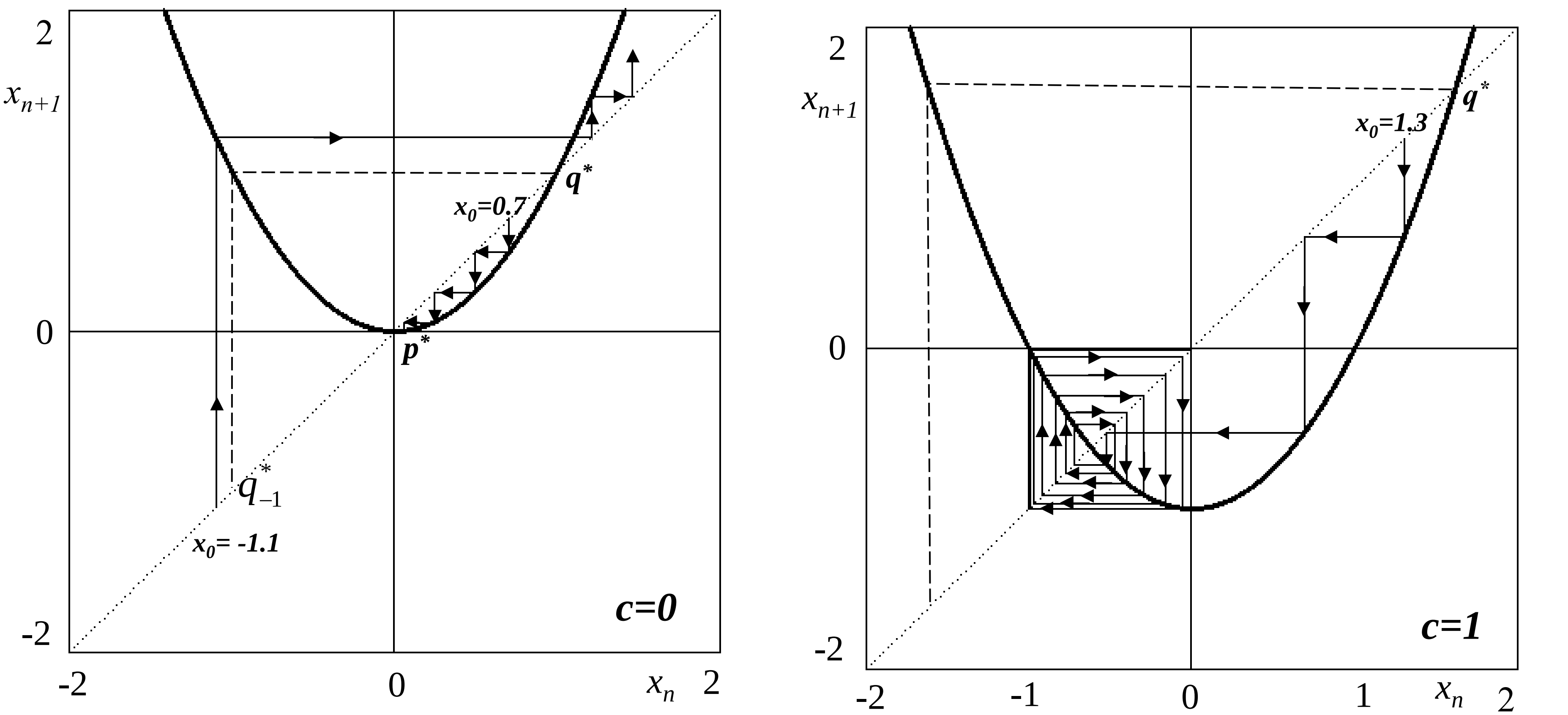


y
x0
x1
x2
f(x)
x*
x
x2
x1
x0
x'=0.5x
y
f(x)
x3
x2
x1
x*
x0
x
x0
x1
x2
x3
x'=2x
y
x0
f(x)
x2
x3
x
x1
x'=-0.5x
y
f(x)
x4
x0
x2
x*
x1
x3
x5
x'=-1.2x

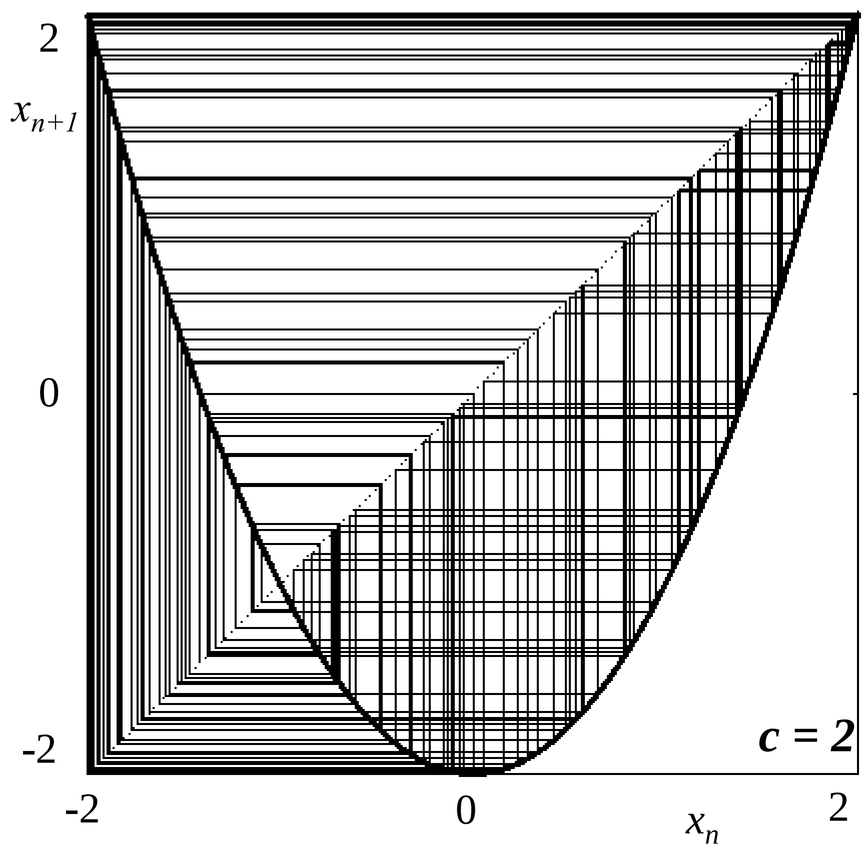
$$x(t+1)=\sqrt{x(t)}$$



Initial condition Xo ? .1



2
x_{n+1}
q^*
x_0=0.7
0
p^*
q^*_{-1}
x_0= -1.1
c=0
-2
-2
0
x_n
2
2
x_{n+1}
q^*
x_0=1.3
0
c=1
-2
-2
-1
0
1
x_n
2



2
x_{n+1}
0
-2
-2
0
2
x_n
c = 2

Modello di May: Popolazione con stagioni riproduttive.

Supponiamo che in ogni periodo si riproduca una frazione *r* di insetti e ne muoia una frazione *m*.

$$N(t+1) = N(t) + rN(t) - mN(t) = (1 + r - m)N(t)$$

Modello lineare

Nuova ipotesi: il tasso di mortalità *m* aumenti al crescere della popolazione (termine Malthusiano) $m = sN(t)$

La legge di evoluzione diventa di secondo grado (non lineare):

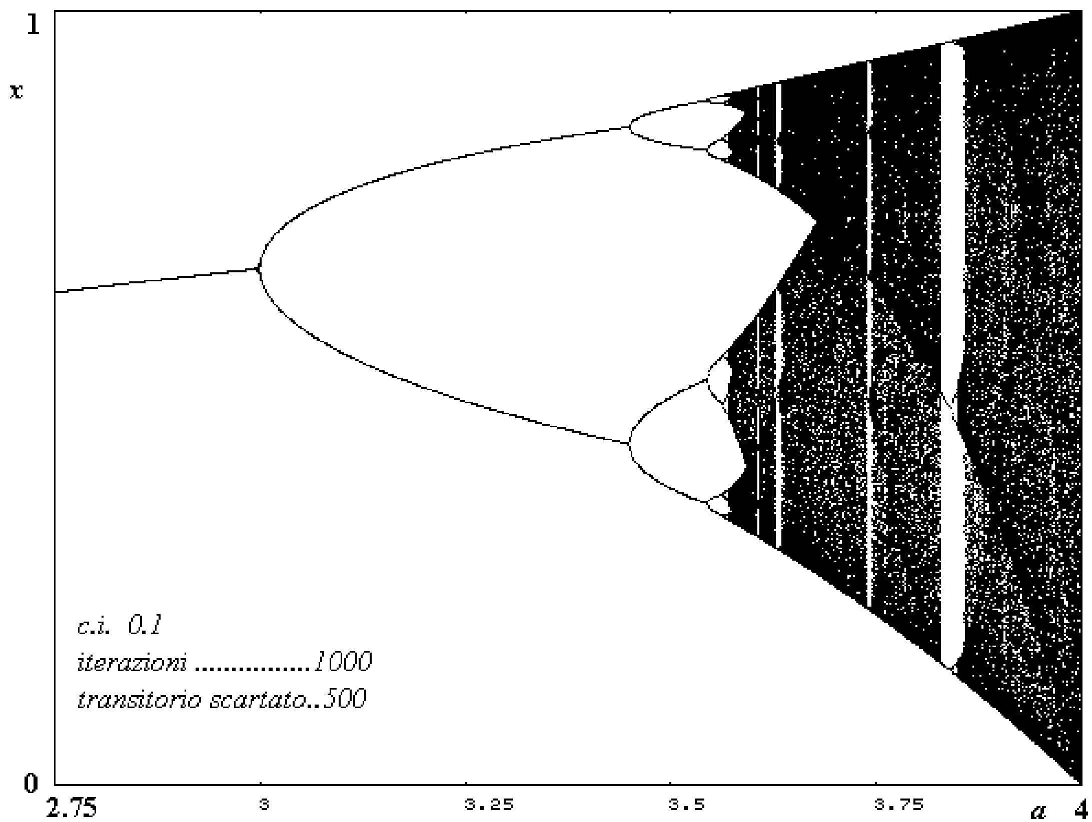
$$N(t+1) = (1+r)N(t) - sN(t)^2$$

Con il cambio di variabile: $N = \frac{1+r}{s} x$ si ottiene la forma standard

$$x(t+1) = ax(t)\left[1 - x(t)\right]$$

dove $a = (1+r)$

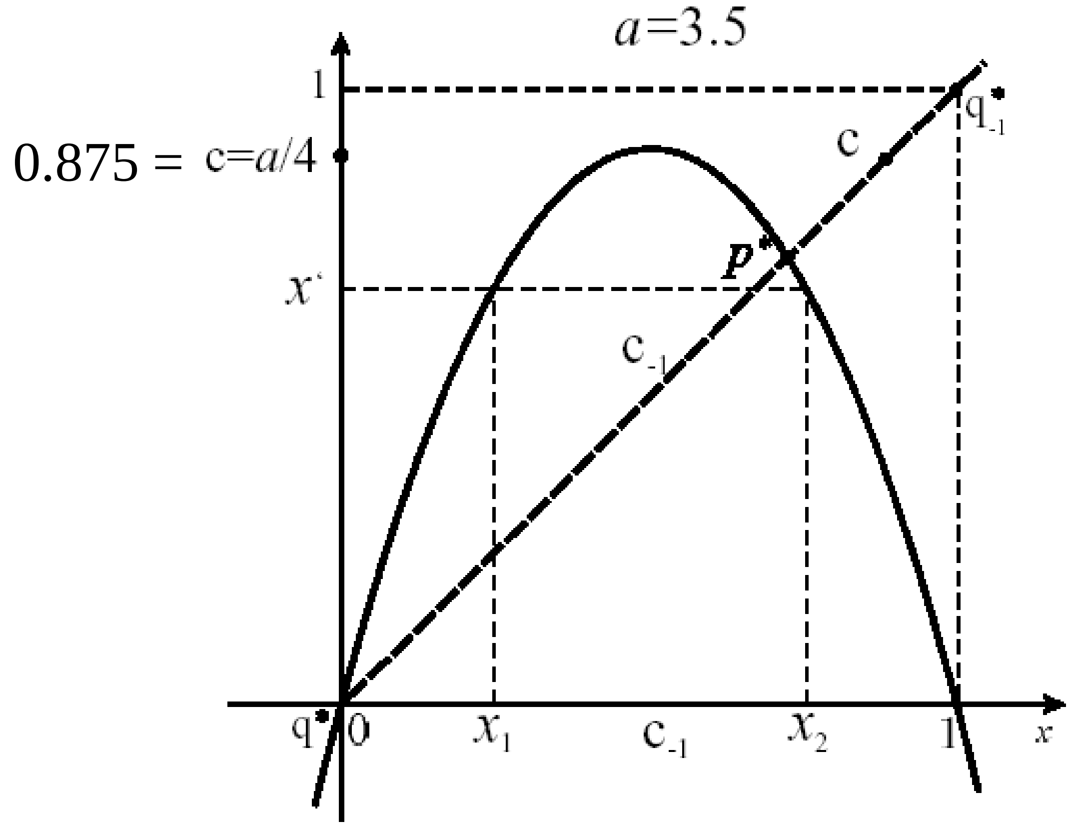
logistica

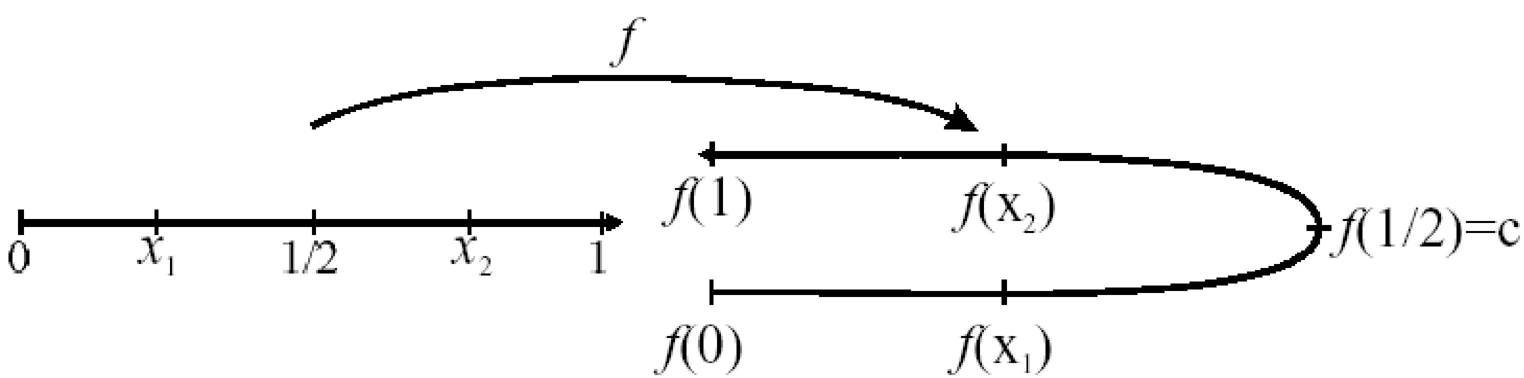


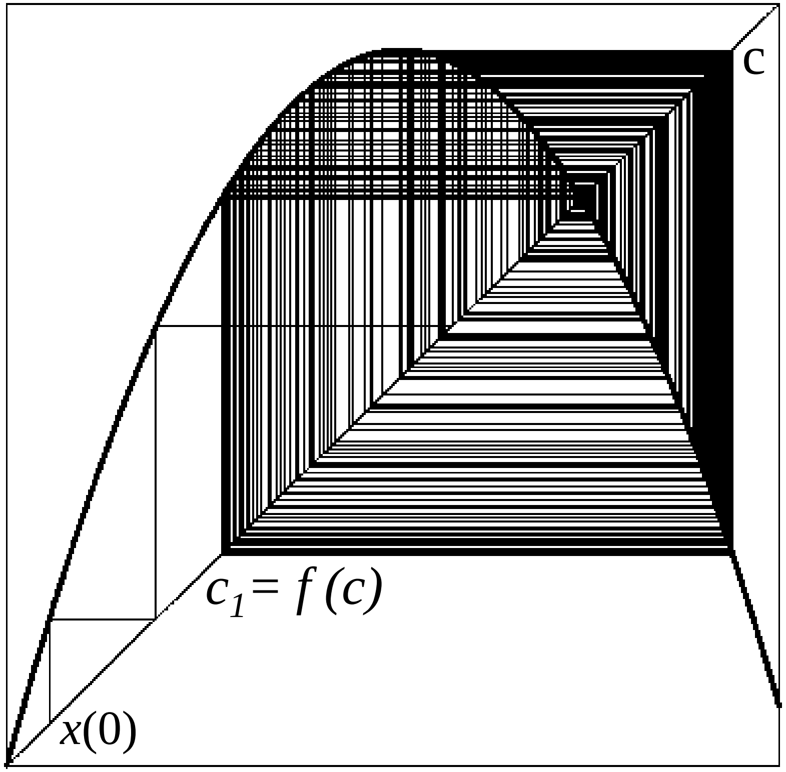
$$\boxed{x_{t+1} = \alpha x_t \left(1 - x_t\right)}$$

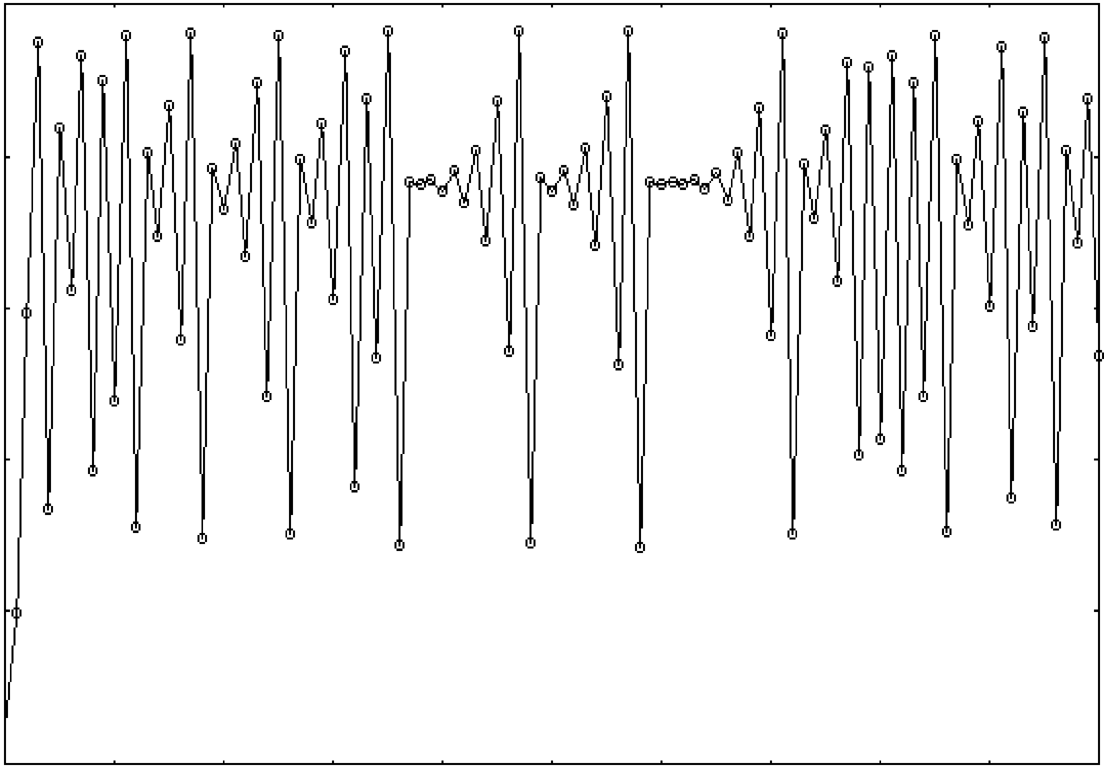
La Geometria del Caos

Stretching & Folding (Stirimento e ripiegamento)

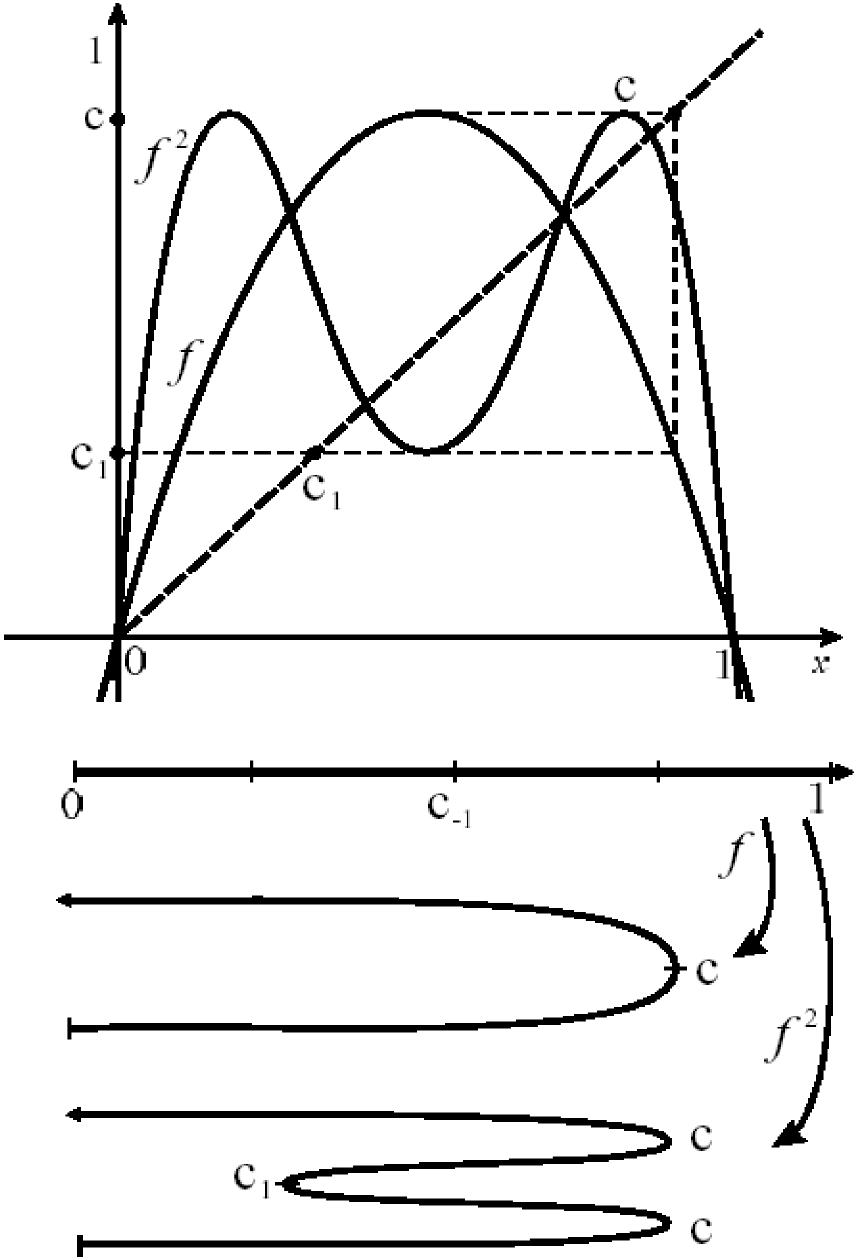


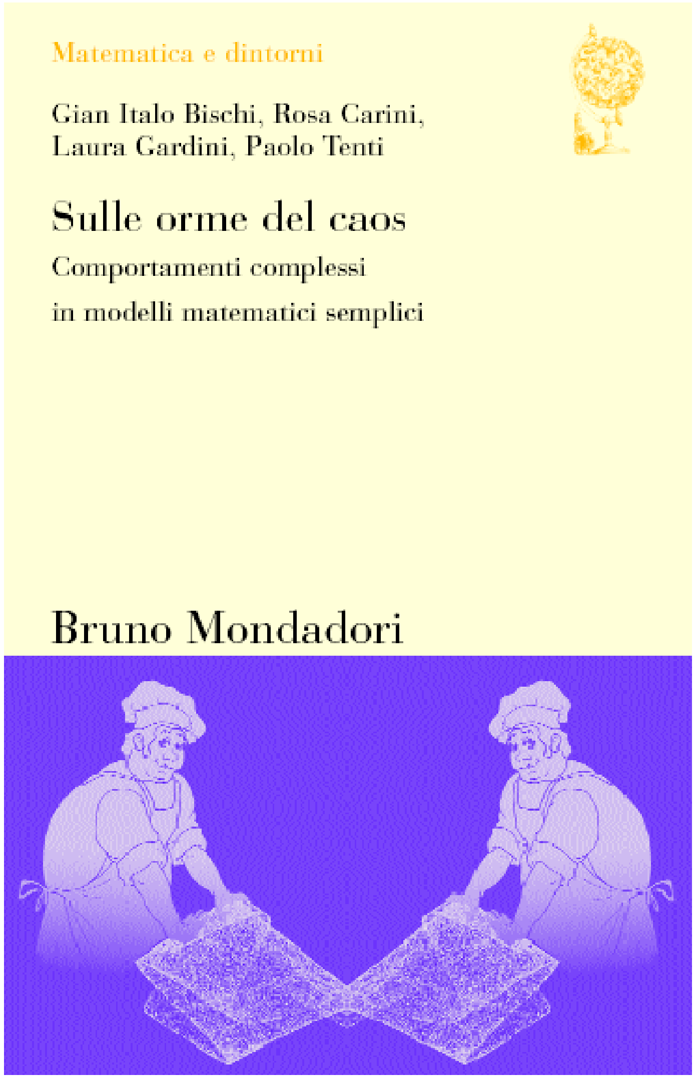


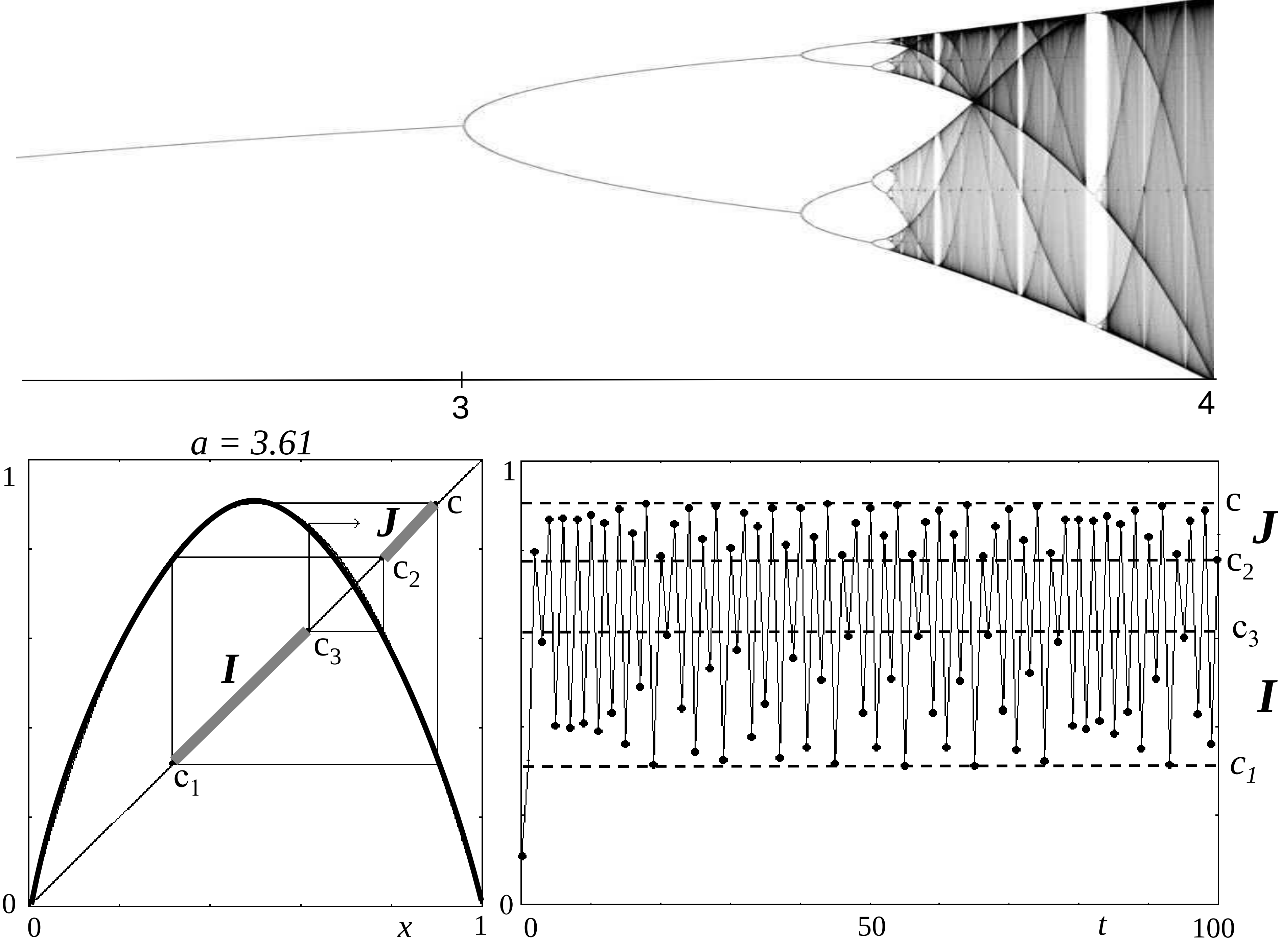

c
$c_1 = f(c)$
$x(0)$


t

Kneading of the dough (impastare)







3
4
a = 3.61
1
0
x
c
J
c2
c3
I
c1
50
t
100


COMMISSARIO, C'È UNA FARFALLA CHE SVOLAZZA TRANQUILLA.
LA **TEORIA DEL CAOS** DICE CHE SE UNA FARFALLA SBATTE LE ALI QUI, POTREBBE SUCCEDERE UNA CATASTROFE ALTROVE.
CHE FACCIAMO, LA ARRESTIAMO?

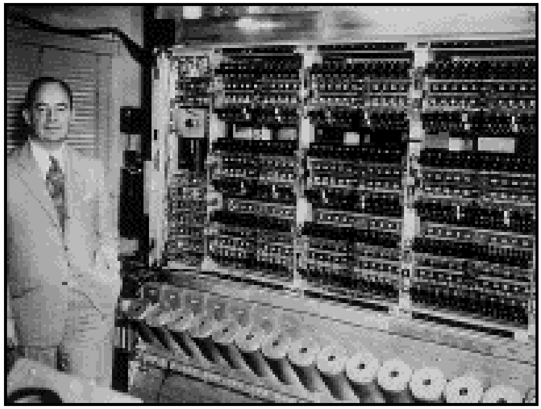
Dal romanzo: *Jurassic Park* (1990),
di **Michael Crichton** (1942, 2008)

Dalla Seconda Iterazione

[…] *Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i "meccanismi del mondo reale". Questi studiosi,sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici.*
Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio.
Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos.
Terza cosa, sembravano voler fare di tutto il possibile affinché i loro sistemi matematici descrivessero qualcosa che di fatto esisteva nel mondo reale.

Ancora Ian Malcom, da *Jurassic Park*, terza iterazione.

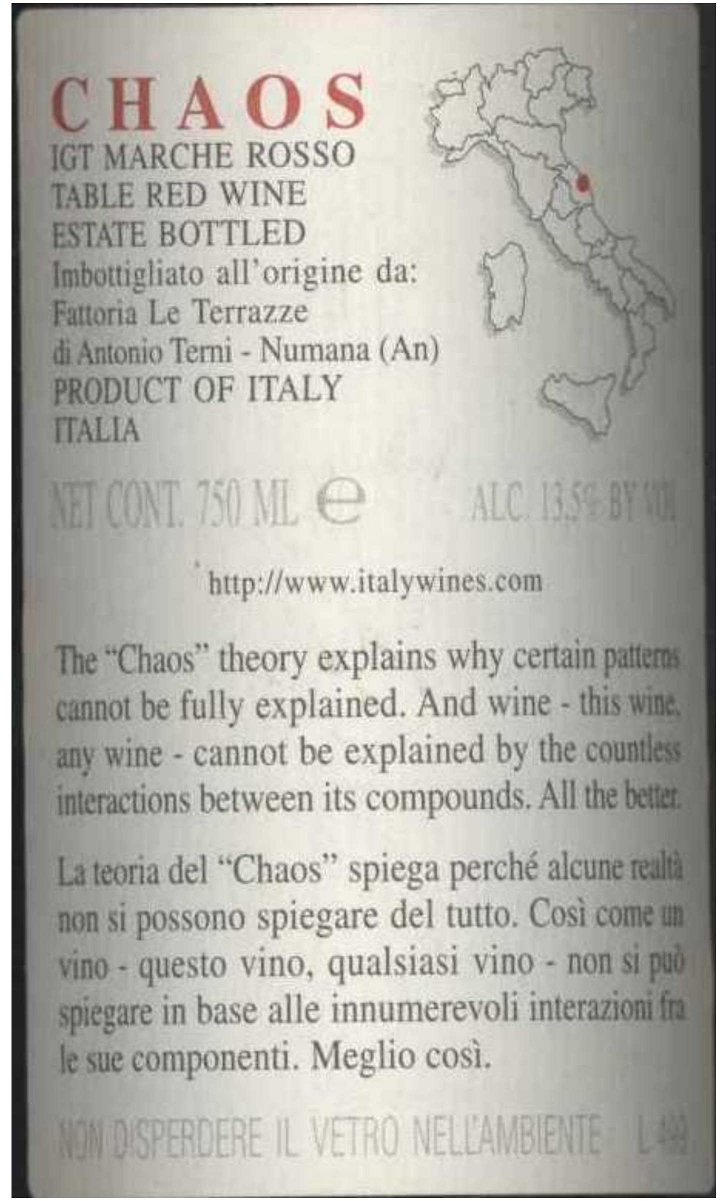
“I computer vennero costruiti verso la fine degli anni 40, perché matematici come John Von Neumann , il massimo matematico della sua generazione, pensavano che avendo a disposizione una macchina capace di gestire contemporaneamente molte variabili, si sarebbe stati in grado di fare previsioni meteorologiche a lungo termine. […].
La teoria del caos manda all’aria tutto questo, non si può prevedere il tempo se non per pochi giorni. […] Tutto il denaro speso per previsioni meteorologiche lungo termine - circa mezzo miliardo di dollari negli ultimi decenni- è buttato via. È un’impresa vana quanto cercare di trasformare il piombo in oro. Oggi gli sforzi degli alchimisti ci fanno ridere, ma generazioni future guarderanno noi e rideranno nello stesso modo”.

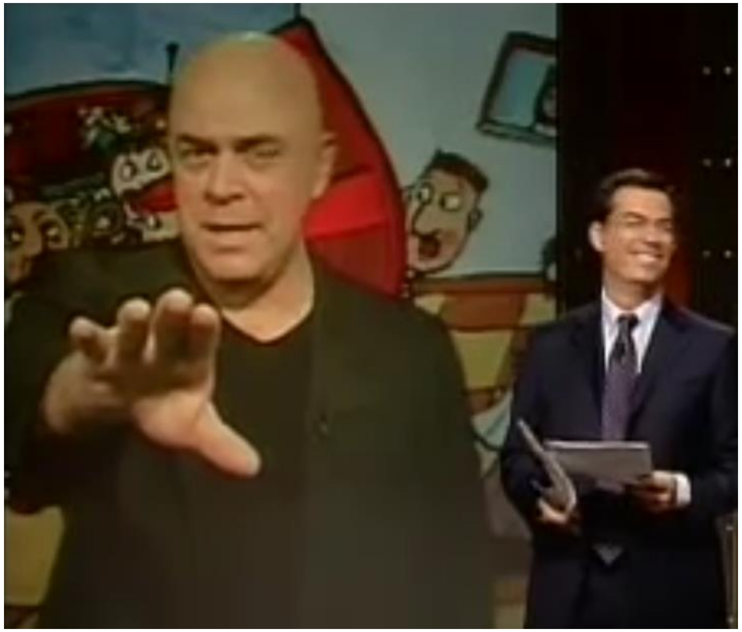


Jurassic Park, terza iterazione:

“Un simile controllo è impossibile” dichiarò Ian Malcom
“Invece sì” disse Hammond
“Mi scusi, ma lei non sa quello che dice” ribattè Malcom
“Piccolo stronzo arrogante” disse Hammond. Si alzò e uscì.
“Mi spiace” disse Malcom “ma il punto è che ciò che definiamo natura è di fatto un sistema complesso, non lineare.
Ci costruiamo una immagine lineare della natura e poi combiniamo pasticci.
Io non sono uno di quegli ambientalisti dal cuore tenero, ma dovete capire ciò che non capite. Quante volte bisogna sbattere il muso contro l’evidenza dei fatti?
Abbiamo costruito la diga di Assuan sostenendo che avrebbe rivitalizzato l’Egitto, e invece distrugge il fertile delta del Nilo, produce infestazioni da parassiti e rovina l’economia.
Abbiamo costruito...

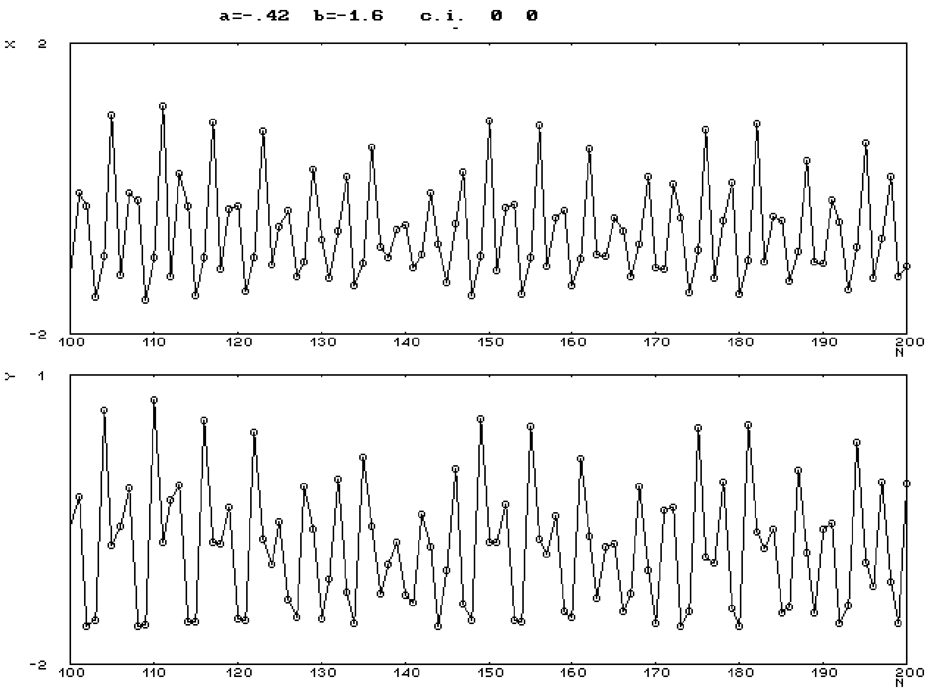

CHAOS
1997

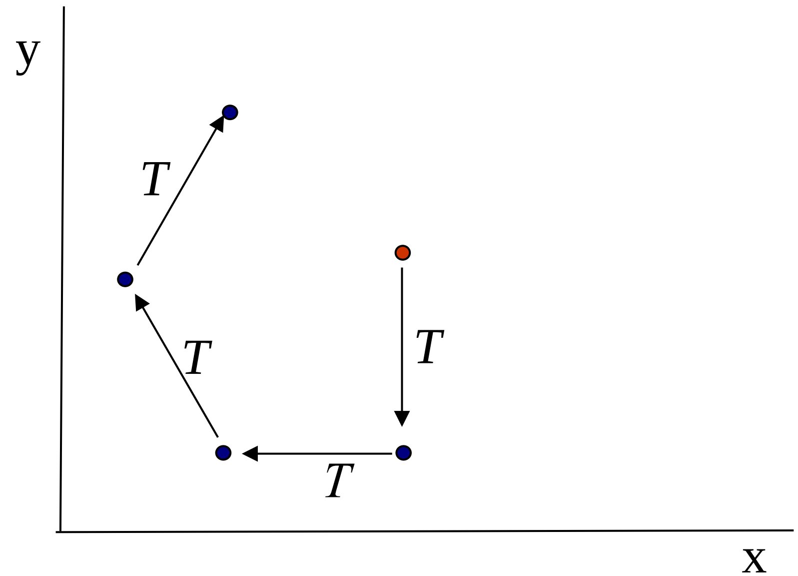

CHAOS
IGT MARCHE ROSSO
TABLE RED WINE
ESTATE BOTTLED
Imbottigliato all'origine da:
Fattoria Le Terrazze
di Antonio Terni - Numana (An)
PRODUCT OF ITALY
ITALIA
NET CONT. 750 ML ℮
ALC. 13.5% BY VOL
http://www.italywines.com
The "Chaos" theory explains why certain patterns cannot be fully explained. And wine - this wine, any wine - cannot be explained by the countless interactions between its compounds. All the better.
La teoria del "Chaos" spiega perché alcune realtà non si possono spiegare del tutto. Così come un vino - questo vino, qualsiasi vino - non si può spiegare in base alle innumerevoli interazioni fra le sue componenti. Meglio così.
NON DISPERDERE IL VETRO NELL'AMBIENTE



Mappe iterate del piano

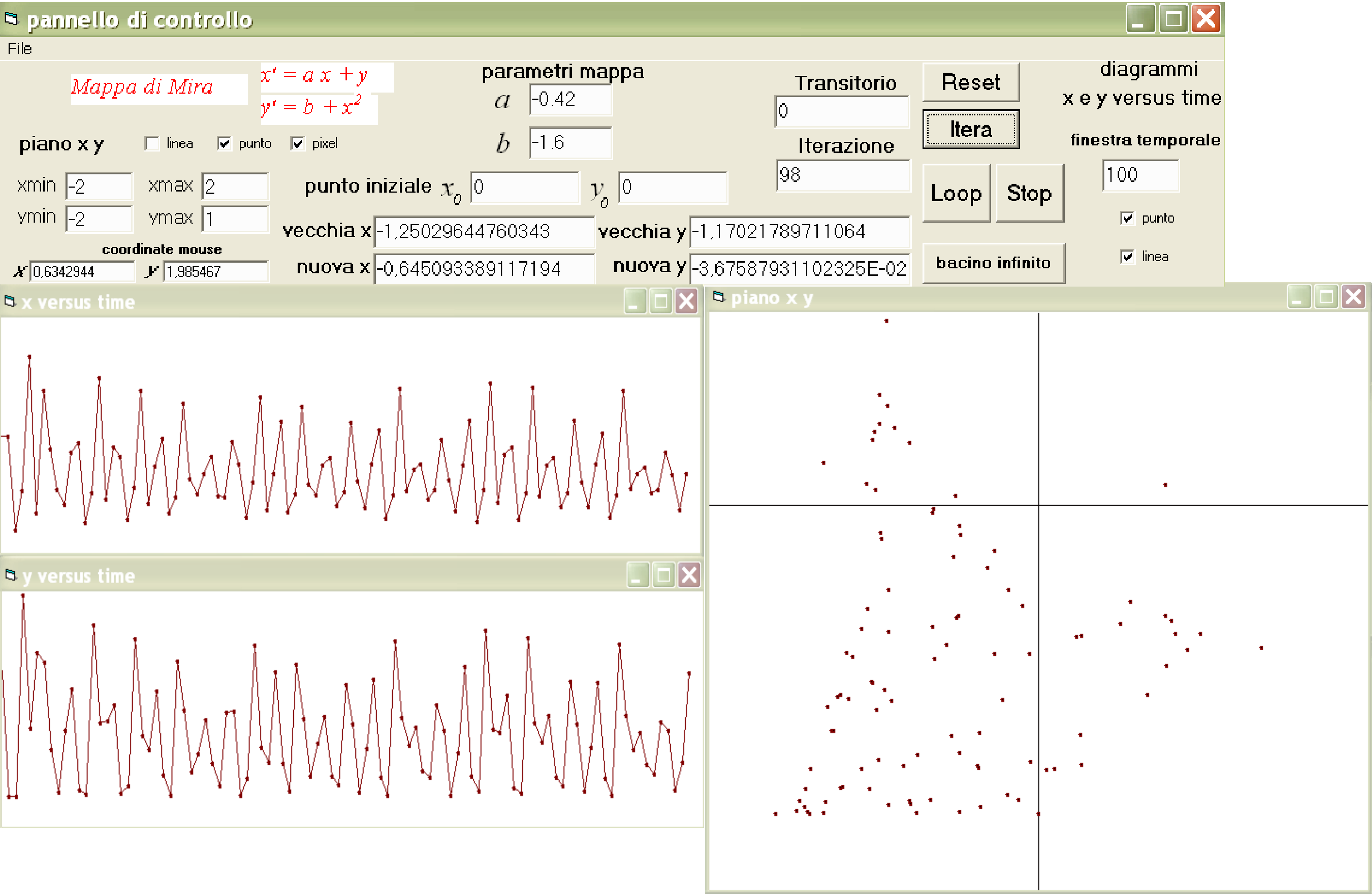
$$T:\begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$

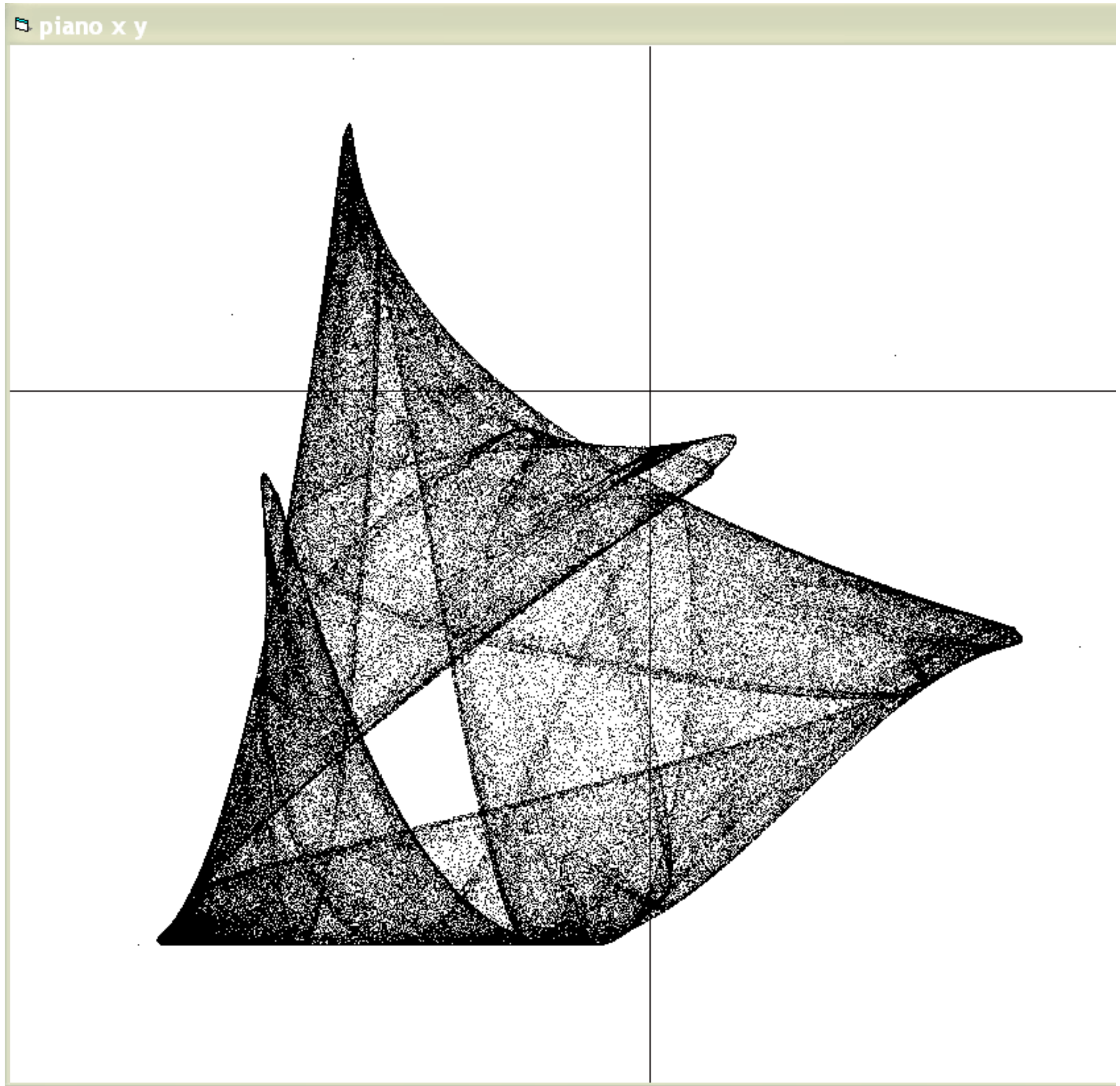




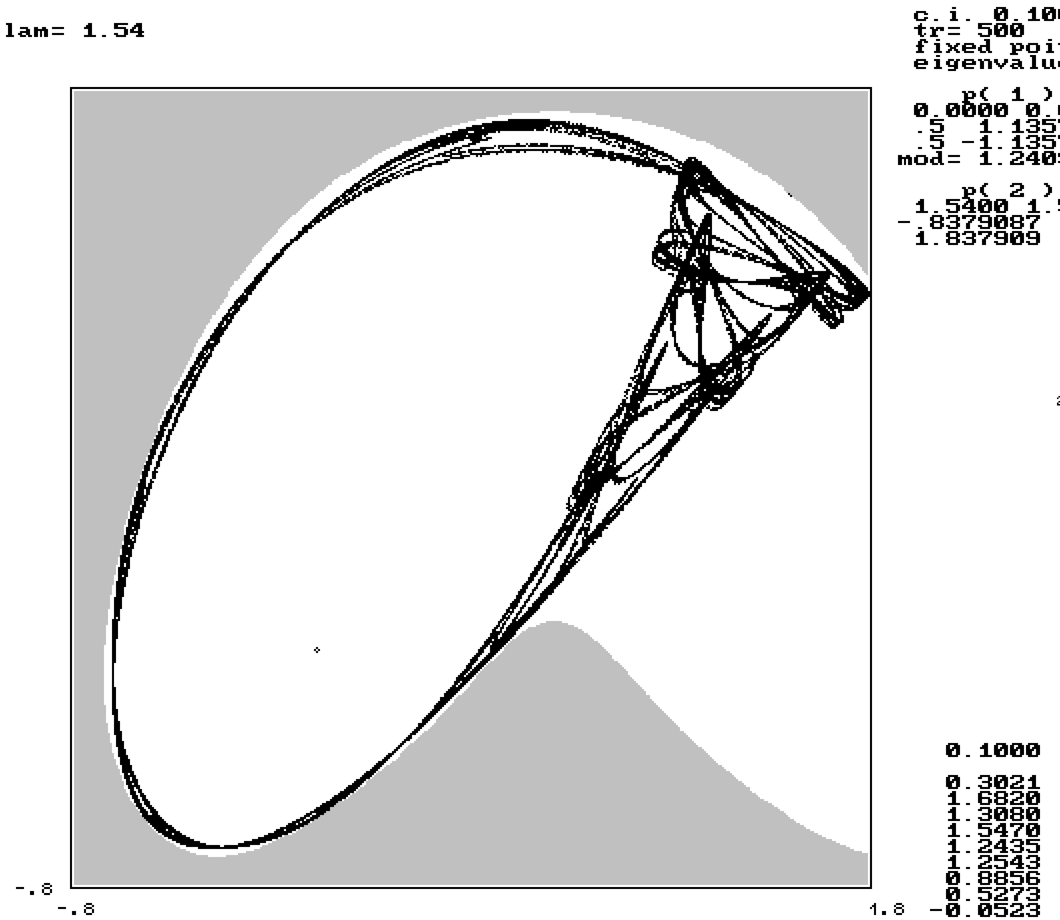
$$T:\begin{cases} x(t+1) = ax(t) + y(t) \\ y(t+1) = x(t)^2 + b \end{cases}$$

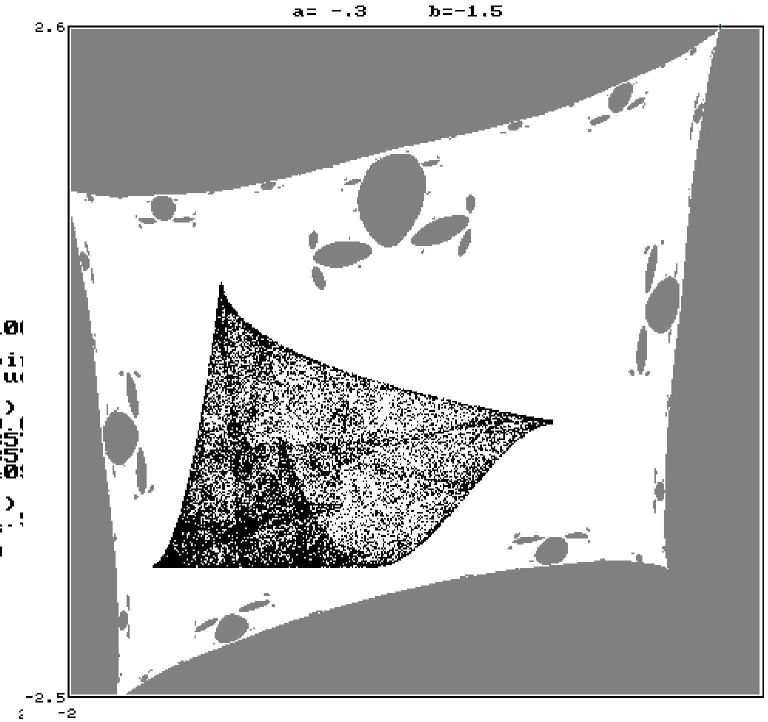
miraquad

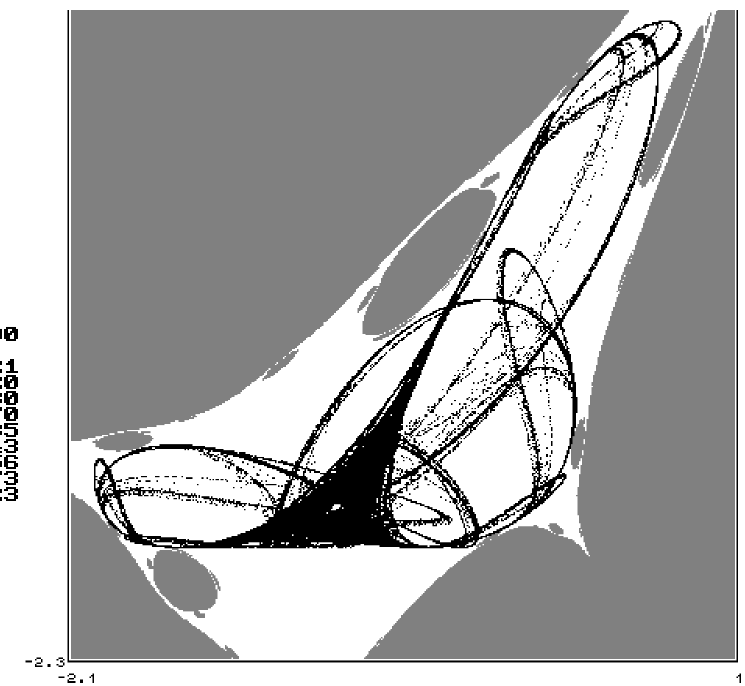


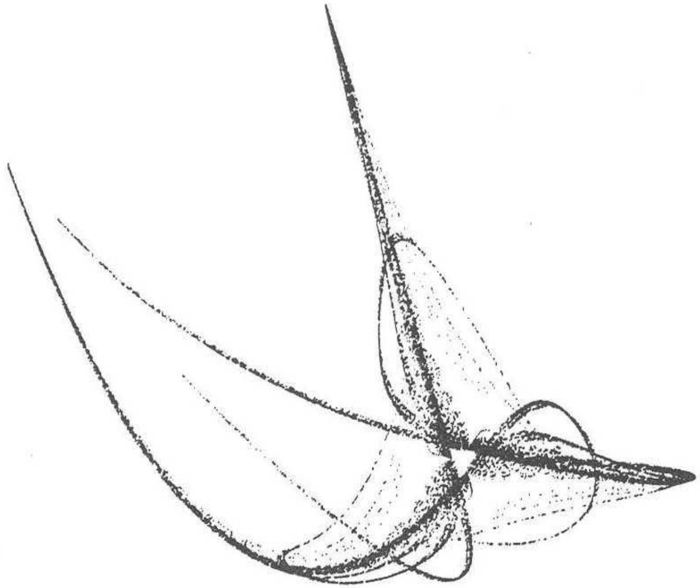

piano x y

$$\begin{cases} x_{t+1} = a x_t + y_t \\ y_{t+1} = x_t^2 + b \end{cases}$$









$$\begin{cases} x_{n+1} = a(x_n\sqrt{3}/2 - y_n/2) + x_n y_n \\ y_{n+1} = a(x_n/2 + y_n\sqrt{3}/2) + x_n^3 + y_n^3 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])

I.S.B.N. 2.85428.055.5

Dépôt légal : 1er trimestre 1980

N° Editeur : 70

DYNAMIQUE CHAOTIQUE

Transformations ponctuelles
Transition Ordre - Désordre

I. GUMOWSKI *

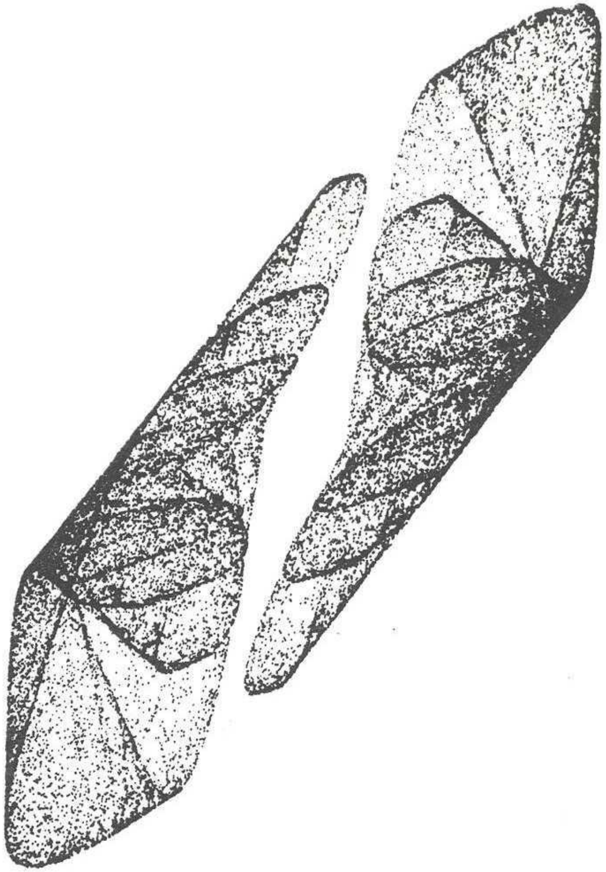
C. MIRA **

Groupe « Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications »

(*) U.E.R. de Mathématiques,
Université Paul Sabatier Toulouse

(**) Département de Génie Electrique
Institut National des Sciences Appliquées Toulouse

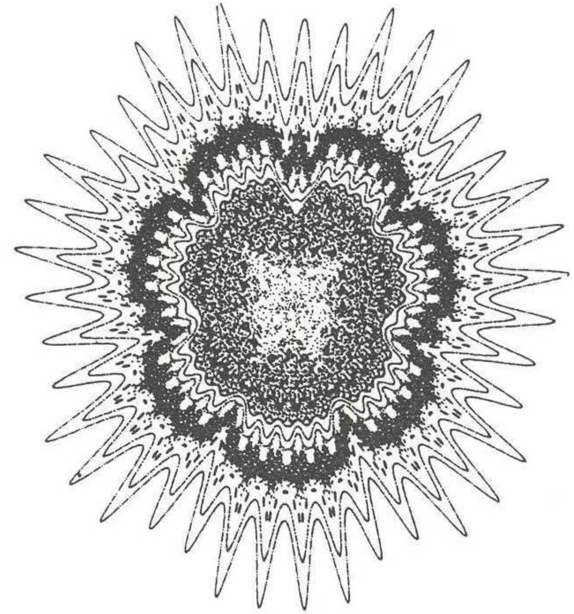
CEPADUES EDITIONS



$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n - f(x_n) \quad ; \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

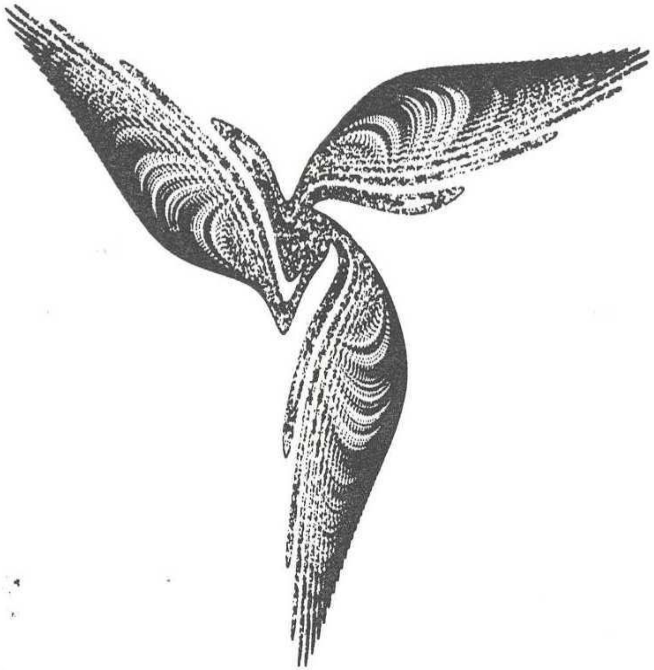
$$\begin{cases} f(x) = y - 0,2\,\lambda\, x, \ \text{si} \ 0 < x < x_A, \ y_A = 0,2\,\lambda\, x_A \\ f(x) = 0,45\lambda \dfrac{(x^2 - x_A^2 - x + x_A)}{0,5 - x_A} + 1,1\lambda(x - x_A) + y_A, \ \text{si} \ x_A < x < 1 - x_A \\ f(x) = -2\lambda(x + x_A - 1) + y_B \quad ; \quad y_B = 1,1\lambda(1 - 2x_A) + y_A, \ \text{si} \ x > 1 - x_A \\ x_A \quad = 0,4 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])



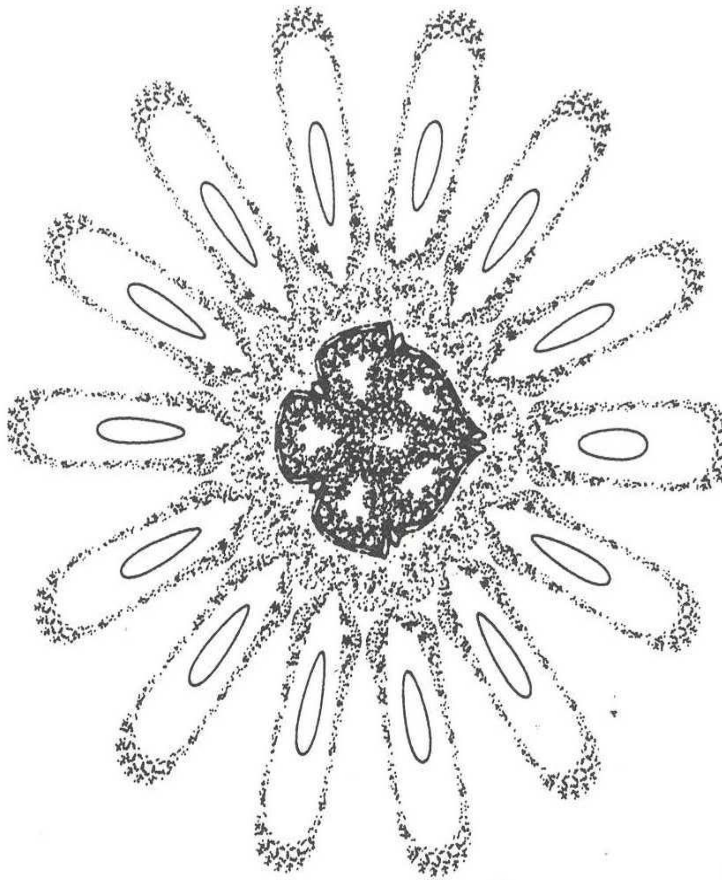
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = x_n + F(x_{n+1}), \ F(x) = \mu x + 2(1-\mu)\dfrac{x^2}{1+x^2}, \ \mu = 0,2 \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])



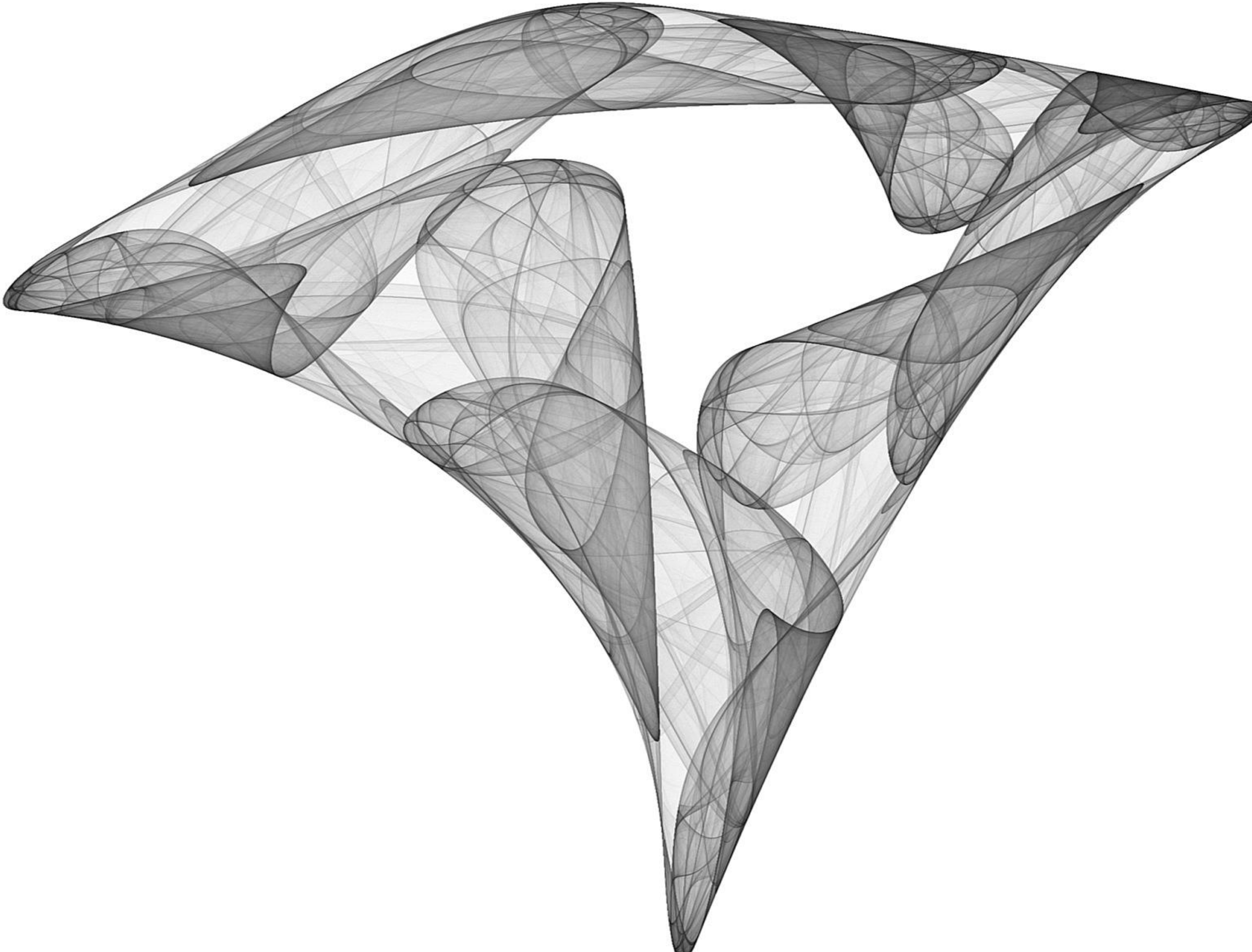
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + \alpha(1 - 0{,}05y_n^2)y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1}) \; ; \; F(x) = \mu x + 2(1-\mu)\dfrac{x^2}{1+x^2} \\ \alpha = 0{,}005 \; ; \; \mu = -0{,}495 \end{cases}$$

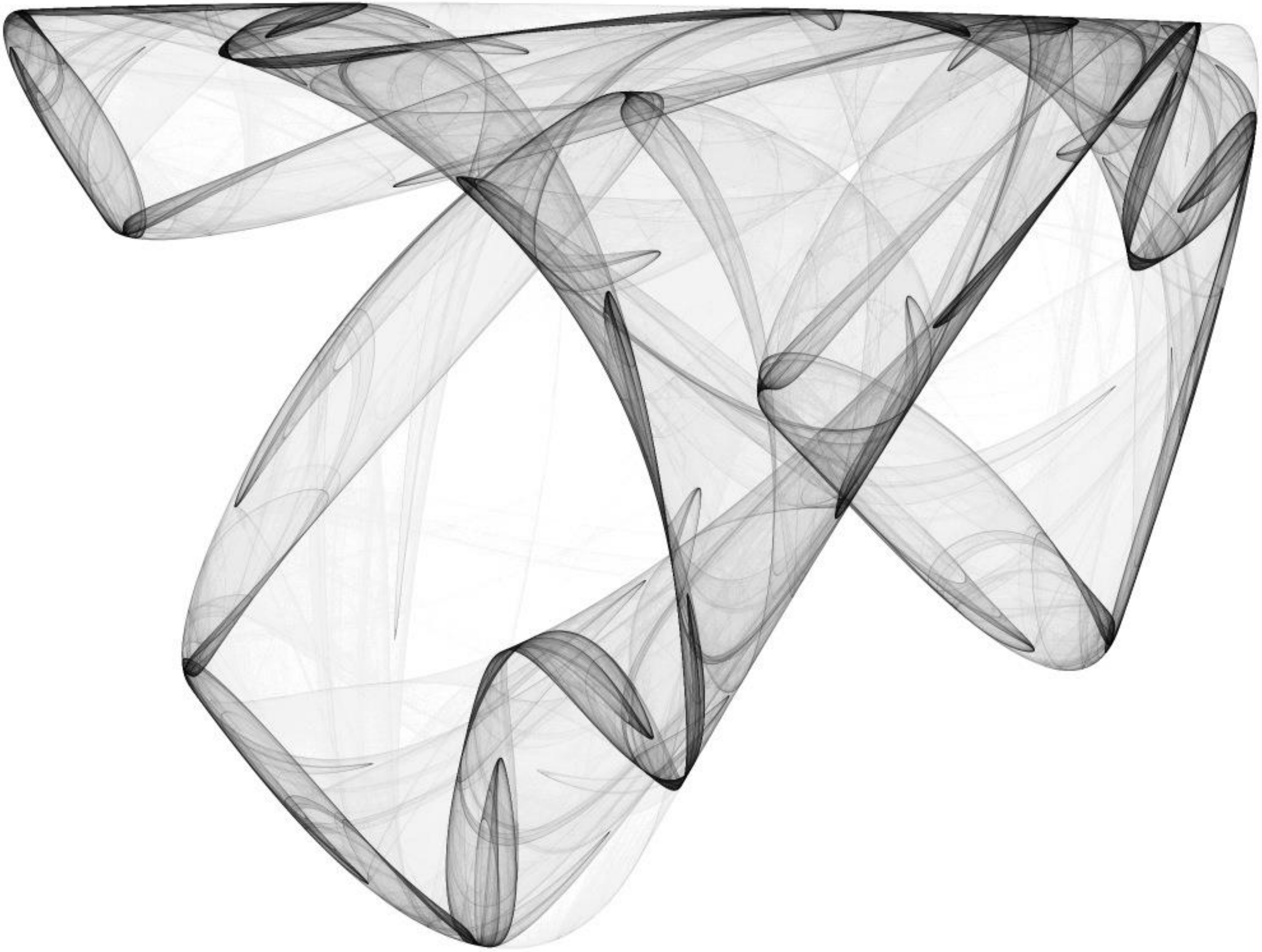
Chaos esthétique (cf. [G 36])

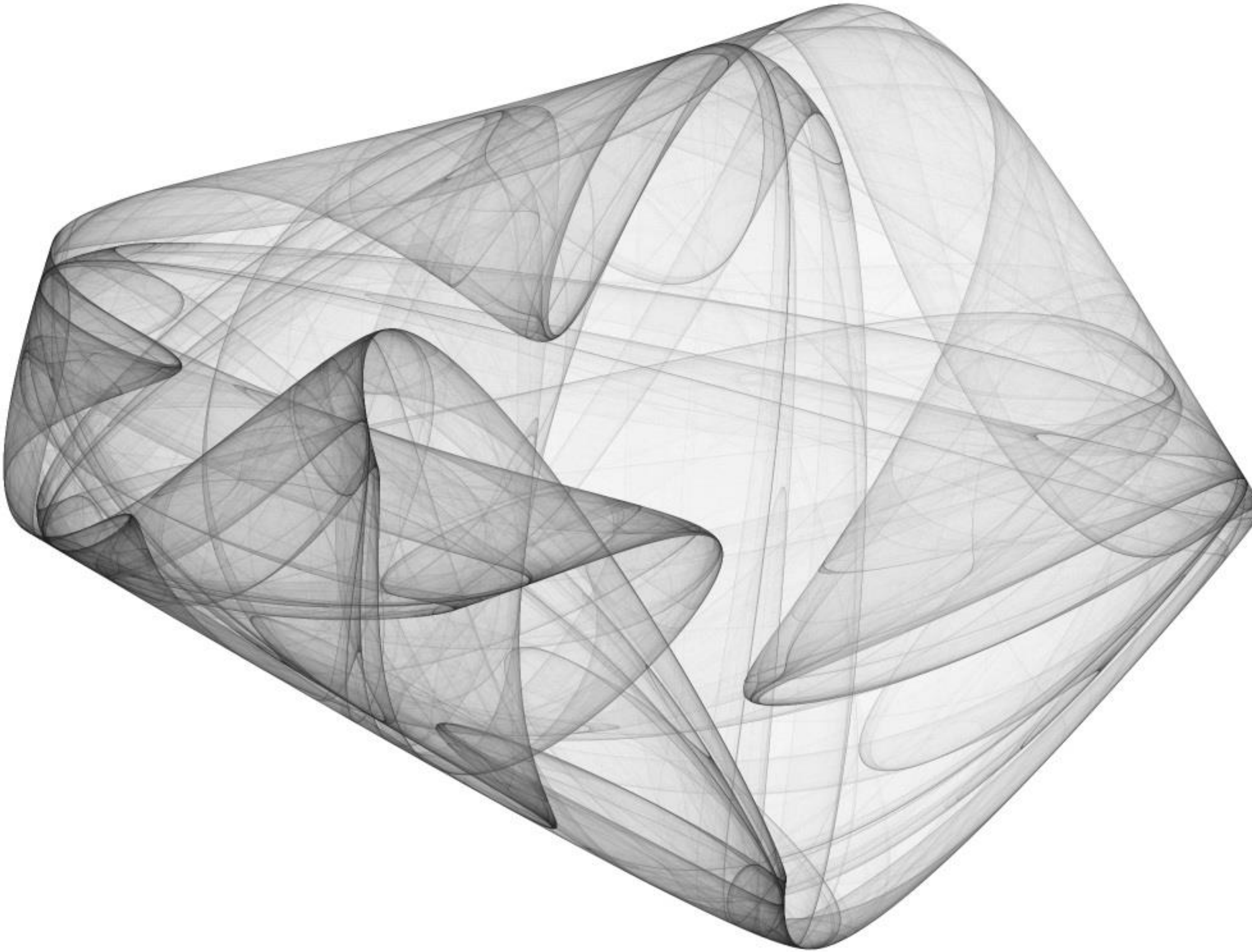


$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + F(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n + F(x_{n+1}) \; ; \; F(x) = \mu x + 2(1-\mu)\dfrac{x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

Chaos esthétique (cf. [G 36])







http://paulbourke.net/fractals/

Fractals, Chaos

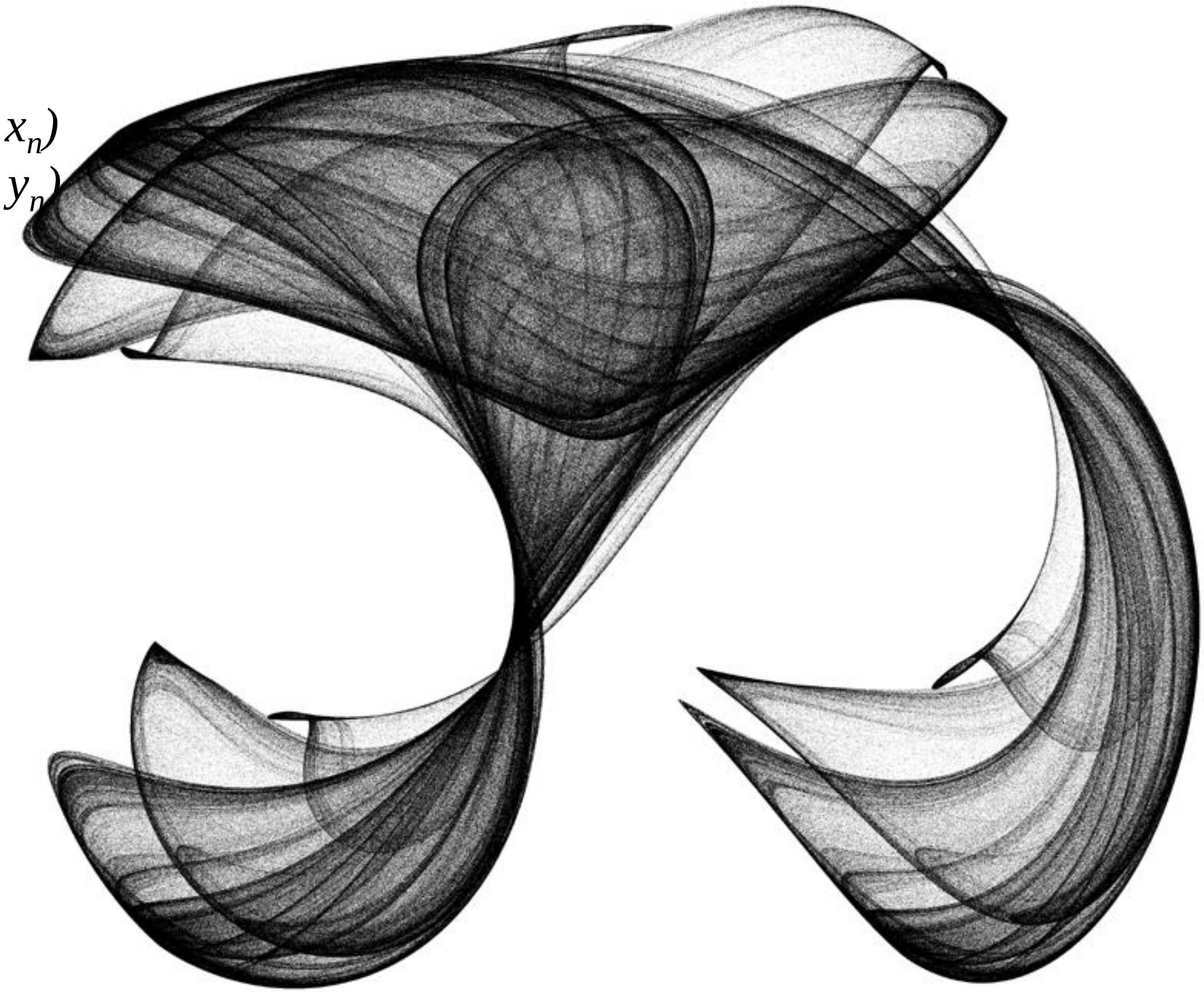
http://paulbourke.net/fractals/clifford/

Clifford Attractors

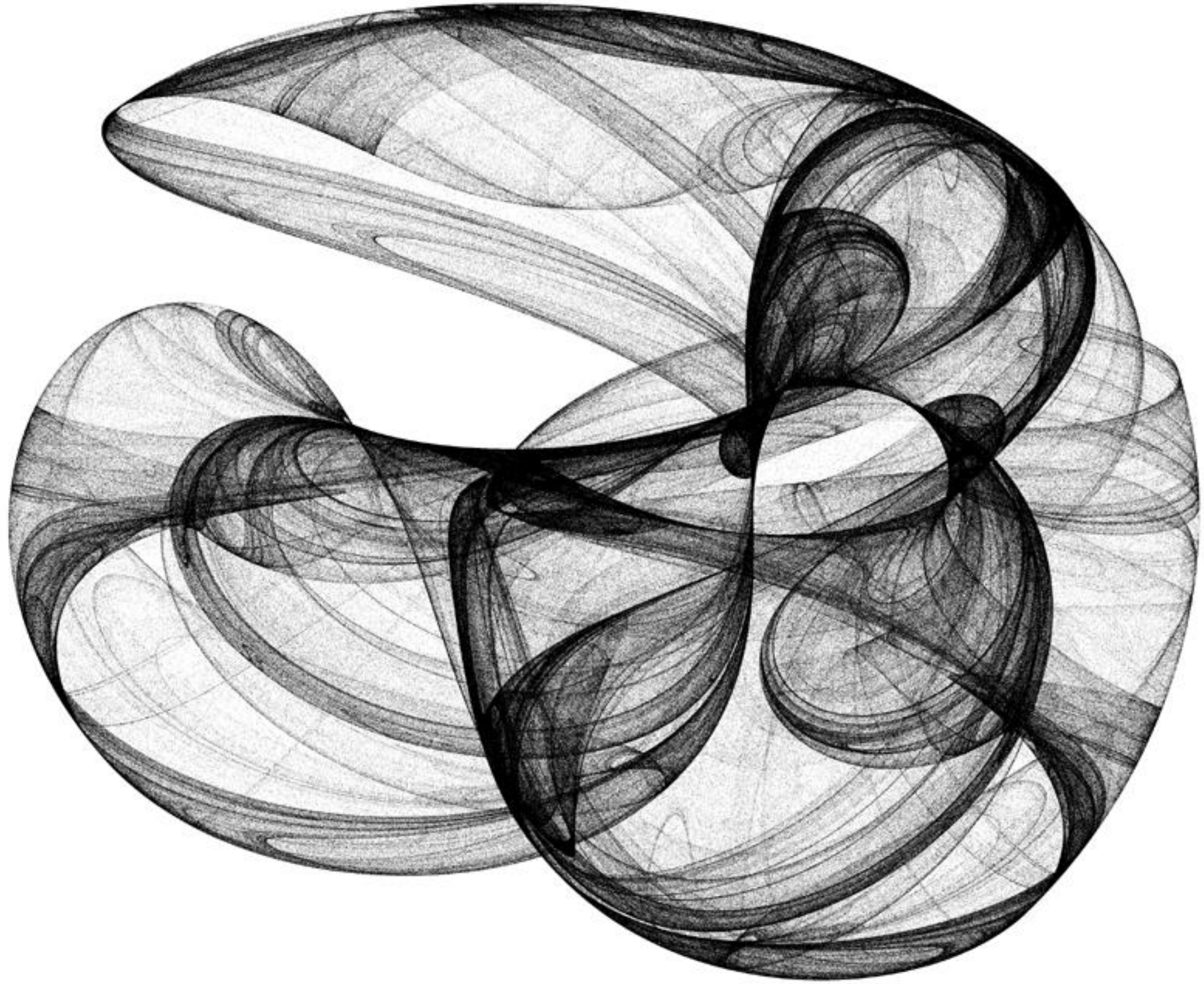
Definition

$$x_{n+1} = \sin(a\, y_n) + c \cos(a\, x_n)$$
$$y_{n+1} = \sin(b\, x_n) + d \cos(b\, y_n)$$

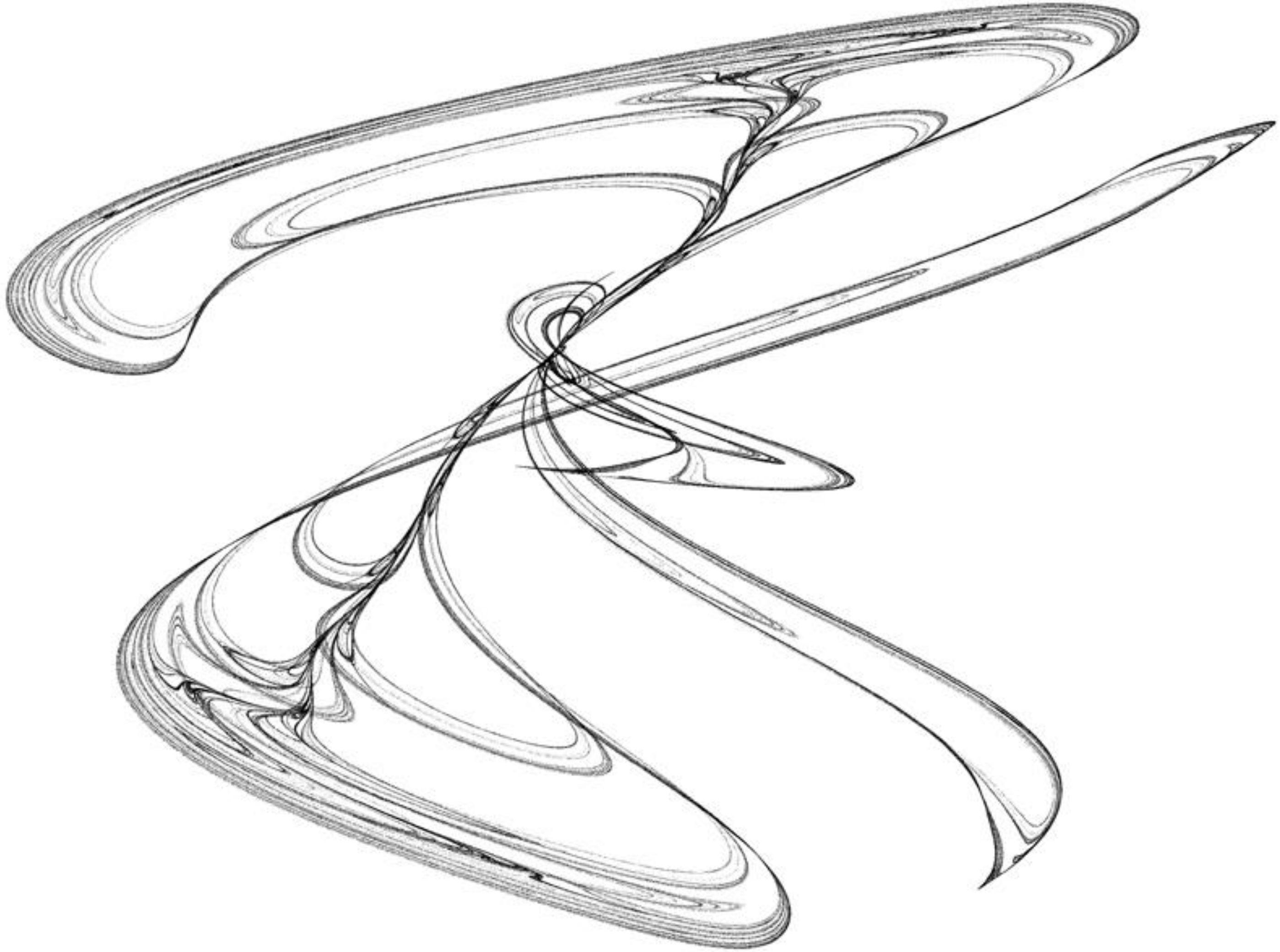
where a, b, c, d
Are parameters that
define each attractor.



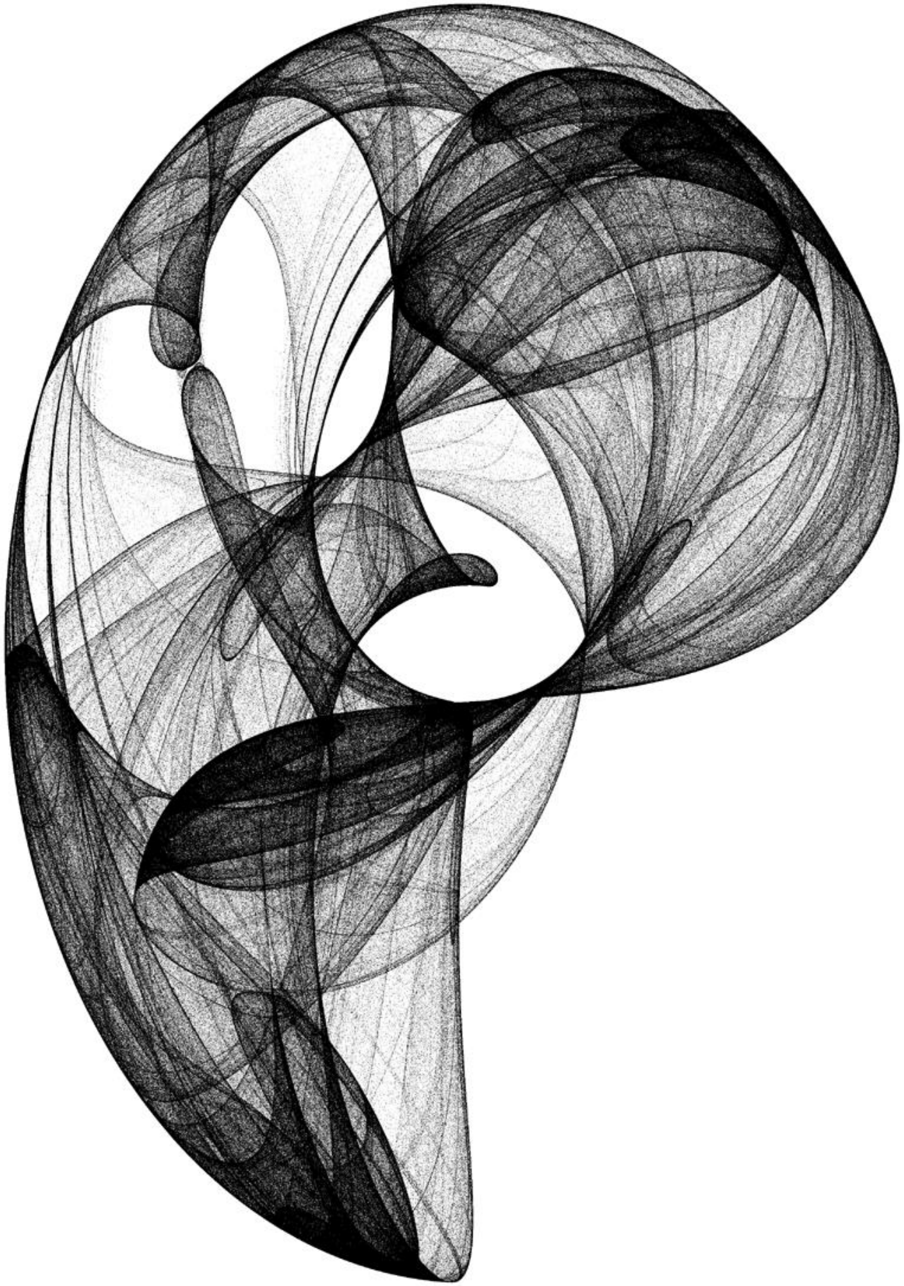
$a = -1.4,\ b = 1.6,\ c = 1.0,\ d = 0.7$



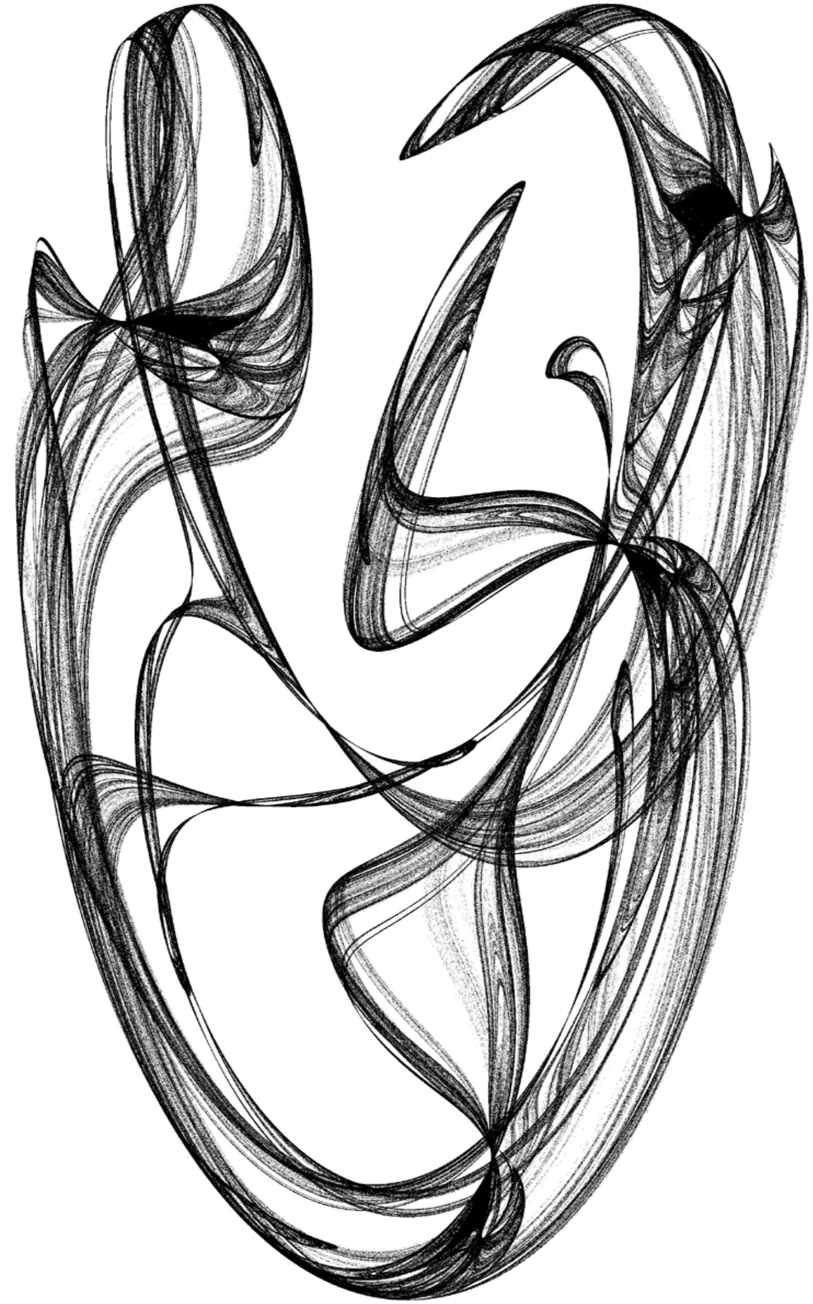
$a = 1.1, b = -1.0, c = 1.0, d = 1.5$



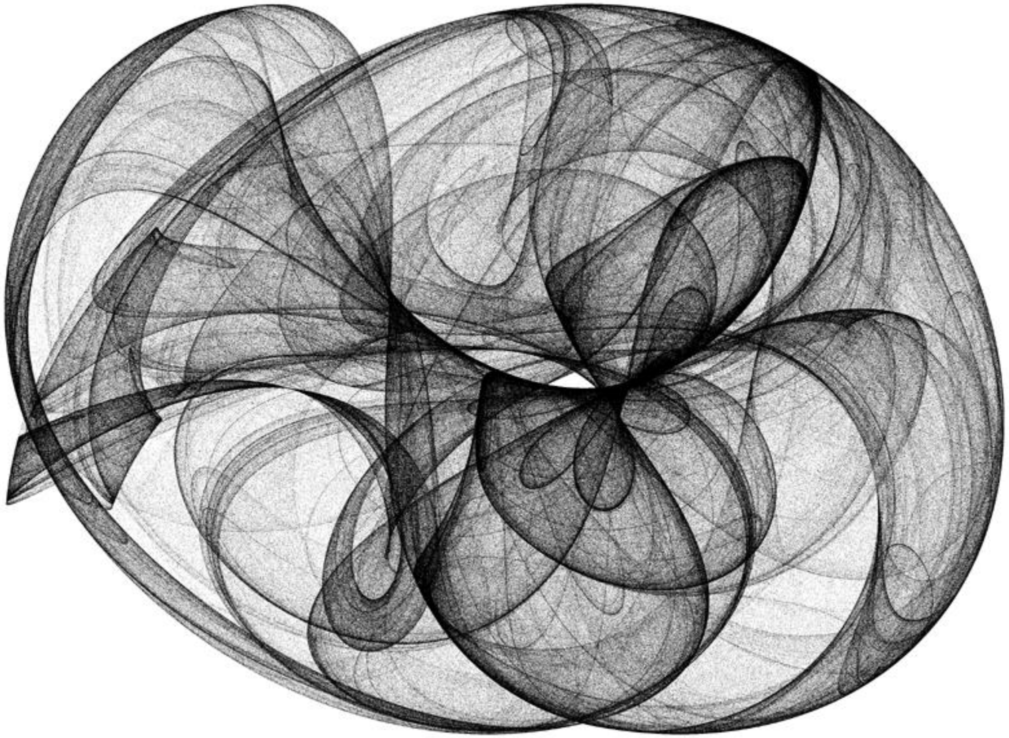
a = 1.6, b = -0.6, c = -1.2, d = 1.6



a = 1.7, *b* = 1.7, *c* = 0.06, *d* = 1.2

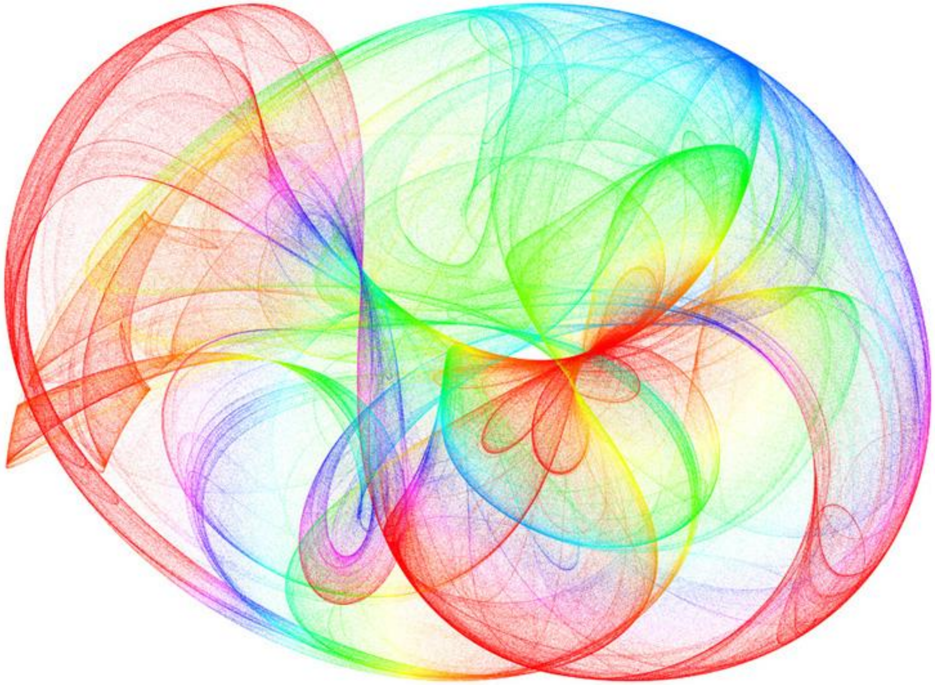


a = 1.3, *b* = 1.7, *c* = 0.5, *d* = 1.4



a = 1.5, b = -1.8, c = 1.6, d = 0.9

Lovely renderings by Thomas Burt.



Let us choose a polynomial of the form:

$$f(x,y) = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x + e\,y + f$$

where a, b, c, d, e, f are constants discussed later and x, y are the usual coordinates in 2-space. The simplest way to turn this polynomial into a map is known as *coordinate rotation* :

$$y_{new} = f(x_{old}, y_{old})$$

$$x_{new} = y_{old}$$

OK, say you, what about those 6 constants? A willy-nilly choice of those will not give you a strange attractor. There may be (probably is) some way to telling if a particular set of constants produces an attractor but, I am not a mathematician, which means I don't really care -- I basically write a program to pick them at random and see what comes out. Most sets diverge, some converge to a point, some converge to a boring loop, and only few produce good-looking pictures. These things are called attractors, not because they're attractive, but because they attract reasonable points

Here is a short C/C++ program I wrote.

What is a strange attractor?

I, of course, do not know the formal, mathematical, definition of Chaotic Attractors, but I will do my best to correctly guess it. Strange Attractor is a collection of points such that each point is a function of another point What kind of function? Everything from polynomials to transcendentals. Like a randomly-appearing mosaic - instead of individual features appearing one after the other, dots light up and eventually compose distinct shapes.

Bibliografia minima

Bertuglia C.S., Vaio, F. Non linearità, caos e complessità, Boringhieri, 2003.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004) Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici, Bruno Mondadori, 2004.

Gleick J. Caos. La nascita di una nuova scienza, Sansoni, Firenze, 1996

Ruelle D. Caso e Caos, Boringhieri, 1992.

Stewart, I. Dio gioca a dadi? La nuova matematica del caos, Boringhieri 1993.