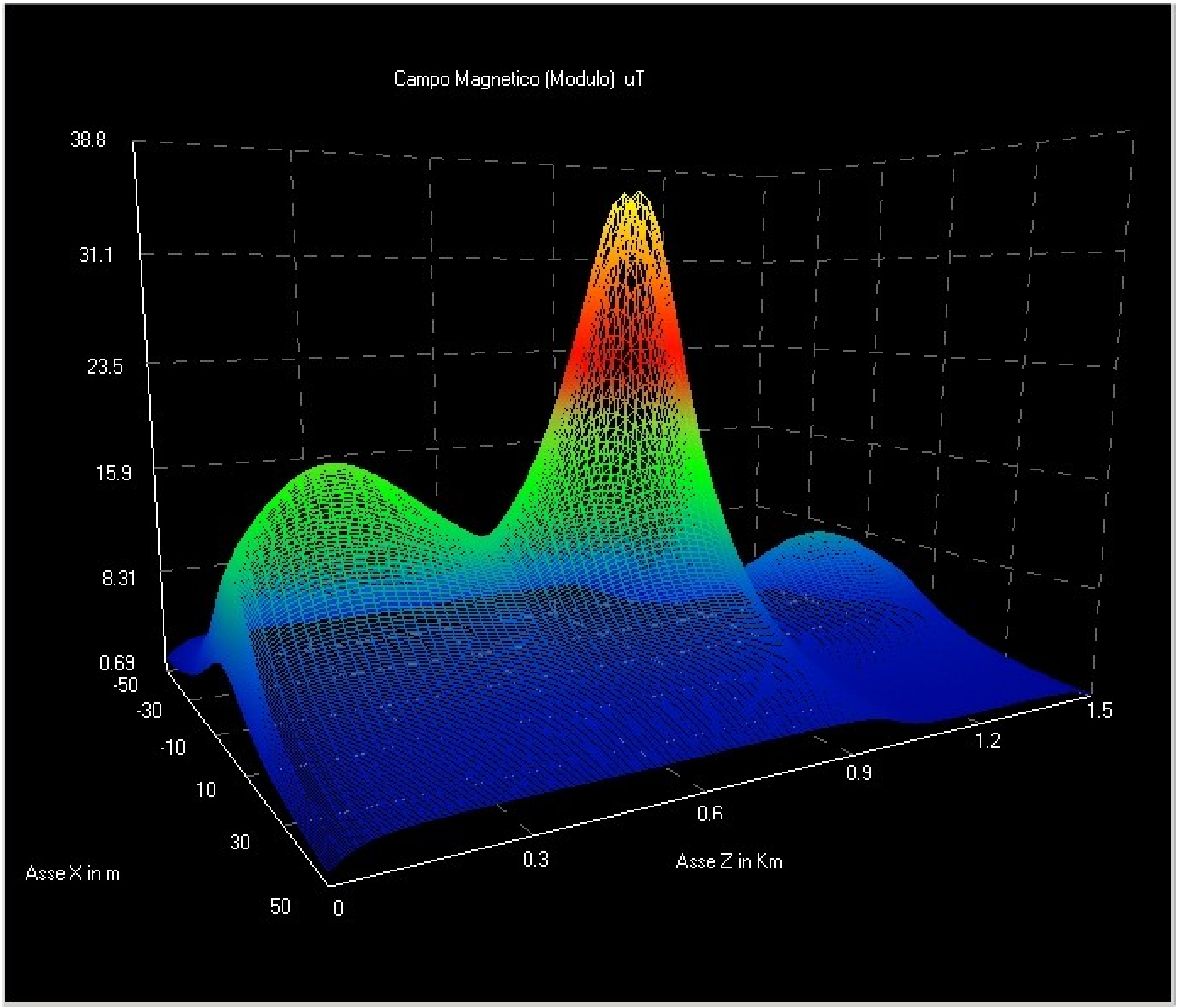
Incorporare i modelli matematici

nella didattica quotidiana

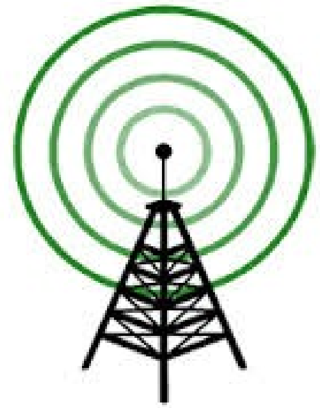


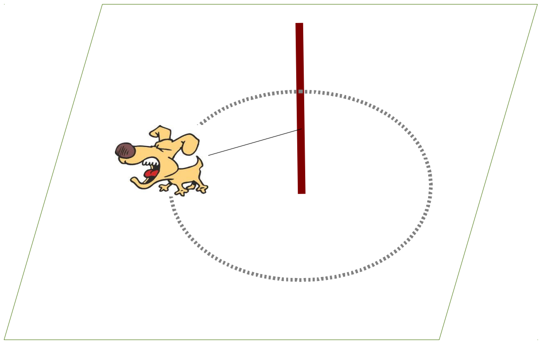
Un modello è un oggetto (concreto o astratto)

che possiede *alcune* delle caratteristiche dell'originale.

Un modello matematico è un modello

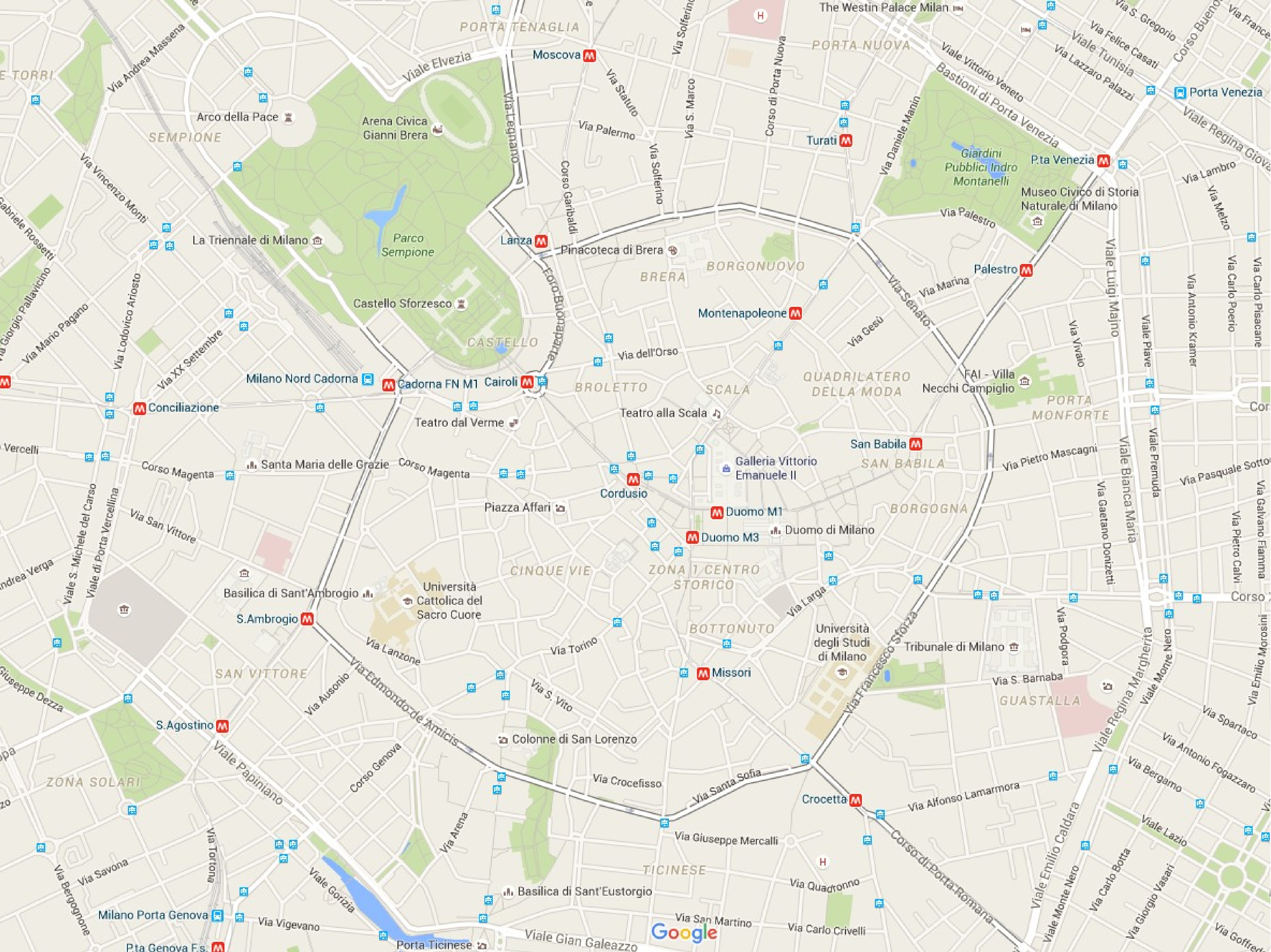
costruito usando oggetti matematici.



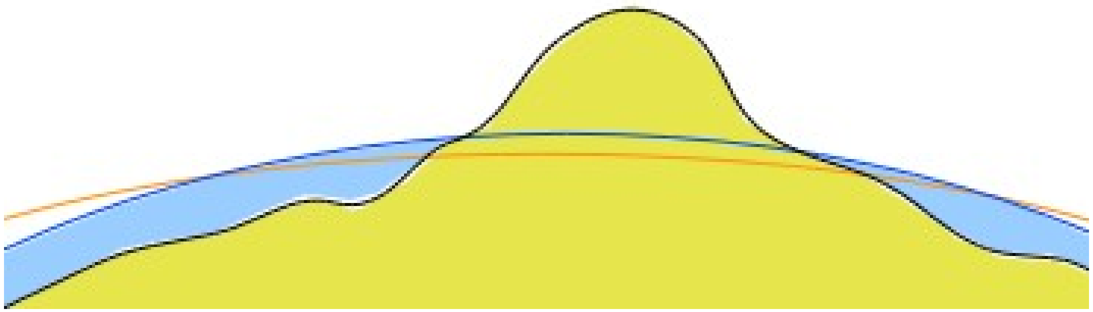


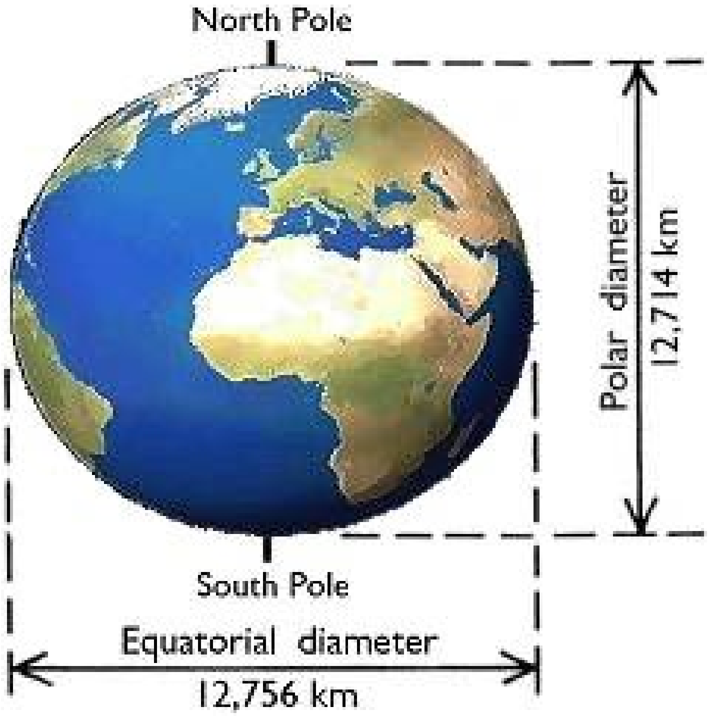
Il modello, sotto tanti punti di vista,
è più facile da manipolare
dell'oggetto o del fenomeno completo.

CHE FORMA HA LA TERRA?



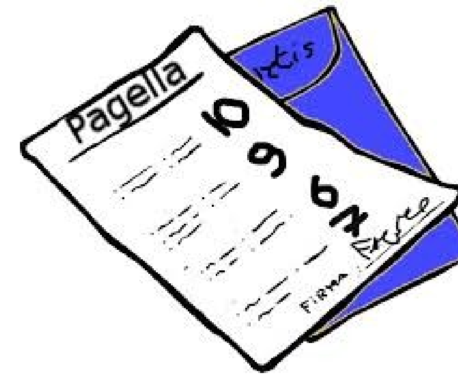
PORTA TENAGLIA
PORTA NUOVA
The Westin Palace Milan
Moscova
Viale Elvezia
Via Andrea Massena
Arco della Pace
SEMPIONE
Arena Civica Gianni Brera
Via Legnano
Via Statuto
Via Palermo
Via Solferino
Via S. Marco
Corso di Porta Nuova
Turati
Via Daniele Manin
Viale Vittorio Veneto
Bastioni di Porta Venezia
Via Felice Casati
Viale Tunisia
Via Lazzaro Palazzi
Via S. Gregorio
Corso Buenos
Porta Venezia
Viale Regina Giova
Giardini Pubblici Indro Montanelli
P.ta Venezia
Via Lambro
Via Melzo
Museo Civico di Storia Naturale di Milano
Via Palestro
Via Vincenzo Monti
Gabriele Rossetti
La Triennale di Milano
Parco Sempione
Lanza
Corso Garibaldi
Pinacoteca di Brera
BORGONUOVO
BRERA
Palestro
Via Marina
Via Senato
Viale Luigi Majno
Via Carlo Poerio
Via Carlo Pisacane
Via Antonio Kramer
Viale Piave
Via Vivaio
Castello Sforzesco
Foro Buonaparte
Montenapoleone
Via Gesù
Via Giorgio Pallavicino
Via Mario Pagano
Via Lodovico Ariosto
Via XX Settembre
CASTELLO
Via dell'Orso
QUADRILATERO DELLA MODA
FAI - Villa Necchi Campiglio
PORTA MONFORTE
Milano Nord Cadorna
Cadorna FN M1
Cairoli
BROLETTO
SCALA
Conciliazione
Teatro dal Verme
Teatro alla Scala
San Babila
SAN BABILA
Via Pietro Mascagni
Via Pasquale Sotto
Vercelli
Corso Magenta
Santa Maria delle Grazie
Galleria Vittorio Emanuele II
Cordusio
Viale Bianca Maria
Viale Premuda
Via Gaetano Donizetti
Piazza Affari
Duomo M1
Duomo di Milano
BORGOGNA
Via Galvano Fiamma
Via Pietro Calvi
Via San Vittore
Viale S. Michele del Carso
Viale di Porta Vercellina
Andrea Verga
Duomo M3
CINQUE VIE
ZONA 1 CENTRO STORICO
Basilica di Sant'Ambrogio
Università Cattolica del Sacro Cuore
S.Ambrogio
Via Larga
Università degli Studi di Milano
BOTTONUTO
Via Lanzone
Via Torino
Tribunale di Milano
Via Podgora
Via Francesco Sforza
Via S. Barnaba
SAN VITTORE
Via Edmondo de Amicis
Via Ausonio
Via S. Vito
Missori
GUASTALLA
Viale Regina Margherita
Viale Monte Nero
Via Emilio Morosini
Giuseppe Dezza
S.Agostino
Via Spartaco
Via Antonio Fogazzaro
Colonne di San Lorenzo
Viale Papiniano
Corso Genova
ZONA SOLARI
Via Crocefisso
Via Santa Sofia
Via Bergamo
Crocetta
Via Alfonso Lamarmora
Viale Lazio
Via Tortona
Via Arena
Via Giuseppe Mercalli
Viale Emilio Caldara
Via Savona
Viale Gorizia
TICINESE
Via Quadronno
Corso di Porta Romana
Via Carlo Botta
Via Bergognone
Basilica di Sant'Eustorgio
Viale Monte Nero
Via Giorgio Vasari
Milano Porta Genova
Via Vigevano
Via San Martino
Via Carlo Crivelli
P.ta Genova F.S.
Porta Ticinese
Viale Gian Galeazzo
Via Goffred
Corso
Google




North Pole
Polar diameter
12,714 km
South Pole
Equatorial diameter
12,756 km


voi siete qui

I numeri come modello



John ha bevuto 3 tazze di tè in un’ora.

Quante tazze beve in un giorno?

Quante bibite bevono gli studenti della tua scuola in una settimana?

Lo zio Michele porta 26 figurine, e vuole suddividerle tra i suoi 6 nipoti.

Quante ne darà a ciascuno?

Un autobus cittadino percorre un percorso circolare di 12 km di lunghezza.

Quante vetture devono essere in servizio per garantire una cadenza di 15 minuti ?

Alberto e Pierpaolo sono compagni di classe. Alberto abita a 25 km da scuola, Pierpaolo a 12 km.

Quanto distano tra di esse le loro case?

Federica ha 8 tra amici e amiche, Giovanna ne ha 9.

Federica e Giovanna decidono di dare una festa insieme, ed invitano tutti i loro amici.

Quanti ragazzi e ragazze parteciperanno?

- problemi in cui non c'è una sola soluzione
- problemi con dati mancanti
- problemi con dati in eccesso

Nei problemi, quando si rivela necessario utilizzare dati o formulare ipotesi non presenti nel testo, cita la fonte dei dati o formula esplicitamente le tue ipotesi come parte della soluzione.

Eventualmente discuti ipotesi alternative.

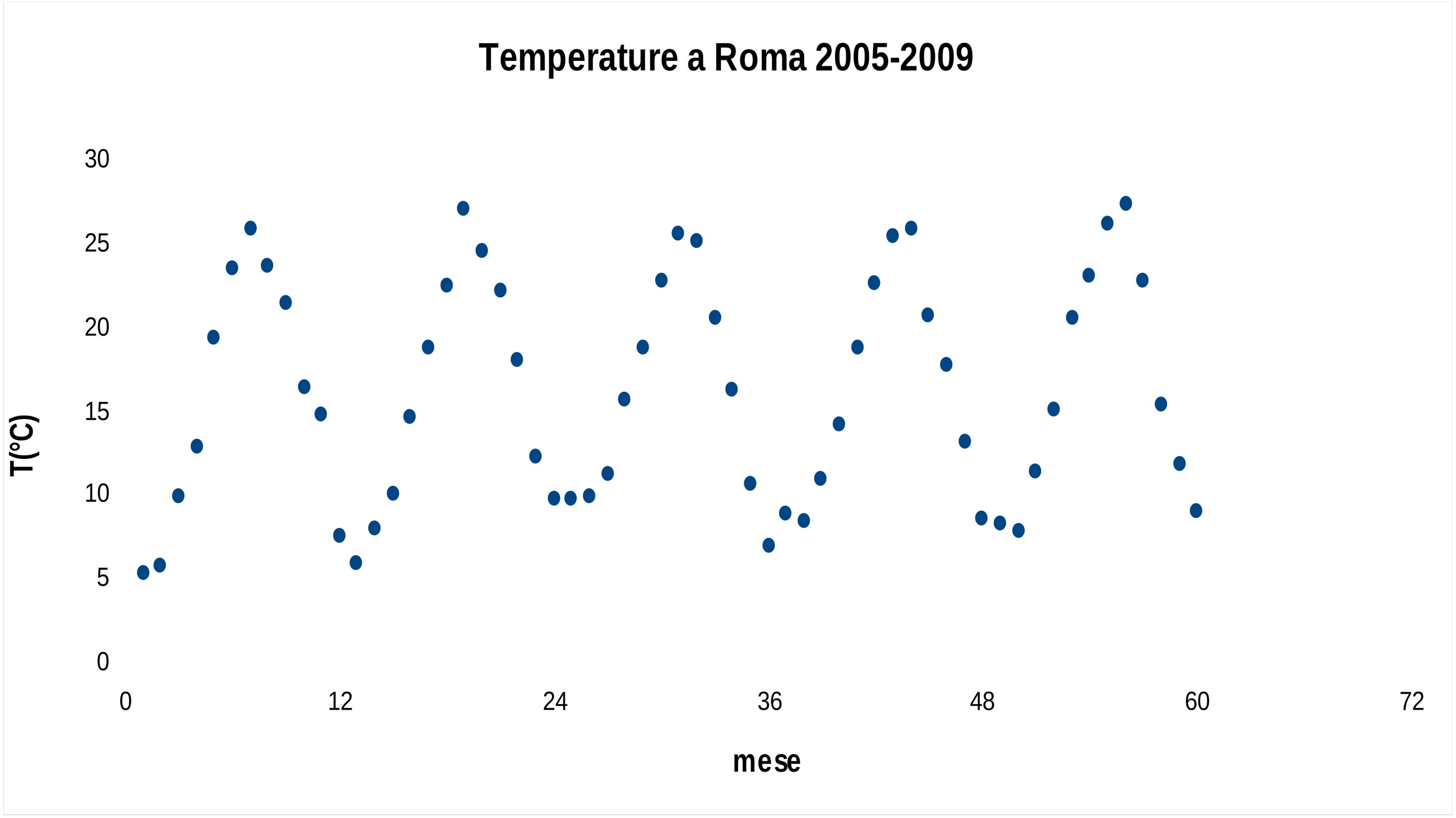
Specifica se le informazioni non sono sufficienti a risolvere il problema e non è possibile formulare ipotesi ragionevoli.

Una funzione per descrivere i dati sperimentali

- Trovare i parametri per cui una certa espressione approssima meglio i dati
- Scegliere una funzione tra un gruppo proposto
- Lavorare senza rete, solo a partire dai dati

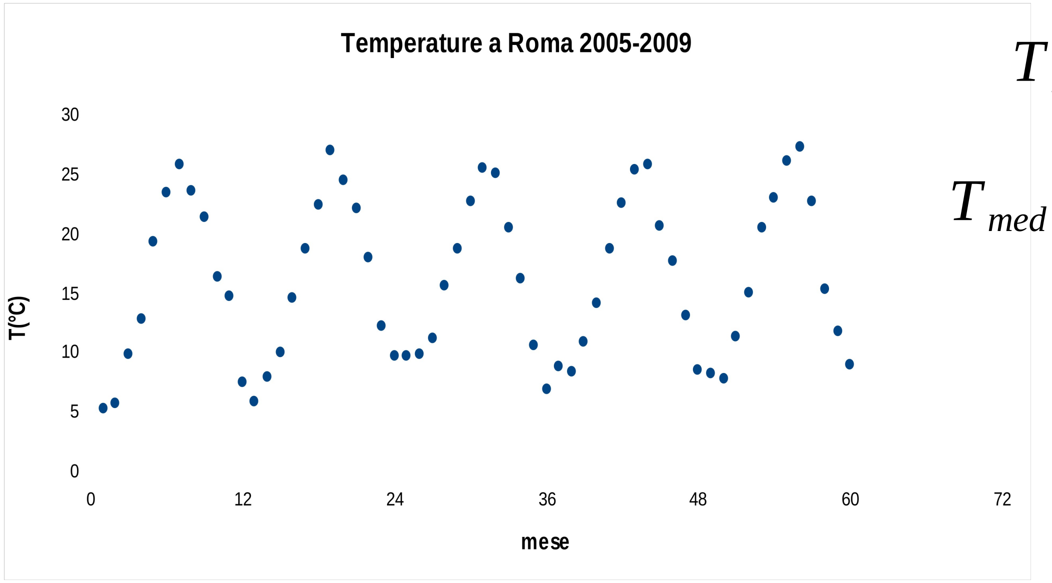
Problema:

Scrivete una formula che descriva l'andamento annuo della temperatura a Roma in funzione della data



Problema:

Scrivete una formula che descriva l'andamento annuo della temperatura a Roma in funzione della data



$$T_{min} \approx 7°\,\mathrm{C} \qquad T_{max} \approx 27°\,\mathrm{C}$$

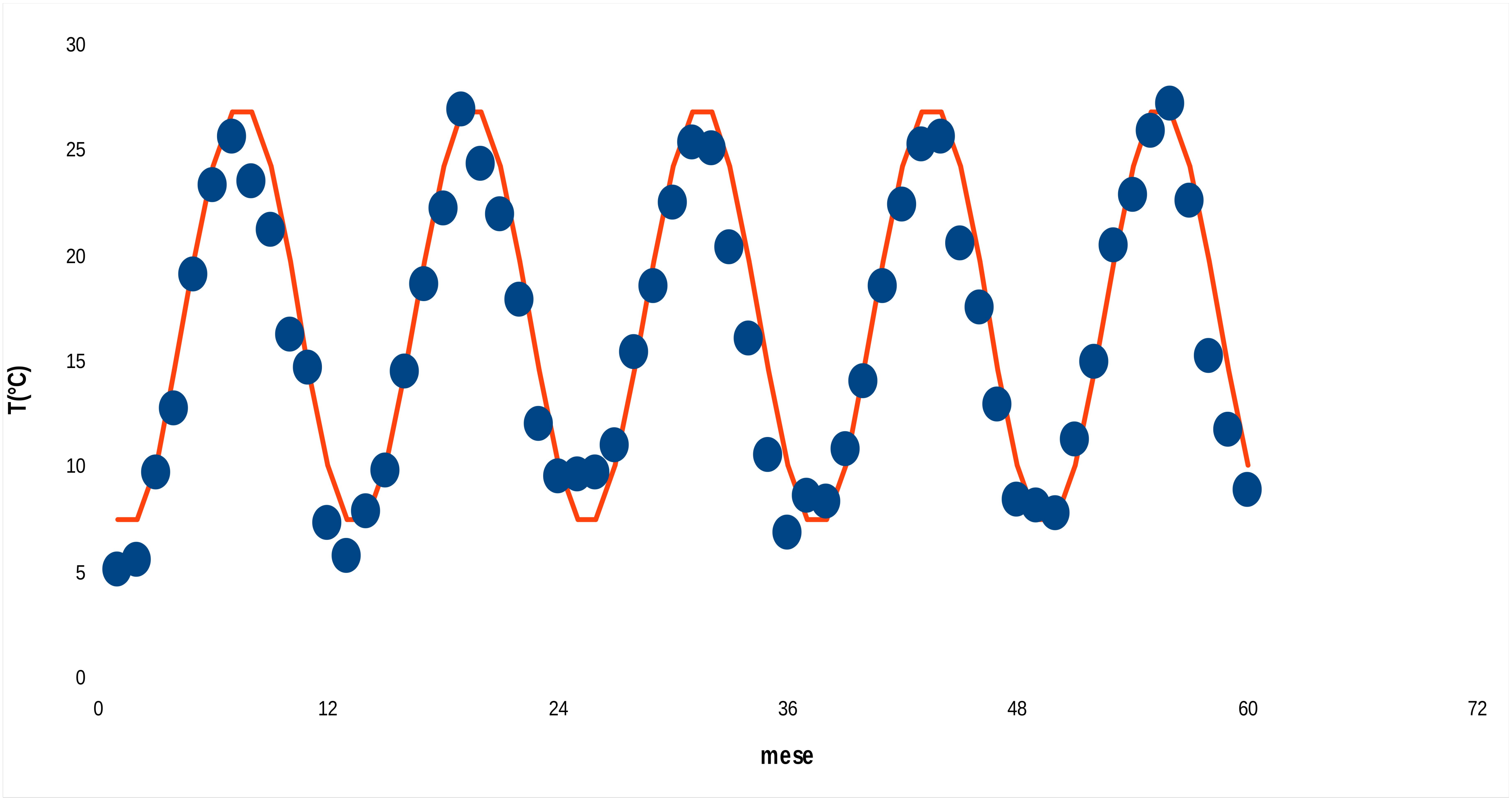
$$T_{med} \approx \frac{27+7}{2} = 17\,°\mathrm{C} \qquad A = \frac{27-7}{2} = 10\,°\mathrm{C}$$

$$P = 12\,\mathrm{mesi} = 365\,\mathrm{giorni}$$

T max tra luglio e agosto quindi $\phi = -\frac{7{,}5}{12} \cdot 2\pi$

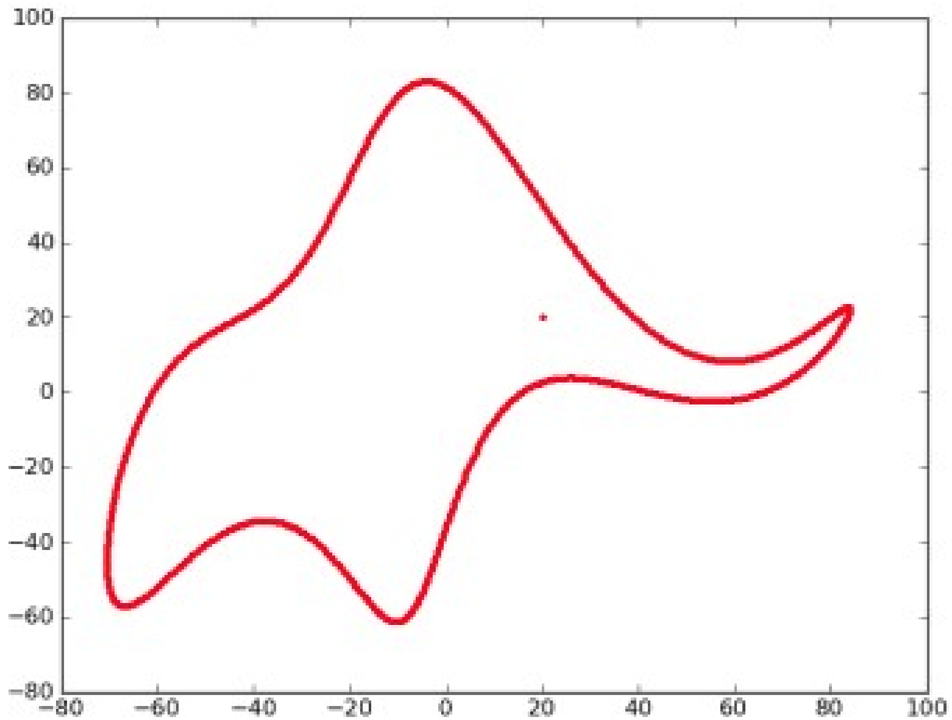
$$T = \overline{T} + A \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{P} + \phi\right) = 17 + 10 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x - 7{,}5}{12}\right)\right)$$

$$T=\bar{T}+A\cdot\cos\left(2\pi\frac{x}{P}+\phi\right)=17+10\cdot\cos\left(2\pi\left(\frac{x-7{,}5}{12}\right)\right)$$



With five free parameters, a theorist could fit the profile of an elephant.

George Gamow (1904-1968)
quoted in *Nature*, June 21, 1990

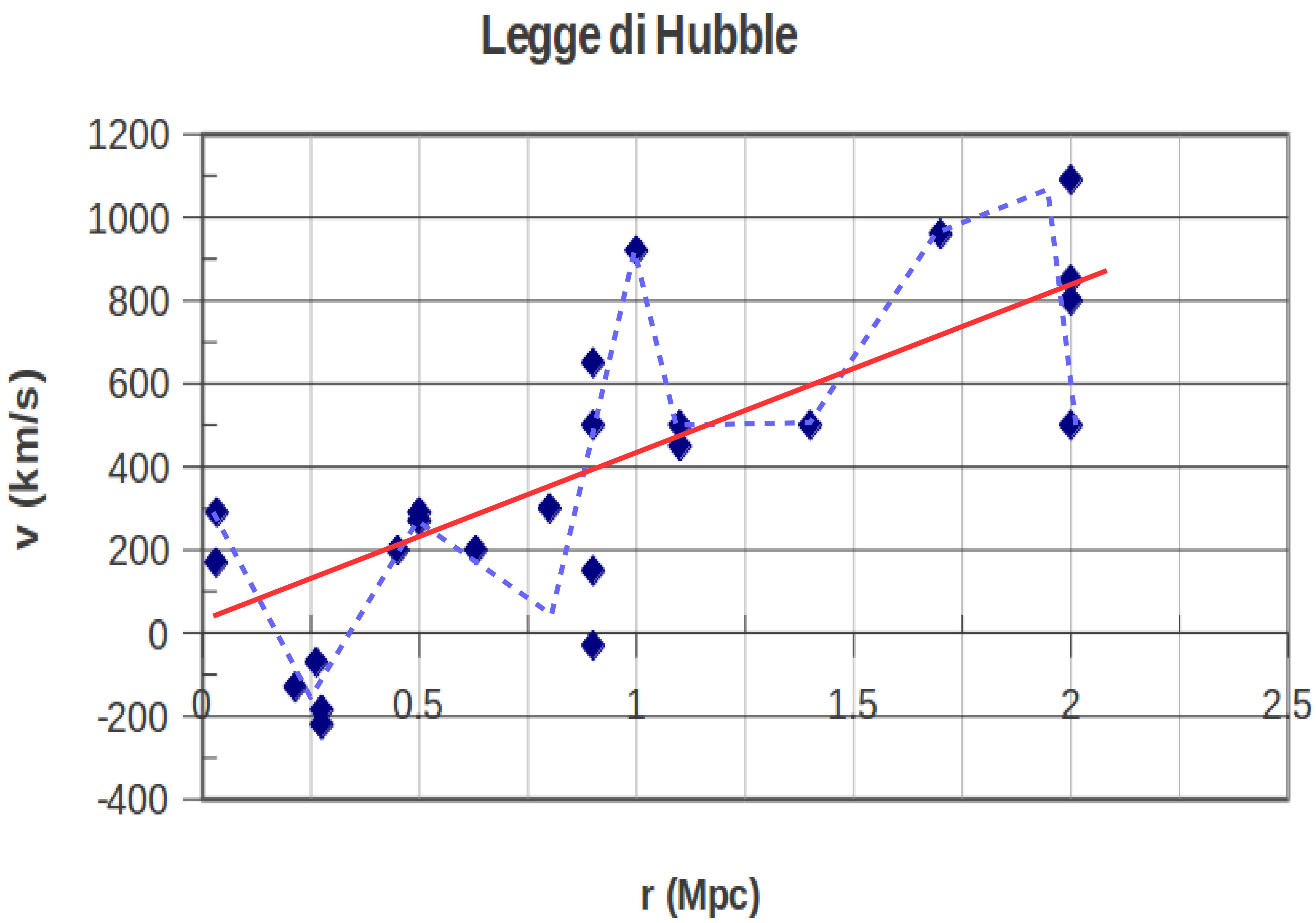


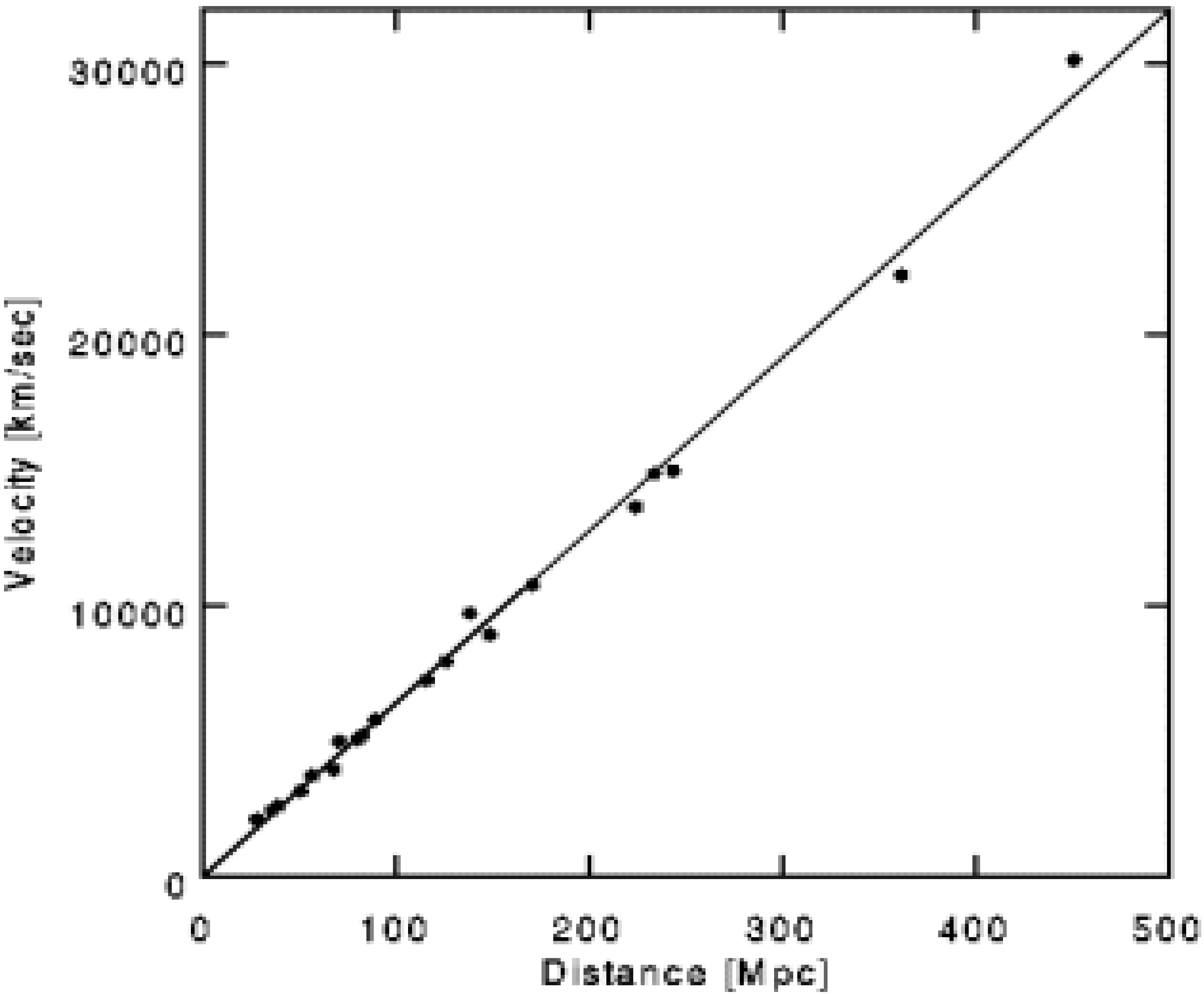
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^x \cos(kt) + B_k^x \sin(kt)),$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k^y \cos(kt) + B_k^y \sin(kt)),$$

Table I. The five complex parameters $p_1, \ldots, p_5$ that encode the elephant including its wiggling trunk.

Parameter	Real part	Imaginary part
$p_1=50-30i$	$B_1^x=50$	$B_1^y=-30$
$p_2=18+8i$	$B_2^x=18$	$B_2^y=8$
$p_3=12-10i$	$A_3^x=12$	$B_3^y=-10$
$p_4=-14-60i$	$A_5^x=-14$	$A_1^y=-60$
$p_5=40+20i$	Wiggle coeff.=40	$x_{eye}=y_{eye}=20$


Legge di Hubble
1200
1000
800
600
400
200
0
-200
-400
v (km/s)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
r (Mpc)



30000
20000
10000
0
0
100
200
300
400
500
Velocity [km/sec]
Distance [Mpc]

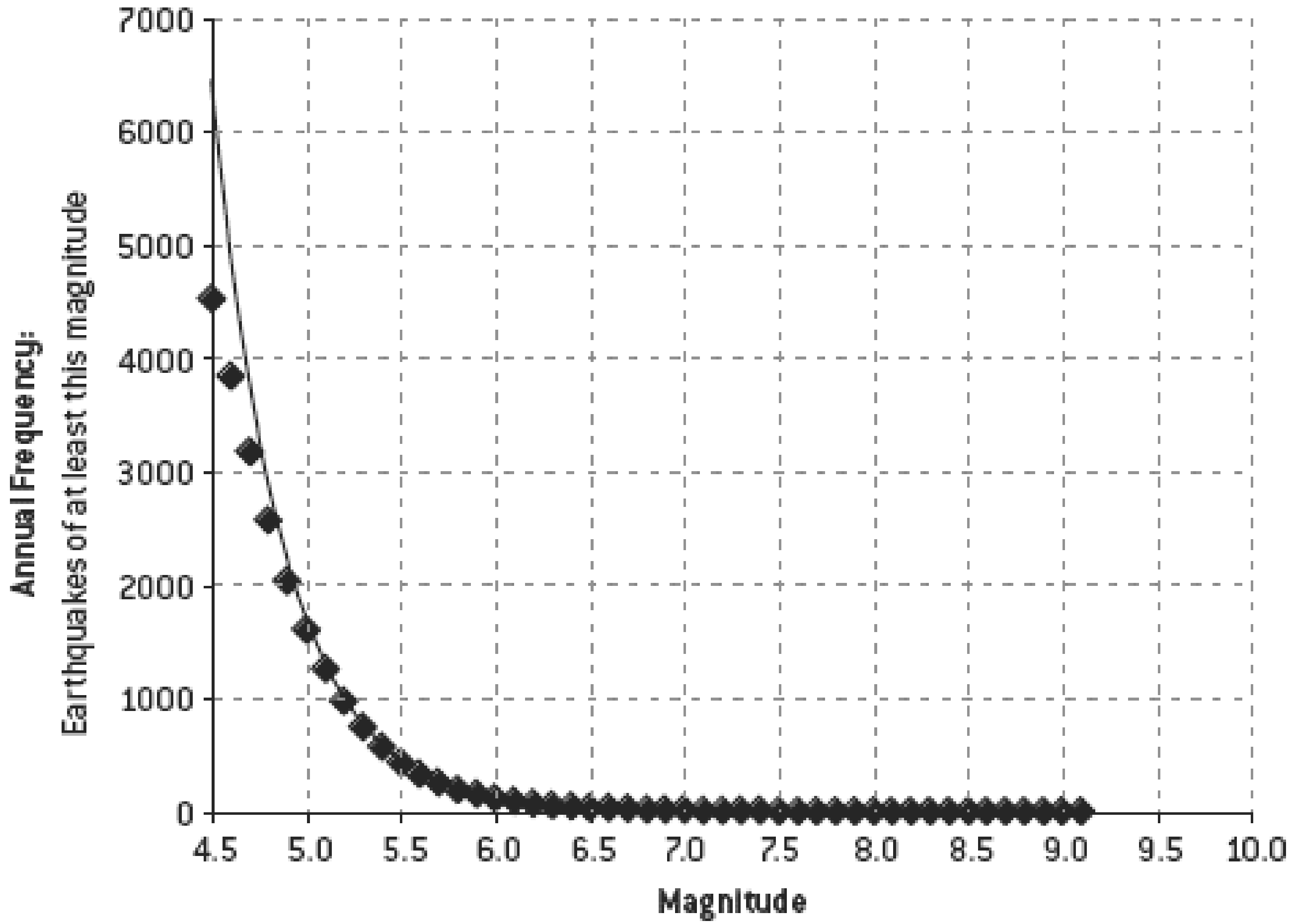


Figure 5-3A: Worldwide Earthquake Frequencies, January 1964–March 2012

da Nate Silver, *The signal and the noise*

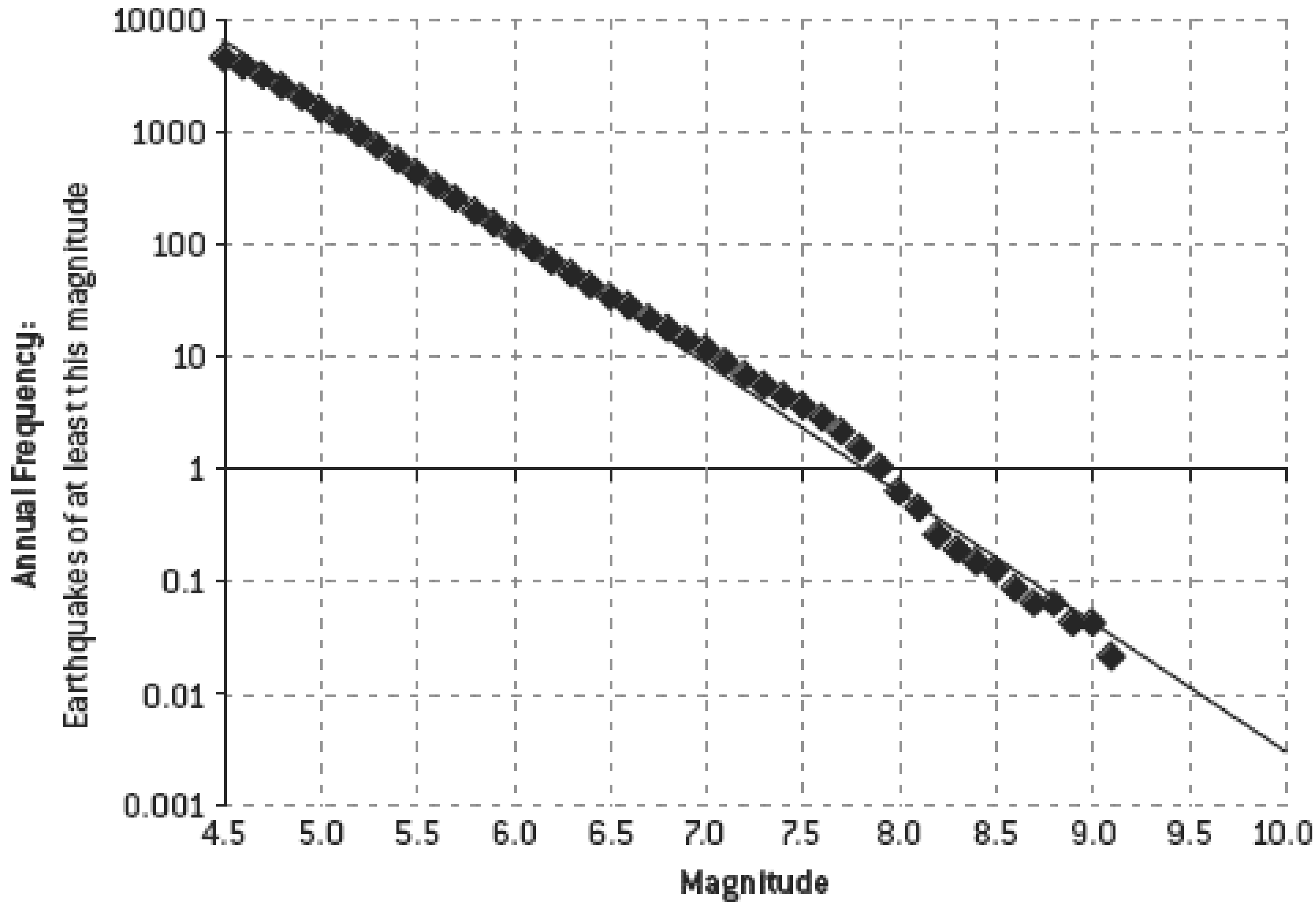


Figure 5-3B: Worldwide Earthquake Frequencies, January 1964–March 2012, Logarithmic Scale

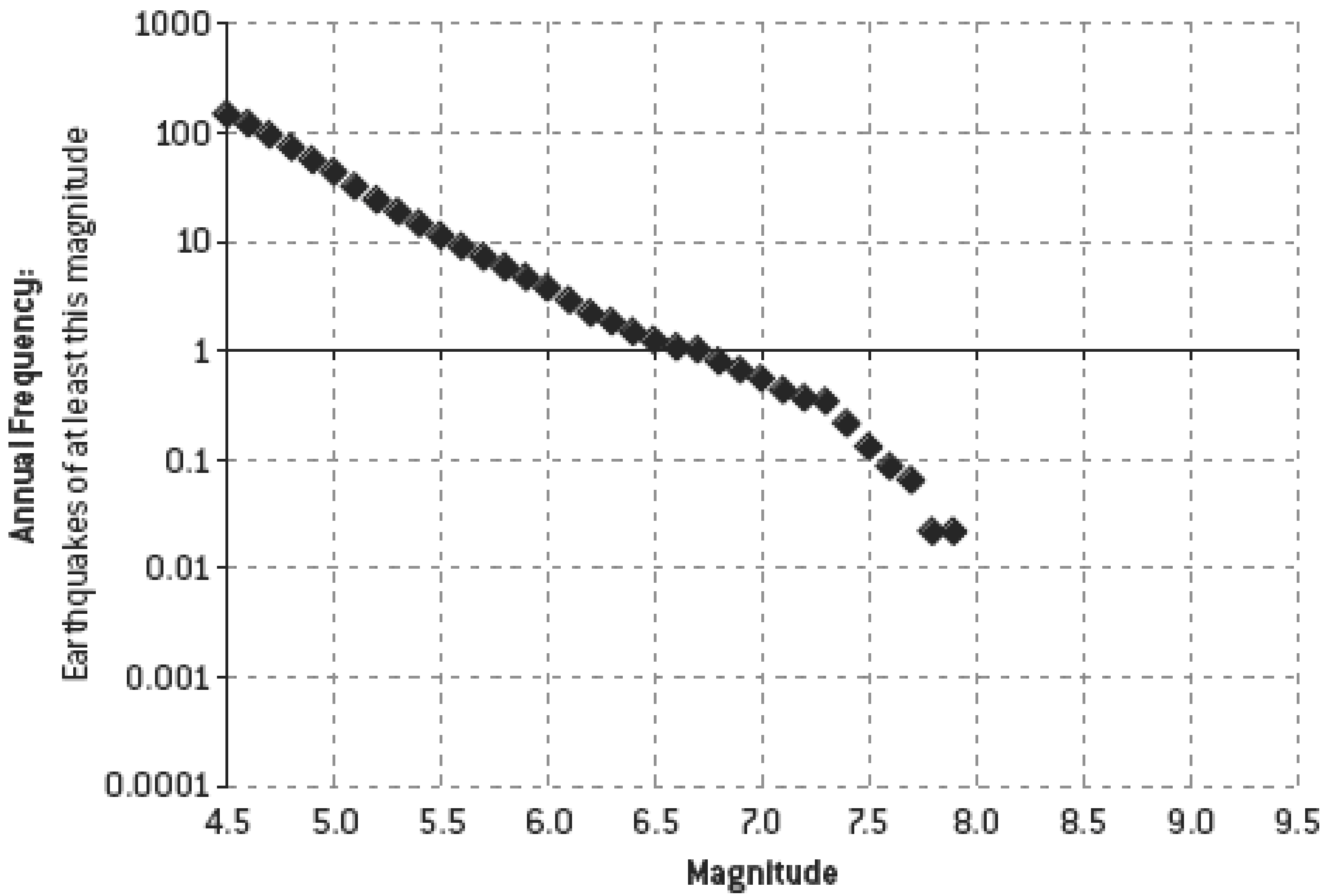


Figure 5-7A: Tōhoku, Japan Earthquake Frequencies January 1, 1964–March 10, 2011

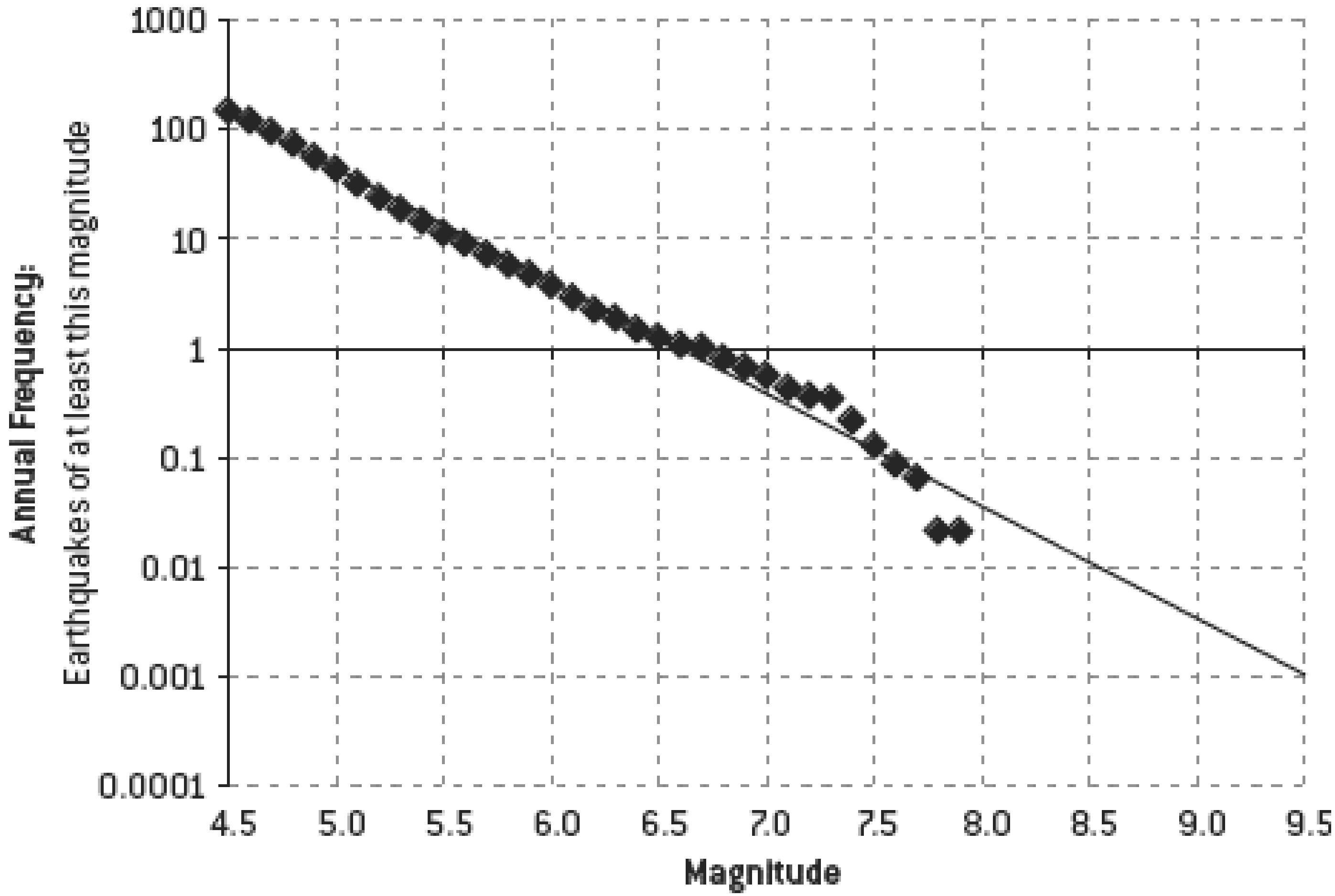
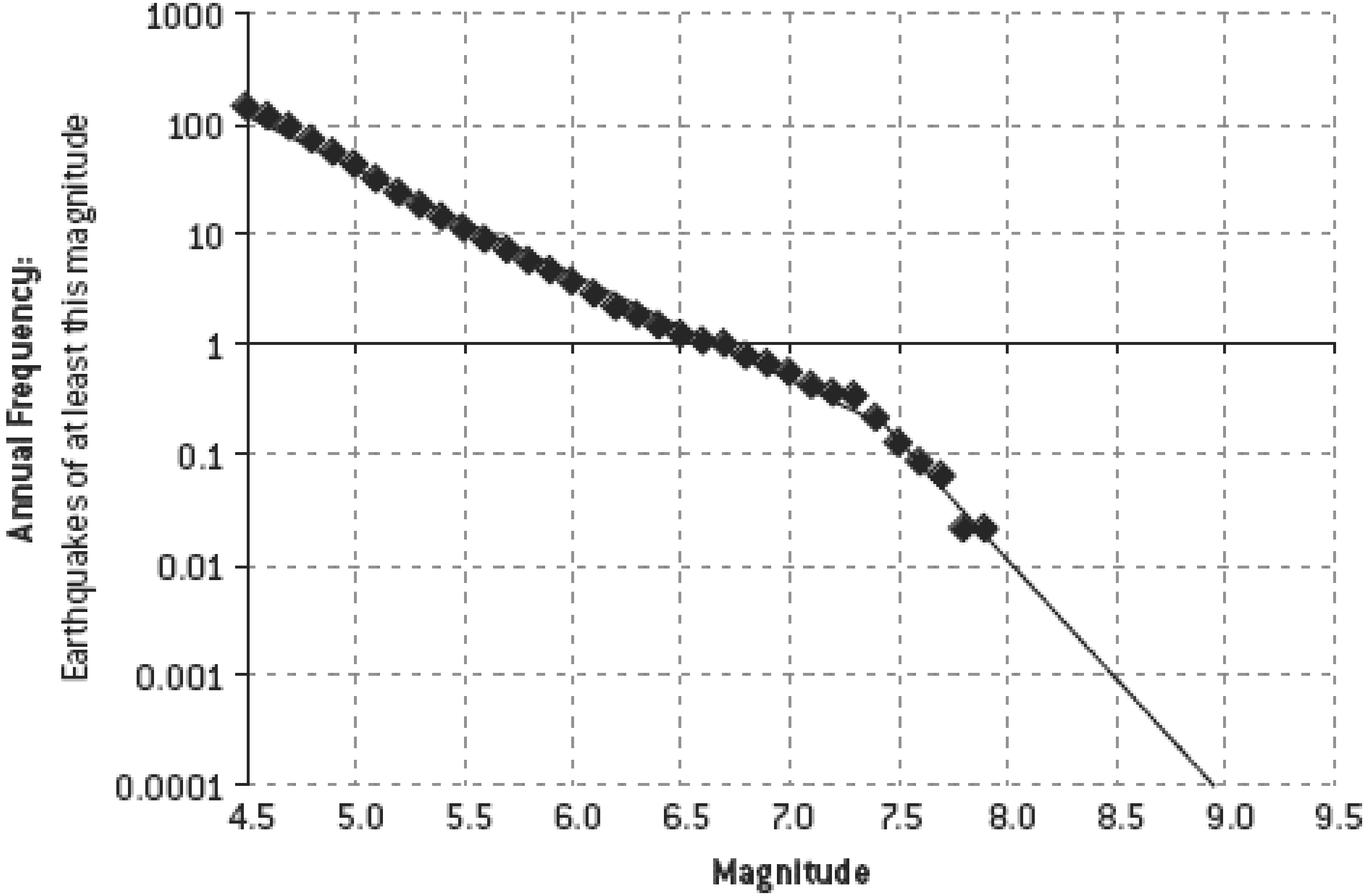


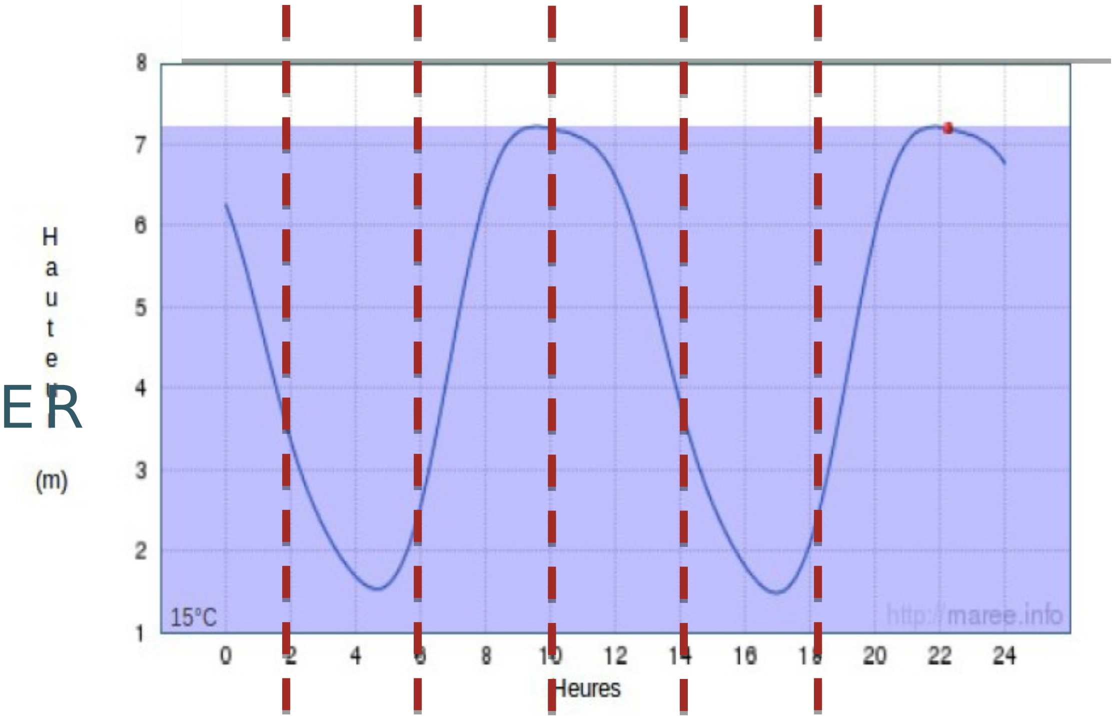
Figure 5-7B: Tōhoku, Japan Earthquake Frequencies Gutenberg-Richter Fit
10, 2011



] Figure 5-7C: Tōhoku, Japan Earthquake Frequencies Characteristic Fit
10, 2011

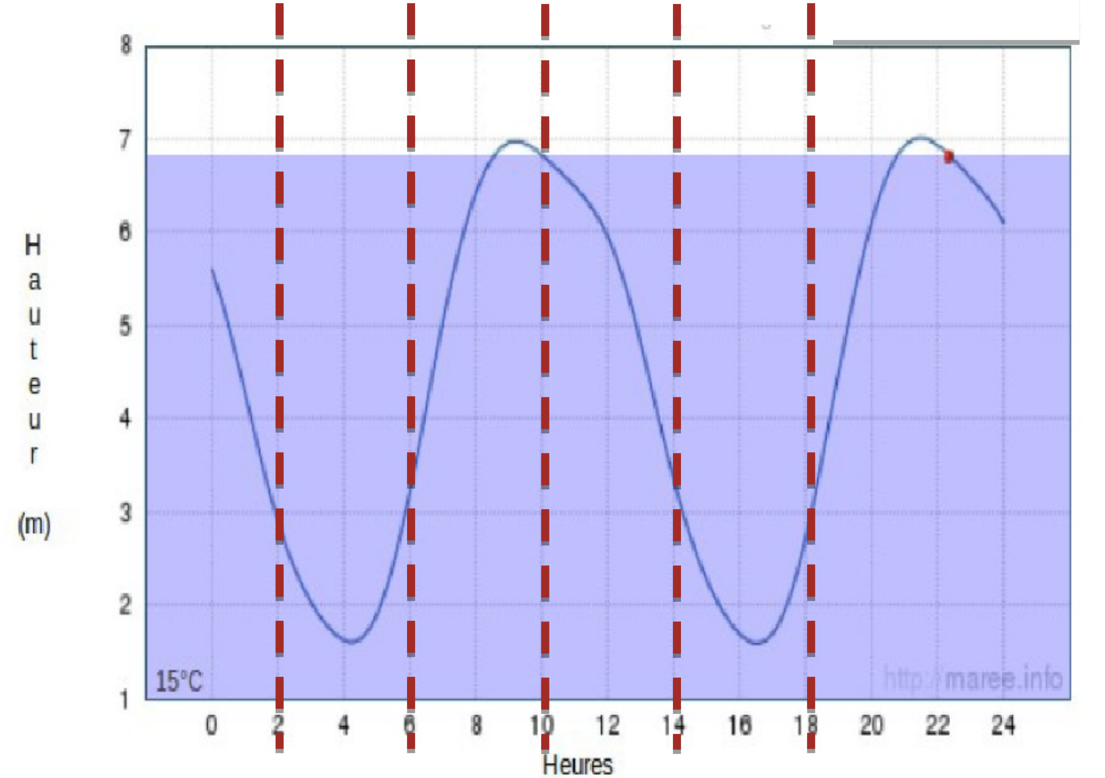
D-day

COURSEULLES SUR MER



30 km di distanza

GRANDCAMP



Un esempio classico: la funzione esponenziale

- **Problema:** la crescita di una popolazione
- **Complicazioni:** componenti religiose, sociali, economiche, politiche...
  Si possono trascurare?
- **I batteri**, con spazio e cibo in abbondanza
  sono abbastanza insensibili ai condizionamenti religiosi e simili...

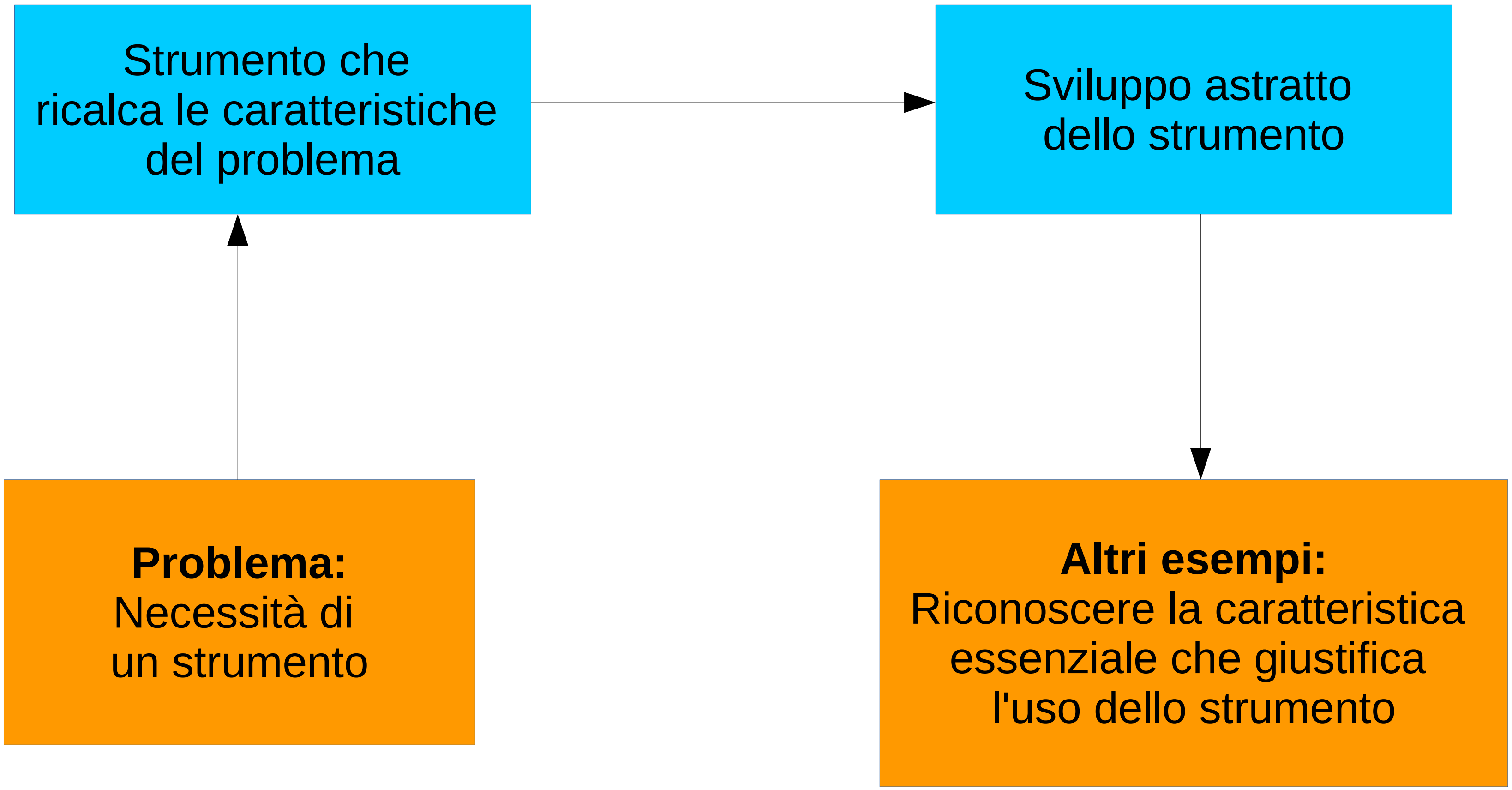
Ipotesi fondamentale: $$\Delta N = a \cdot N \cdot \Delta t$$

La funzione esponenziale: alcuni esempi

Ipotesi fondamentale: $\Delta N = a \cdot N \cdot \Delta t$

- Crescita di una popolazione
- Decadimento radioattivo
- Permanenza di un farmaco (clearance)
- Rendimento di un conto corrente
- L'invenzione degli scacchi
- La crescita economica

Inserire la modellizzazione nel curriculum



Uscite di sicurezza

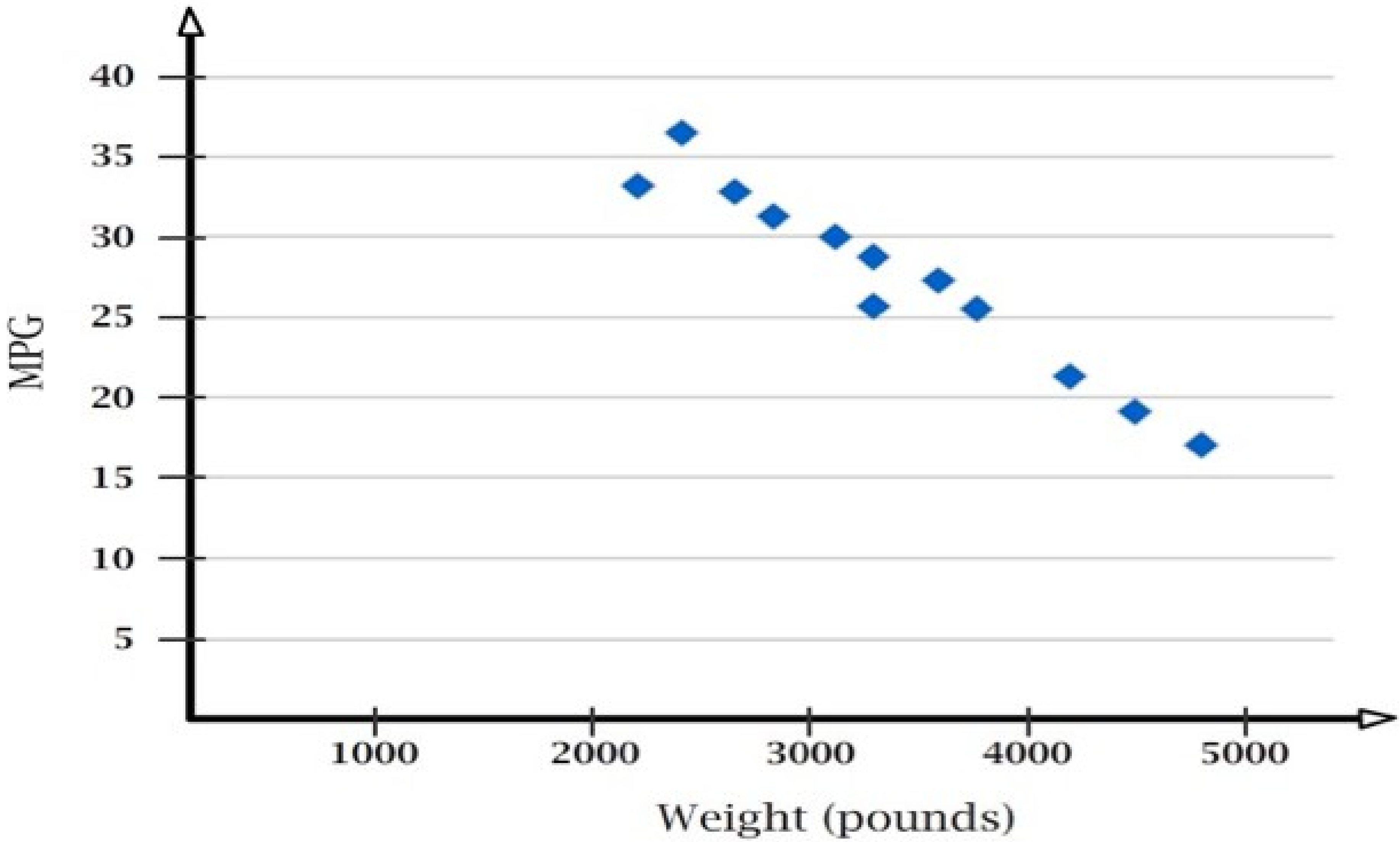
In un palazzo dello sport si deve valutare il numero di uscite di sicurezza necessarie in caso di evacuazione. Costruisci un modello matematico che metta in relazione il numero di uscite con il tempo necessario ad una evacuazione totale, cercando di utilizzare dati realistici.
Quante porte servirebbero, in base al modello, per evacuare il palazzo in tre minuti?

Uscite necessarie → U.N.
Minuti → M
Persone totali → p.t.
Persone che al minuto possono uscire da ciascuna porta → p.m.

$$U.N. = \frac{(p.t.)}{[(p.m.)\cdot(M)]}$$


南 口
9

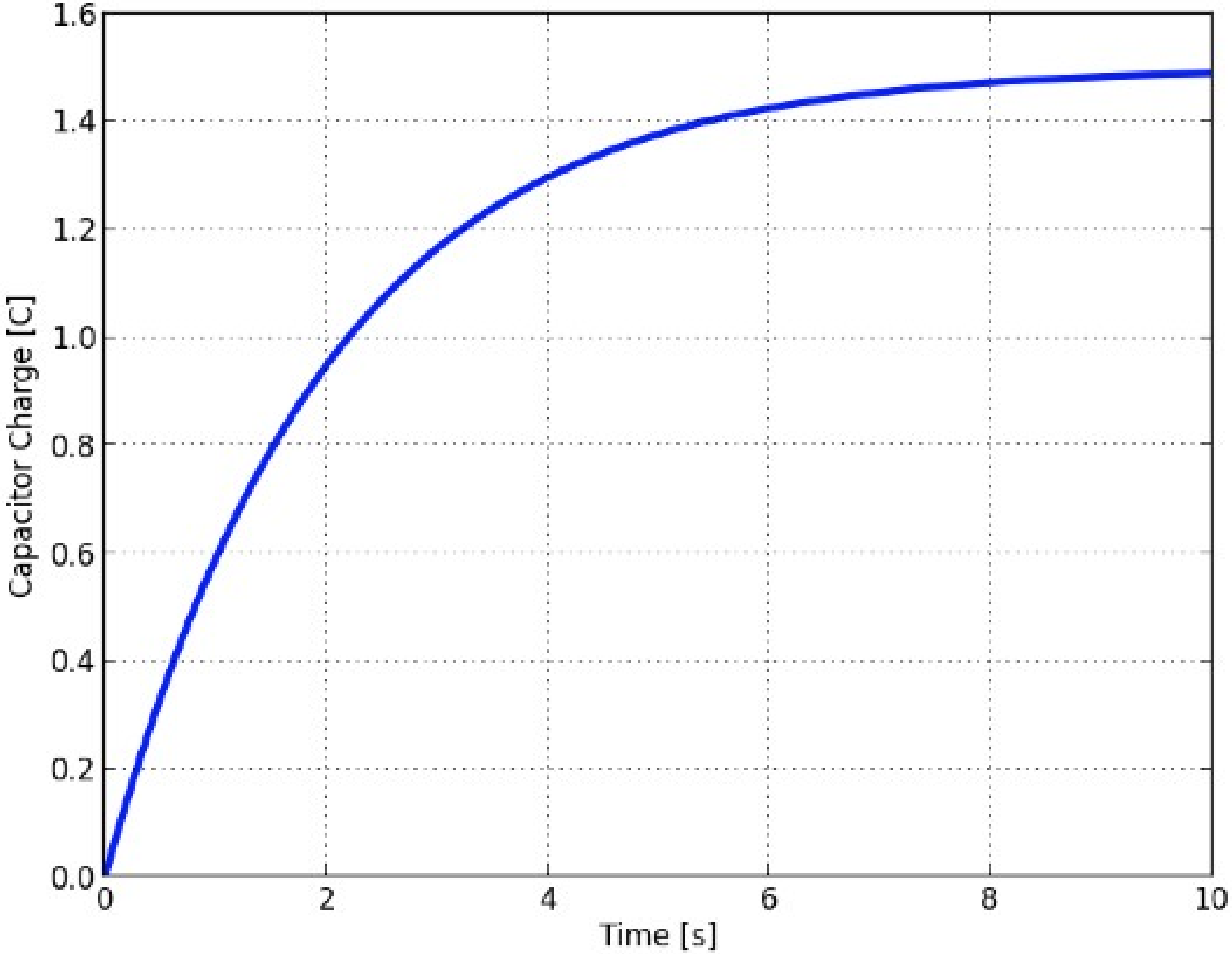
Il consumo di un'automobile



Il prezzo del petrolio

Source: Again Capital

La carica del cellulare




FORUM

Probabilità di due casi
di SIDS in una famiglia

$$\left(\frac{1}{8543}\right)\cdot\left(\frac{1}{8543}\right)\approx\frac{1}{73000000}$$

La probabilità:

oltre ai dadi e ai calzini spaiati

La probabilità:

oltre ai dadi e ai calzini spaiati

Già all'introduzione della probabilità si può presentare una applicazione semplice ma importante: le assicurazioni

$$\frac{\text{premio}}{\text{indennizzo}} > P = \frac{n_f}{n_{tot}}$$

Regione	Totale moto	Totale furti
Lazio	695 537	31 104
Lombardia	991 753	19431
Sicilia	641 453	18910
Campania	567 626	18625
Liguria	371 094	8694
Toscana	531 654	5620
Puglia	293 240	5239
Emilia Romagna	504 095	5123
Piemonte	425 213	3960
Veneto	453 552	1821

Regione	Totale moto	Totale furti
Calabria	141 345	1540
Sardegna	118 382	1512
Friuli Venezia Giulia	133 782	907
Abruzzo	142 578	850
Marche	197 682	663
Umbria	92 665	312
Trentino Alto Adige	98 826	212
Molise	28 226	70
Basilicata	35 641	55
Valle d'Aosta	15 676	39

Un problema sulle distribuzioni

Nella città di Paperopoli abitano 4568 famiglie.
Nel 2015 ci sono stati 78 furti in appartamento e il valore della merce rubata è riportato nella tabella sotto.

Valore (€)	Meno di 100 €	Tra 100 € e 500 €	Tra 500 € e 1000 €	Tra 1000 € e 2000 €	Tra 2000 € e 3000 €	Tra 3000 € e 4000 €	Tra 4000€ e 5000 €	Tra 5000€ e 10 000 €
Numero di furti	4	6	13	17	18	12	6	2

- **Rappresenta i dati in un istogramma.**
- **Stima il valor medio della merce rubata in un singolo furto.**
- **Stima il valor medio della perdita per famiglia abitante a Paperopoli .**
- **Valuta il possibile costo del premio assicurativo per una assicurazione contro il furto a Paperopoli.**

Un problema sulle distribuzioni

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2000)^2}{2\cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

Quanti furti prevederebbe questa formula per un valore compreso tra 1000 € e 3000 €?
Questo risultato è compatibile con i dati?
Come si potrebbe modificare la formula per ottenere una maggiore aderenza ai dati di Paperopoli? Perché?

Come si potrebbe modificare la formula in modo che contenga il parametro *f* che rappresenta il numero delle famiglie di una città?

In tutto lo svolgimento del problema specifica esplicitamente le ipotesi alla base del tuo procedimento.

insegnare a costruire modelli matematici non è tradire lo spirito della matematica ;

per stare nel tempo e per fare in modo che i contenuti rinforzino i modelli e viceversa si può puntare sui nessi tra teoria e applicazioni