Tra mani, occhi e cervello

Mani e occhi per intuire che cosa è essenziale
Cervello per capire che è davvero essenziale

Foto di Bertrand Paris-Romaskevich per NCCR Swissmap

Convegno Pristem Mateinitaly
Lessenziale
Ferrara, 14 ottobre 2023
M. Dedò

Mani, mani, mani…

Da dove viene la foto di copertina:

Diablerets (CH), ottobre 2022
Let's talk about outreach! & Math'émerveille

SRS
SwissMAP Research
Station in Les Diablerets

Il problema: 6 persone prendono in mano 2 bacchette (di uguale lunghezza) e formano (*cercano di formare…*) un cubo.

Poi ruotano ogni bacchetta di 90° intorno all'asse che passa per il centro del cubo e il punto medio della bacchetta. E si forma un…

Le foto sono di Bertrand Paris-Romaskevich per NCCR Swissmap

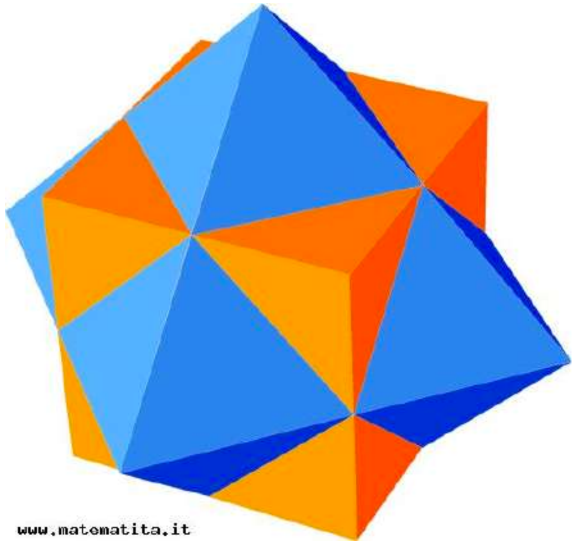
Il cervello aiuta…

Dotare ogni bacchetta di un "manico" che funga da asse di rotazione aiuta…

Le foto sono di Bertrand Paris-Romaskevich per NCCR Swissmap

Finalmente…!

Ci si arriva… faticosamente…



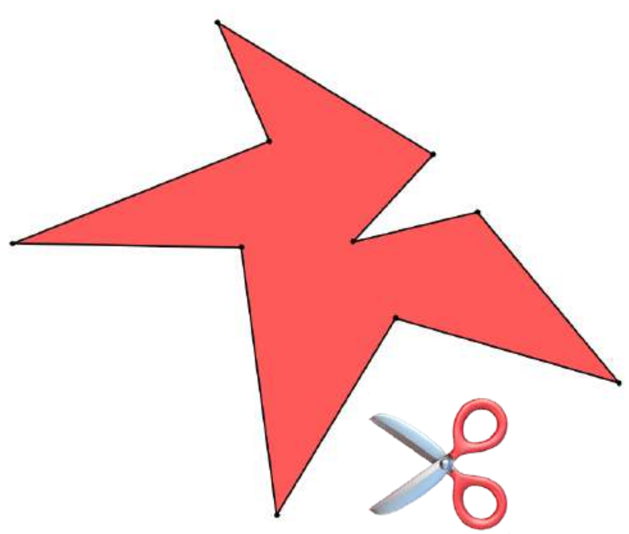
NB Non si forma esattamente un ottaedro, perché spigoli di cubo e ottaedro (in questa posizione) hanno lunghezze diverse.
Però… ***si vede*****…**

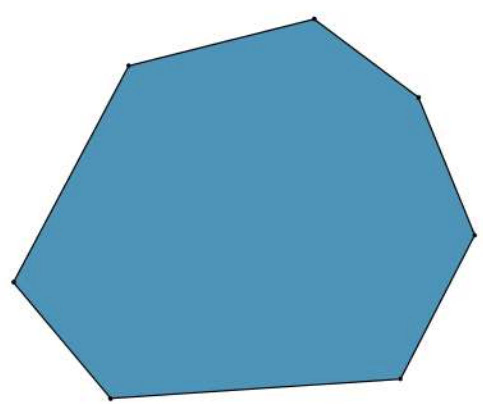
Dichiarazione di intenti

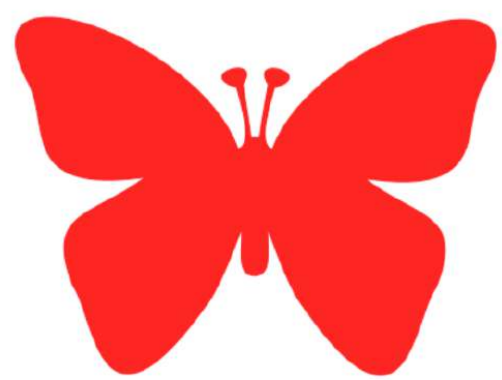
In questo esempio il cervello ha aiutato le mani.
Possono anche le mani aiutare il cervello?

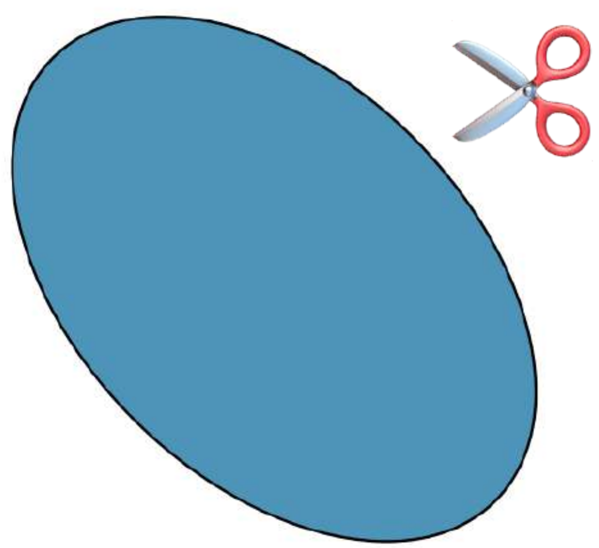
Sì (indipendentemente dall'età, per i bambini piccoli e anche per gli adulti), **purché** si siano attivati dei **canali di comunicazione** tra mani e cervello (e questi **non** sono scontati e **non** sono automatici).

Nel seguito: qualche esempio a supporto di questa tesi.



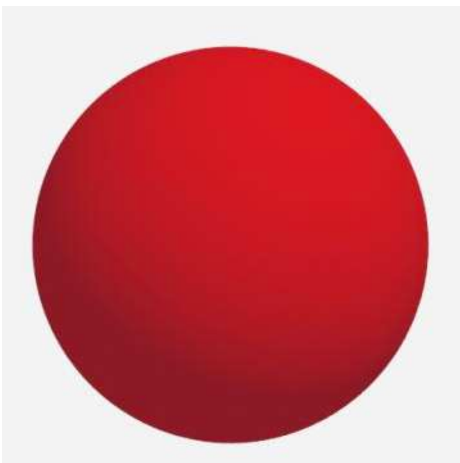






Concavo e convesso: un esempio dove sembra proprio che per molti manchi questo canale di comunicazione.

Esempio: tondo e piatto



Si può **appoggiare una matita** su:

- una scatola da scarpe?
- una palla?
- una lattina cilindrica?
- un cappello conico?
- un salvagente?

Tondo e piatto: osservazione

La scatola è **piatta** e la palla è **tonda**.
Anche il cilindro è *tondo*, ma è tondo in una maniera diversa dalla palla: la palla rotola da tutte le parti, il cilindro rotola in una direzione, ma non in altre…
Su un cilindro si riesce ad appoggiare una matita (**ma solo se…**); su una palla no.

E su un cono?

Anche un cono rotola, ma solo in una maniera; e anche sul cono si può appoggiare una matita (**ma solo se…**)

Il concetto matematico che si sta sfiorando è quello di **curvatura**, che alcuni (non tutti) incontreranno nei loro studi, molti anni dopo. Molto prima, però, anche bambini molto giovani possono *percepire* (con le mani e con gli occhi) questo concetto.

Tondo e piatto: che cosa resterà?

Naturalmente non basta un’esperienza di questo tipo per *imparare che cos’è la curvatura*; ma sarà un bagaglio prezioso, per coloro che studieranno la curvatura, **se** saranno in grado di metterla in relazione con l’esperienza fatta, con le mani, 10 o 20 anni prima.

Non è automatico che questo accada.
Spesso manca questo collegamento.

Un altro esempio

Contesto:
esame di ammissione a un corso di dottorato di matematica.

Affermazione del candidato:
la sezione di una sfera con un piano è una circonferenza oppure un'ellisse, a seconda della posizione del piano rispetto alla sfera.

Eppure questa persona ha giocato a palla da piccolo!
Evidentemente non si è creato un *ponte* tra le mani (che sanno che la palla è fatta allo stesso modo, da qualunque parte la si rigiri) e il cervello (che sembra ignorarlo).
Le mani non hanno saputo aiutare il cervello!

Manca il *ponte* tra mani e cervello

Sembra che, nel momento in cui si incontra la sfera di equazione $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1}$, per alcuni non si attivi nessun rapporto tra questa e l'oggetto concreto **palla**, che tutti conosciamo e con cui tutti abbiamo interagito. *Come se fossero due mondi diversi che non si vedono e non si parlano.*

È sicuramente vero che sono mondi diversi!
Però i due mondi si possono vedere fra loro.
E, se riusciamo a farli parlare, abbiamo dei grossi vantaggi nell'apprendimento!

Manca il *ponte* tra mani e cervello

Sembra che, nel momento in cui si incontra la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$, per alcuni non si attivi nessun rapporto tra questa e l'oggetto concreto **palla**, che tutti conosciamo e con cui tutti abbiamo interagito. *Come se fossero due mondi diversi che non si vedono e non si parlano.*

E su questo qualche responsabilità ce l'abbiamo tutti noi, come insegnanti di matematica, a tutti i livelli!

È sicuramente vero che sono mondi diversi!
Però i due mondi si possono vedere fra loro.
E, se riusciamo a farli parlare, abbiamo dei grossi vantaggi nell'apprendimento!

Perché è nostra responsabilità

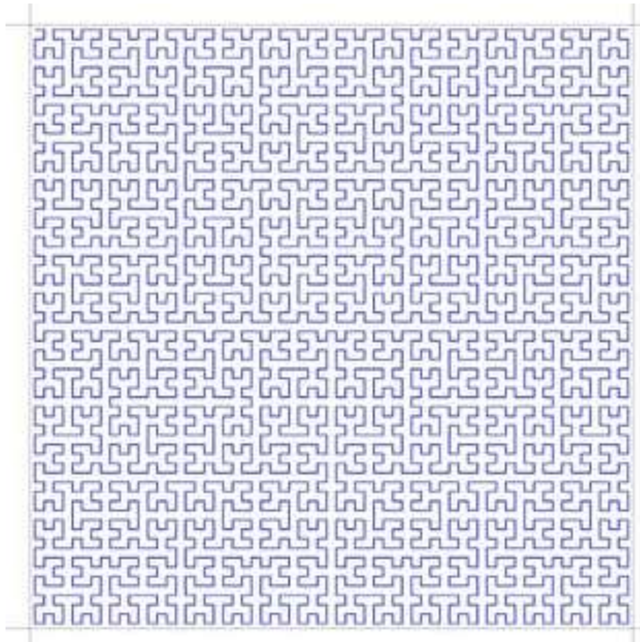
modellizzazione $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ *esemplificazione*

$x^2+y^2+z^2=1$

Giusto sottolineare che il concetto astratto è altra cosa rispetto all'oggetto concreto. **Però…**

Però questo non dovrebbe inibire il legame e il continuo passaggio, avanti e indietro, fra il piano concreto e quello astratto.



Giusto sottolineare che il piano astratto richiede rigore. **Però…**

Però il rigore è un aiuto per una comprensione più profonda dei concetti che via via impariamo, non deve diventare una vessazione che paralizza. È Peano che parla di *esagerata paura del rigore*.

Perché è nostra responsabilità

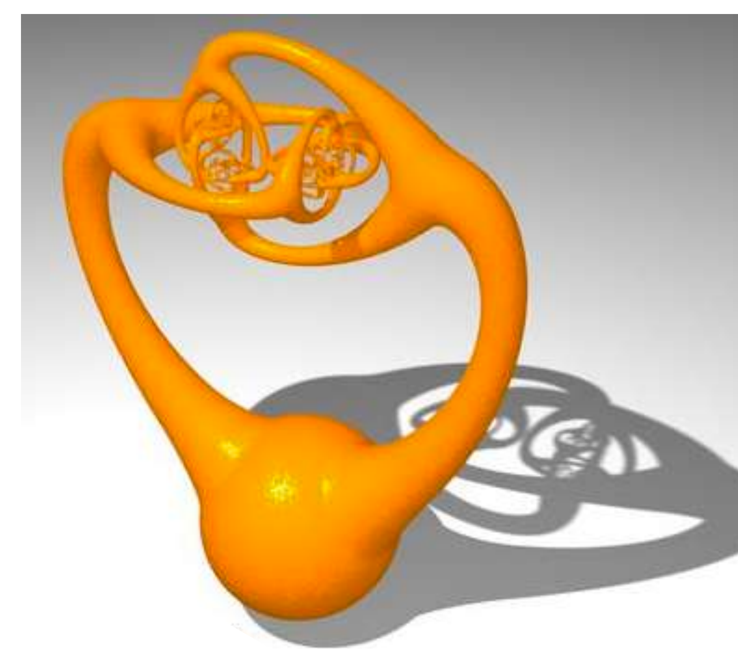
modellizzazione →

← *esemplificazione*

$$x^2+y^2+z^2=1$$

Interagire bene con il processo di astrazione significa muoversi agilmente nei due passaggi-chiave **dal concreto all'astratto** e **dall'astratto al concreto** (e **NON** certo muoversi solo sul piano astratto, senza uscirne!).

NB Il bourbakismo - e la conseguente ossessione per il rigore e per le patologie - è stato prezioso per molti aspetti, ma deleterio sul piano della didattica.



Ancora palle…

Bimbo (5 o 6 anni) si accorge che non riesce ad appoggiare una matita su una palla.
Reazione: *Ma allora la Terra non è tonda! Ci stanno sopra le autostrade che sono dritte!*

… si può proseguire l'*osservazione* e confrontare cosa succede appoggiando uno stuzzicadenti su una pallina piccola, una un po' più grossa, una molto grossa…

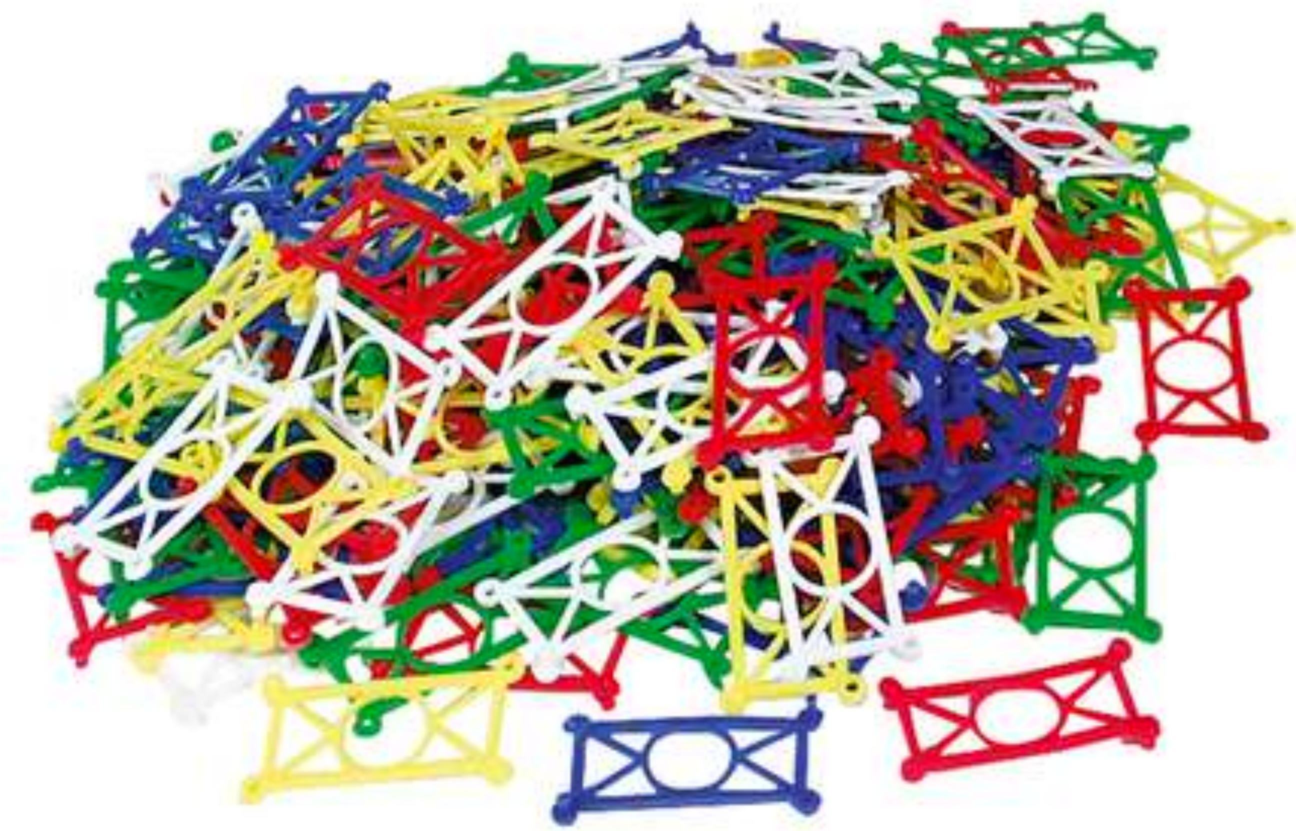
Ma che cos’è la curvatura?

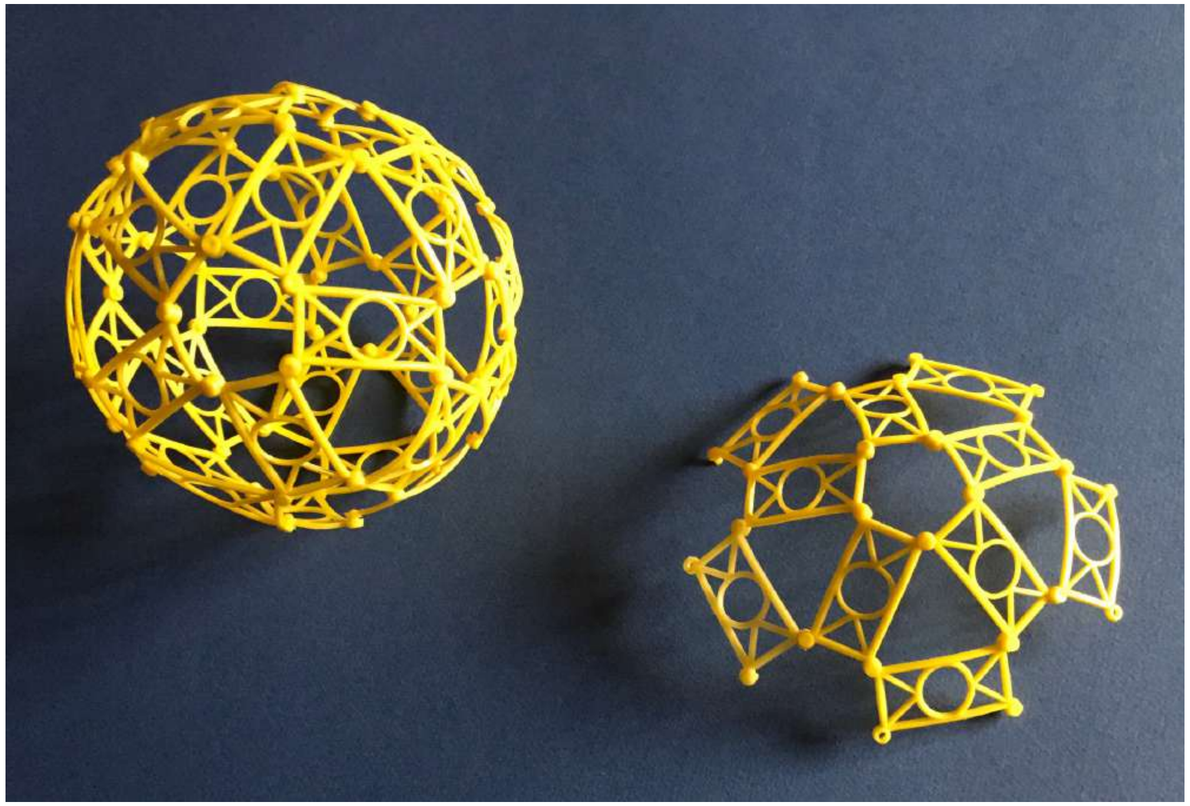
La curvatura interviene qui in maniera più forte; una sfera (la *buccia* di una palla) ha sempre curvatura positiva (per qualsiasi palla, grande o piccola). Però la curvatura è diversa da una sfera all’altra: maggiore per la palla piccola (che si incurva di più) e sempre più piccola man mano che la palla diventa più grande (e si avvicina a un piano, piatto, che ha curvatura 0).

… e ci sono poi anche superfici a curvatura negativa.

Ancora la curvatura…

Contesto: si propone a un ragazzino (7 o 8 anni) di giocare con materiale di questo tipo.

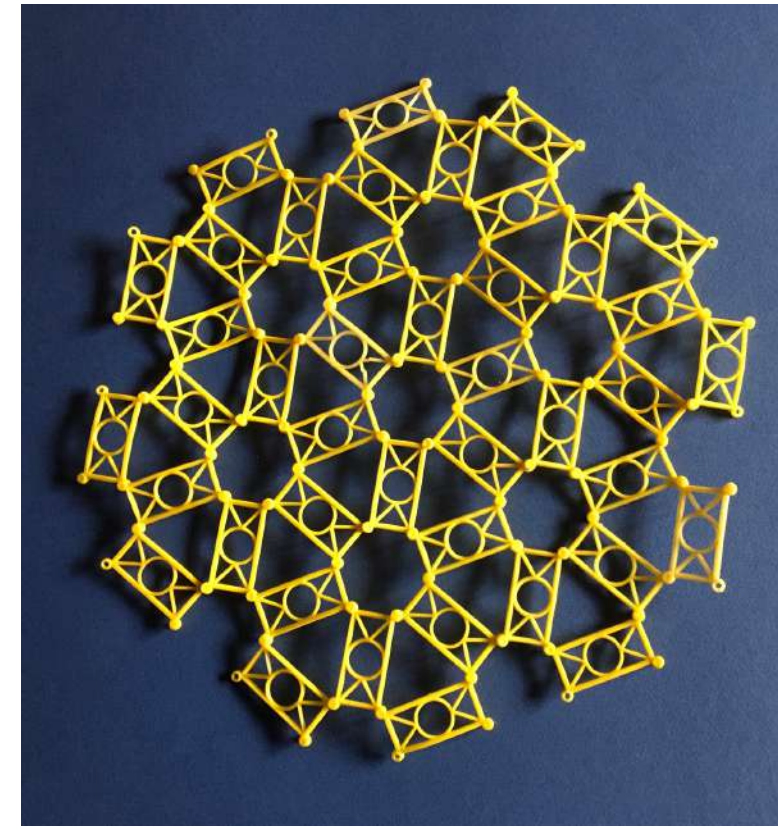




Adulto: *volendo, si può fare una palla; basta unirli a 3 a 3 per il lato lungo e a 5 a 5 per il lato corto.*

Ragazzino: *già; se per il lato corto li unisco a 6 a 6, resta tutto piatto e non si chiude.*

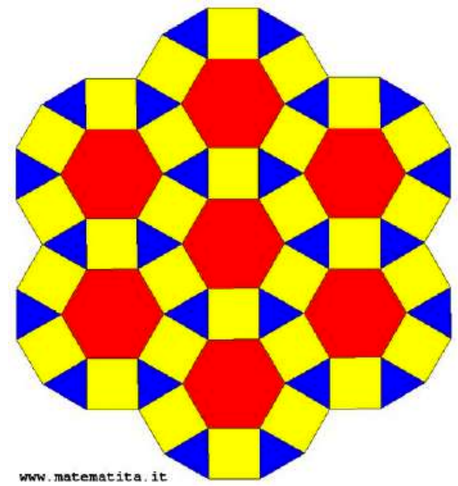
Il ragazzino ha ragione!



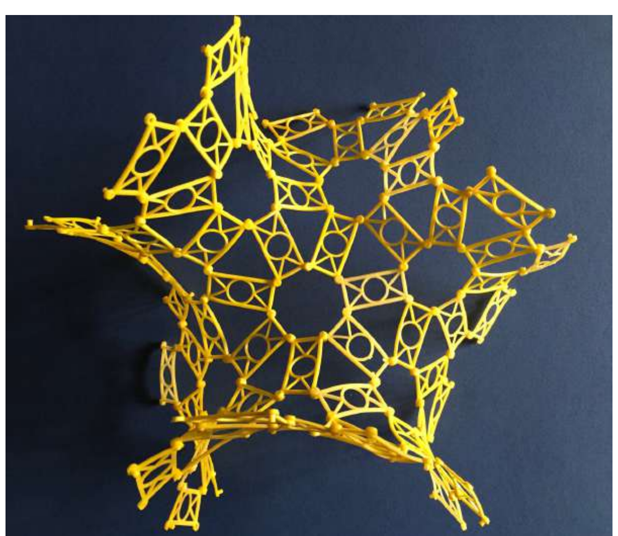
… e si ritrovano gli schemi che siamo abituati a vedere in molte pavimentazioni

(6,3)

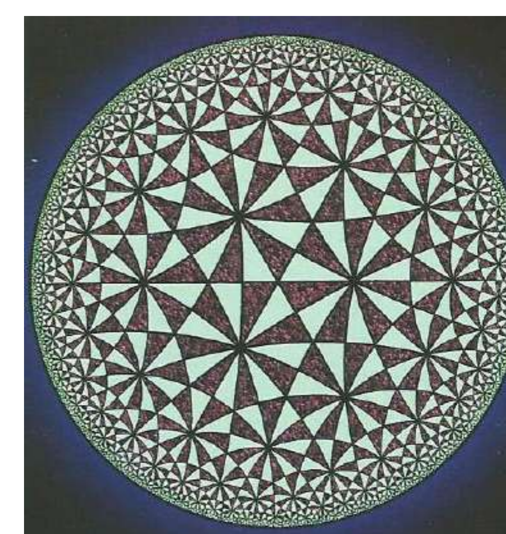
(3,6)



(6,4,3,4)

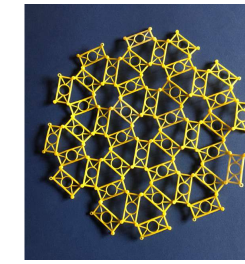


… e se poi li si unisce a 7 a 7, si ottiene una superficie iperbolica, a curvatura negativa (ma questo il ragazzino non l'ha detto).

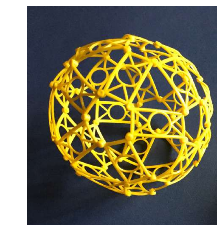


Il ragazzino ha toccato un nodo cruciale!

… e si può anche andare molto oltre…

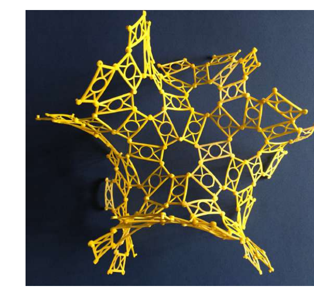


… è collegato al fatto che si può tassellare il piano con triangoli, 6 in ogni vertice (o con esagoni, 3 in ogni vertice)…



… e al fatto che unendo i triangoli a 5 a 5 si ottiene invece un poliedro che si chiude…

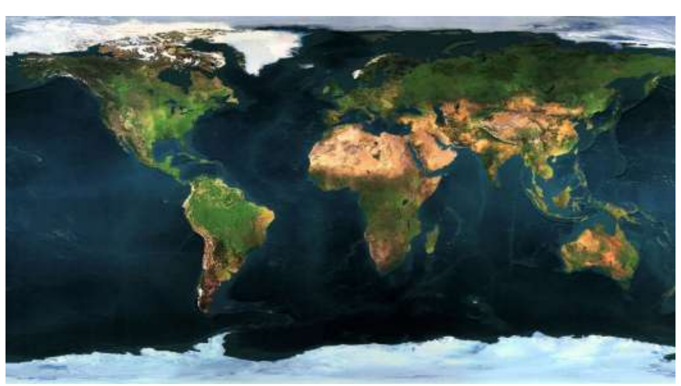
… e alla caratteristica di Eulero V-S+F…



… e all'area dei triangoli…

… e alla curvatura…

… e alla somma degli angoli di un triangolo che è uguale a 180°(sul piano), maggiore di 180° (sulla sfera), minore di 180° (sul piano iperbolico) …



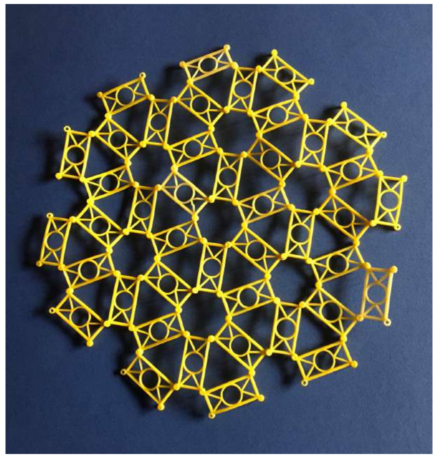
… e alla similitudine (che esiste sul piano, ma non esiste sulla sfera o sul piano iperbolico)…

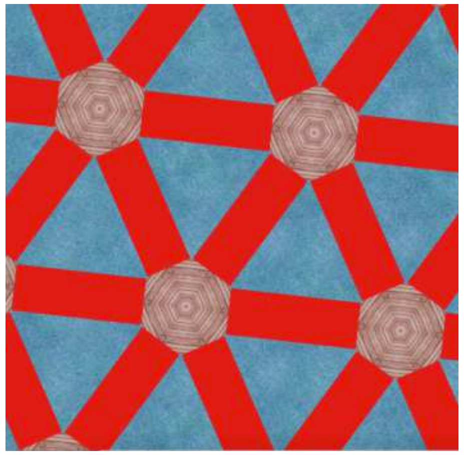
… e alle carte geografiche… … e… … e…

… e…

… non solo il ragazzino ha ragione, ma ha scoperchiato un mondo intero!

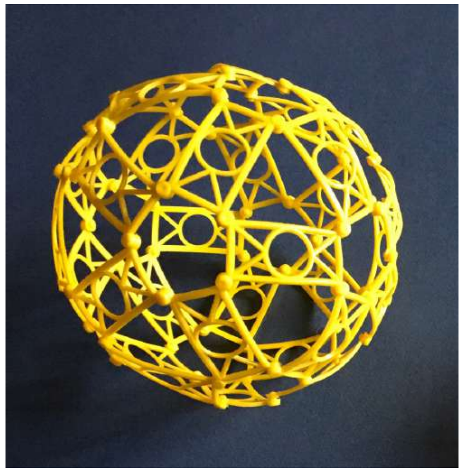
Ancora la curvatura…

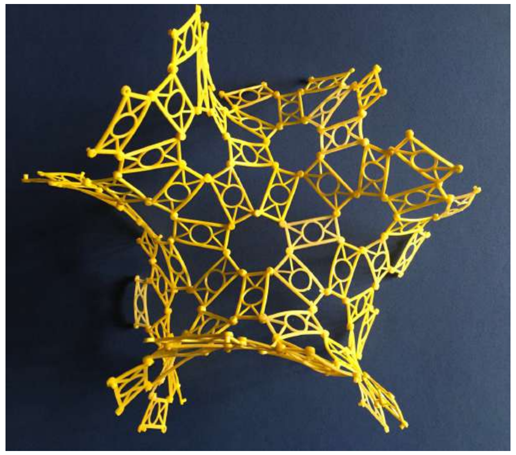


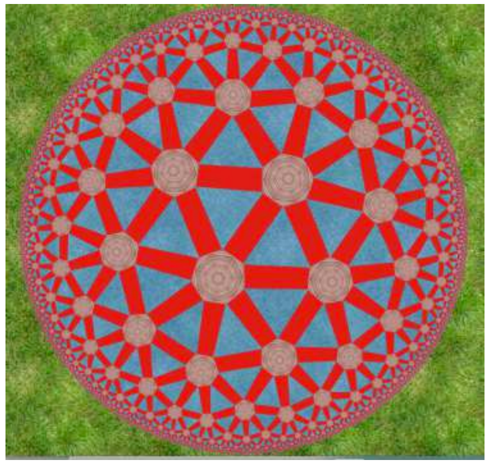


(Naturalmente!) da quel commento **non** si può certo immaginare che il ragazzino sia consapevole della differenza fra geometria ellittica, euclidea e iperbolica (e di tutte le conseguenze…)!

Però… però in qualche maniera le sue mani e i suoi occhi hanno intuito questa differenza….



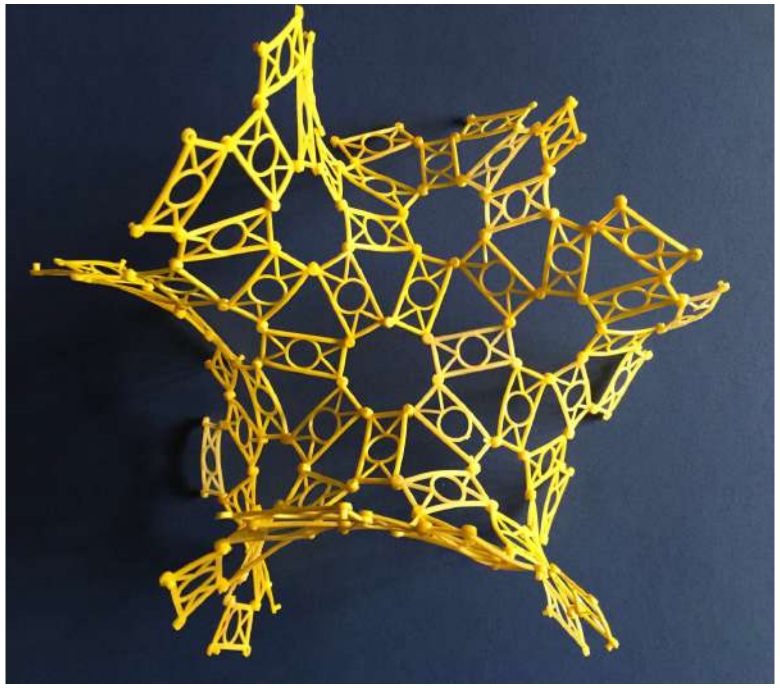
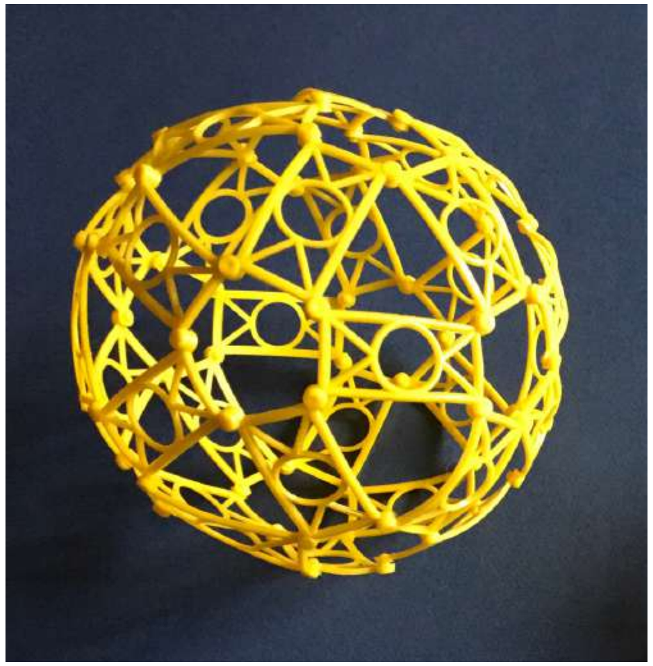
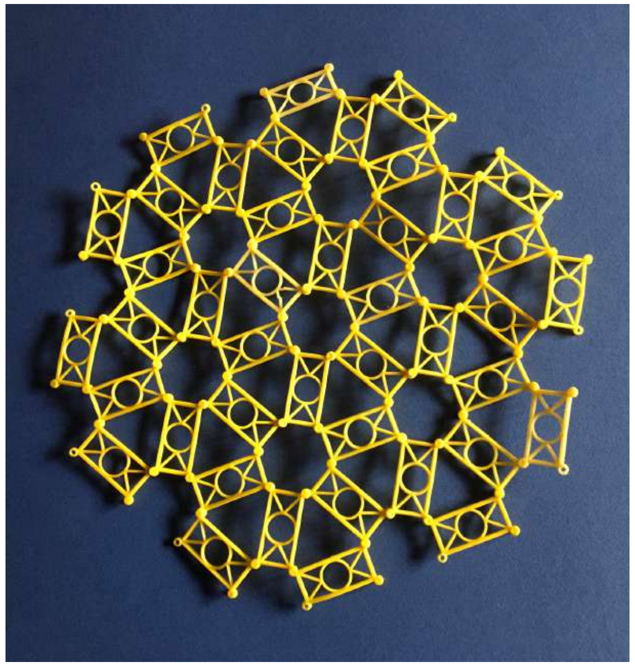




E questa *consapevolezza intuitiva* di mani e occhi non è irrilevante per il cervello.

https://www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html.en

Ancora la curvatura…

Se si sono attivati i canali di comunicazione, la consapevolezza delle mani diventerà un bell'aiuto per il cervello per **dar significato** al concetto astratto. Non solo; anche, renderà poi la conoscenza astratta molto più **stabile** nel tempo rispetto a una conoscenza acquisita solo tramite la parola.

Però scivola via, se i canali di comunicazione fra mani occhi e cervello non si sono attivati…

Un inciso: un laboratorio MathUp

I cappelli di Giuliano è un problema proposto per un laboratorio nelle sperimentazioni MathUp (inizialmente nelle classi III della scuola secondaria di I grado, ma poi anche nelle I e II).

I ragazzi dovevano costruire un cono in modo che si adattasse *giusto giusto* a una scatola di misure assegnate.

Dovevano **usare le mani** (per costruire il cono, per misurare, per ingegnarsi su come disegnare un arco di cerchio di raggio grande,…). E usare le mani ha fatto acquisire una diversa consapevolezza sul **significato** di quello che già avevano imparato…

https://www.problemi.xyz/i-cappelli-di-giuliano/

Usare le mani per dare significato

Uno dei problemi più diffusi nell'insegnamento è il rischio che un concetto astratto venga appreso e utilizzato senza associarlo a un **significato**.

commenti insegnanti

L'uso delle mani è prezioso per dare significato in modo che... *ora li sappiamo davvero meglio!*

… si sono resi conto che misurare è diverso dal calcolare…

Ho assistito alla scoperta "in diretta" del teorema di Pitagora: ma gli esercizi fatti in precedenza sono stati utili? ... O no?

commento ragazzi

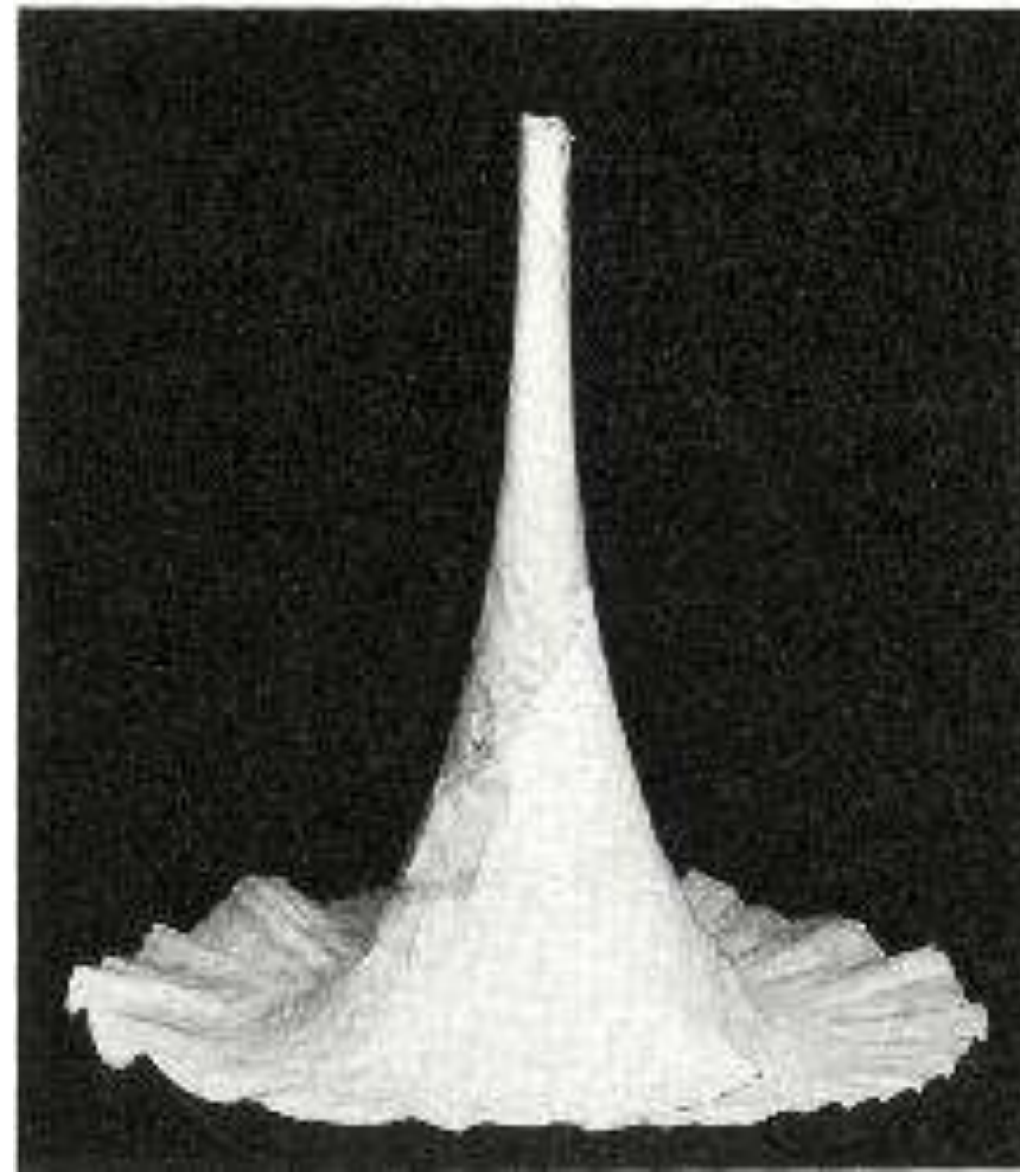
*...pensavamo di sapere già il tal argomento... invece **ci siamo accorti che... ora li sappiamo davvero meglio!***

hanno sperimentato come, lavorando anche per "prove ed errori", si possa raggiungere lo stesso una soluzione.

https://www.problemi.xyz/i-cappelli-di-giuliano/

Non solo ai ragazzini sono utili le mani…

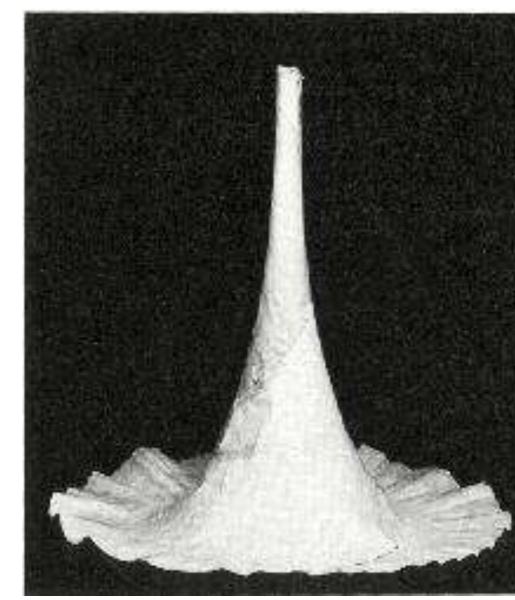
Ho avuto nel frattempo un'idea bizzarra, che voglio comunicarle in quanto potrebbe essere per voi più facile che a me metterla in atto. Ho voluto tentare di costruire materialmente la superficie pseudosferica sulla quale si realizzano i teoremi della geometria non euclidea.



Da una lettera di Eugenio Beltrami (1869)

La cuffia di Beltrami

... in questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, (...), un involto cilindrico contenente il modello che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo e di non lasciarlo mai uscire di mano (...). Bisogna che io ti dia qualche istruzione per quello che devi fare al ricevimento del pacco, perché si tratta di cosa di forma e di natura insolita (...).

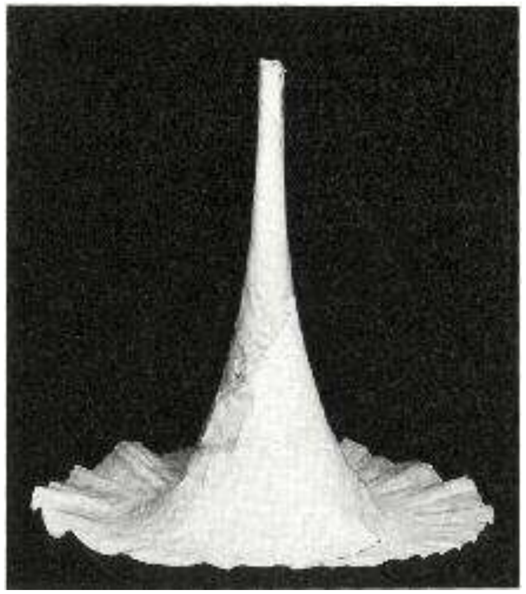


Da una lettera di Eugenio Beltrami a Luigi Cremona (1869)

Uova e curvatura

1873, università di Pavia, inaugurazione dell’anno accademico. Felice Casorati mostra il modello della cuffia di Beltrami come esempio di superficie a curvatura costante negativa e usa un uovo per mostrare la differenza fra superfici a curvatura costante e superfici che non hanno questa proprietà.

Prendiamo una sfera e costruiamovi sopra una figura: poiché potremmo costruire la figura medesima in qualunque altra regione della sfera e con qualunque orientazione, è chiaro che potremmo far muovere cotesta figura liberamente sulla sfera, farla scivolare sulla sfera dovunque, senza alterarsi.



La stessa proprietà ha luogo sopra di un piano. La stessa finalmente ha luogo in una superficie pseudosferica. (...).

Astratto e concreto

Per fare una *buona* astrazione, occorre partire dal concreto; e quindi anche (non soltanto) lavorare con le mani. Naturalmente non bisogna fermarsi al concreto: per arrivare all'astrazione occorrerà fare un salto; ma **il salto deve tenere memoria** del suo punto di partenza.

Un concetto astratto può (deve?) avere non uno ma **tanti** punti di partenza concreti, magari anche molto **diversi fra loro.**

Così come, se si vuole esemplificare un concetto astratto, non basta un esempio, ma è utile disporre di **tanti** esempi, possibilmente molto **diversi fra loro**, in modo che il cervello cerchi che cosa hanno in comune questi esempi.

Per far percepire la differenza fra i gruppi di simmetria ciclici e quelli diedrali, un esempio non basta!

Il ruolo degli esempi

Un esempio non basta: occorrono **molti** esempi, e possibilmente molto diversi fra loro, per intuire che cosa hanno in comune queste immagini.

C$_4$ gruppo ciclico (*rotoloso**)

D$_4$ gruppo diedrale (*sull'attenti**)

(*) Terminologia coniata dai partecipanti a una *Bottega del matematico*, Salorno, 2017

Reazioni di studenti

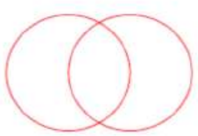
è stato molto interessante ricondursi alle radici dell'apprendimento, dovendo spiegare cose di cui avevo (e ho) un concetto molto elaborato, stratificato e basato sull'*esperienza matematica* che ho accumulato in questi anni di studio. Anch'io, grazie al contributo delle altre guide, del materiale (che ci permetteva di toccare, talvolta, con mano, cose che sarebbero rimaste nell'universo dell'astrazione), e degli stessi visitatori, ho imparato qualcosa o mi sono fatto un'idea più precisa di ciò che avevo studiato".

Gli studenti del corso di laurea in matematica che hanno fatto l'esperienza di animatori a una mostra o in laboratori per le scuole, spesso asseriscono che questa è stata molto utile **a loro**.

Forse, proprio perché ha dato loro quel **ponte tra cervello e mani** (o tra concreto e astratto) di cui avevano bisogno.

Rallentare!

Usare le mani ci obbliga a rallentare.
Vale per i ragazzi, ma vale anche per noi.

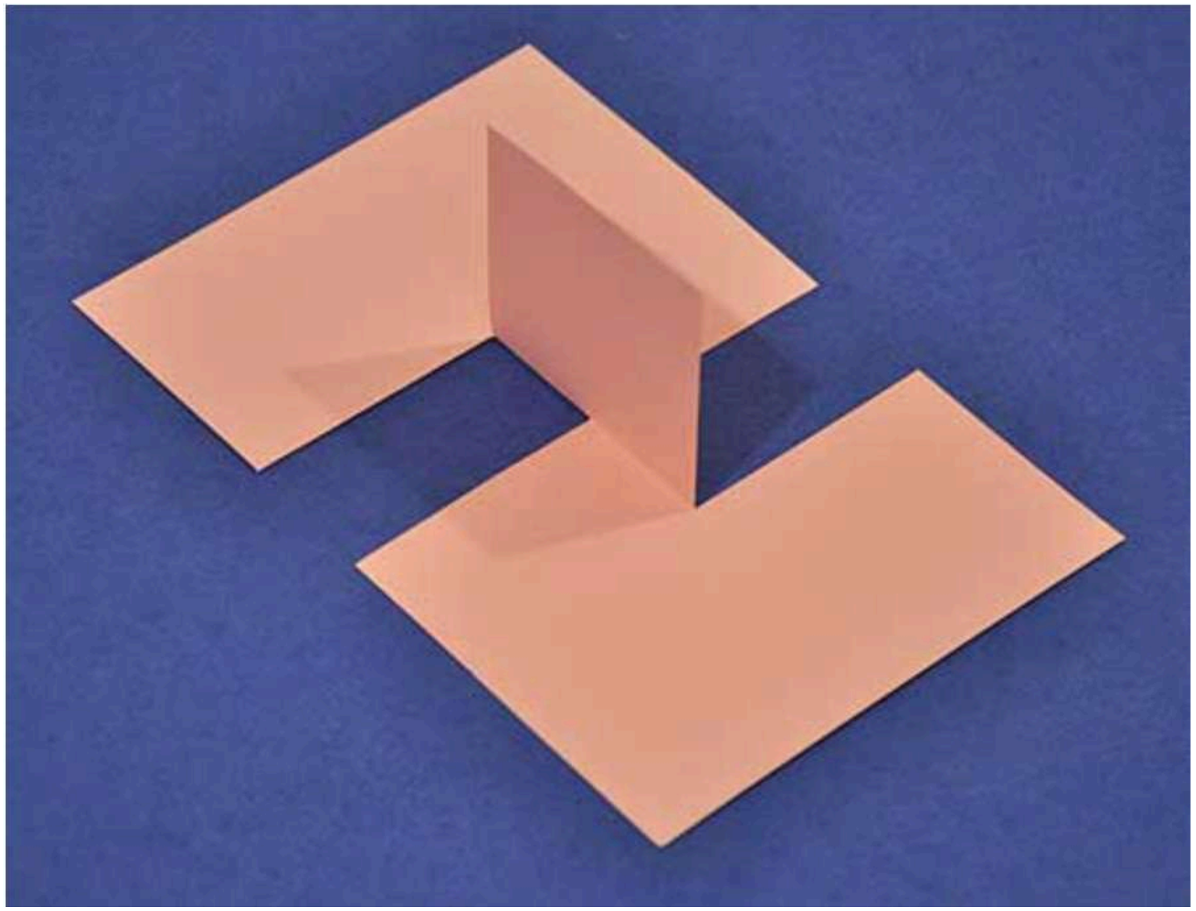


Proprio la **lentezza** a cui si è costretti dalla costruzione manuale permette una visione più profonda (e, in prospettiva, più stabile) di concetti che magari si conoscevano già.

… sì, ma… non lo vedo.
la risposta di una studentessa a chi le chiedeva come mai avesse una voce così esitante dopo una dimostrazione formalmente impeccabile.

https://www.cutoutfoldup.com/981-torus-from-villarceau-circles.php

Come è possibile?



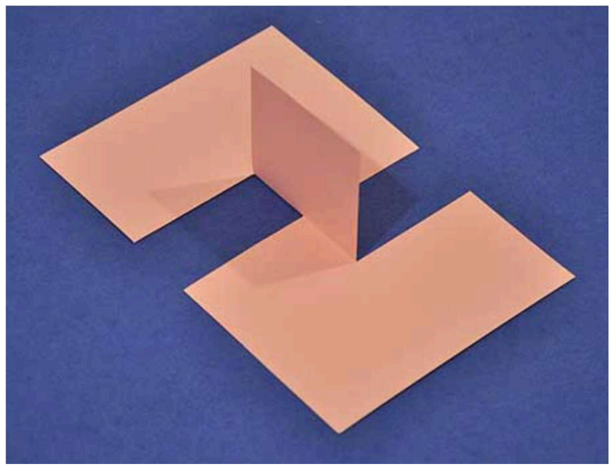
Le mani aiutano l’osservazione.
Di fronte a un quesito (*come si può realizzare l’oggetto qui a sinistra avendo a disposizione solo un foglio di carta, niente colla e niente scotch?*), l’osservazione non è più un’osservazione generica, ma diventa un’osservazione **mirata**.

https://www.cutoutfoldup.com/1102-impossible-flap-.php

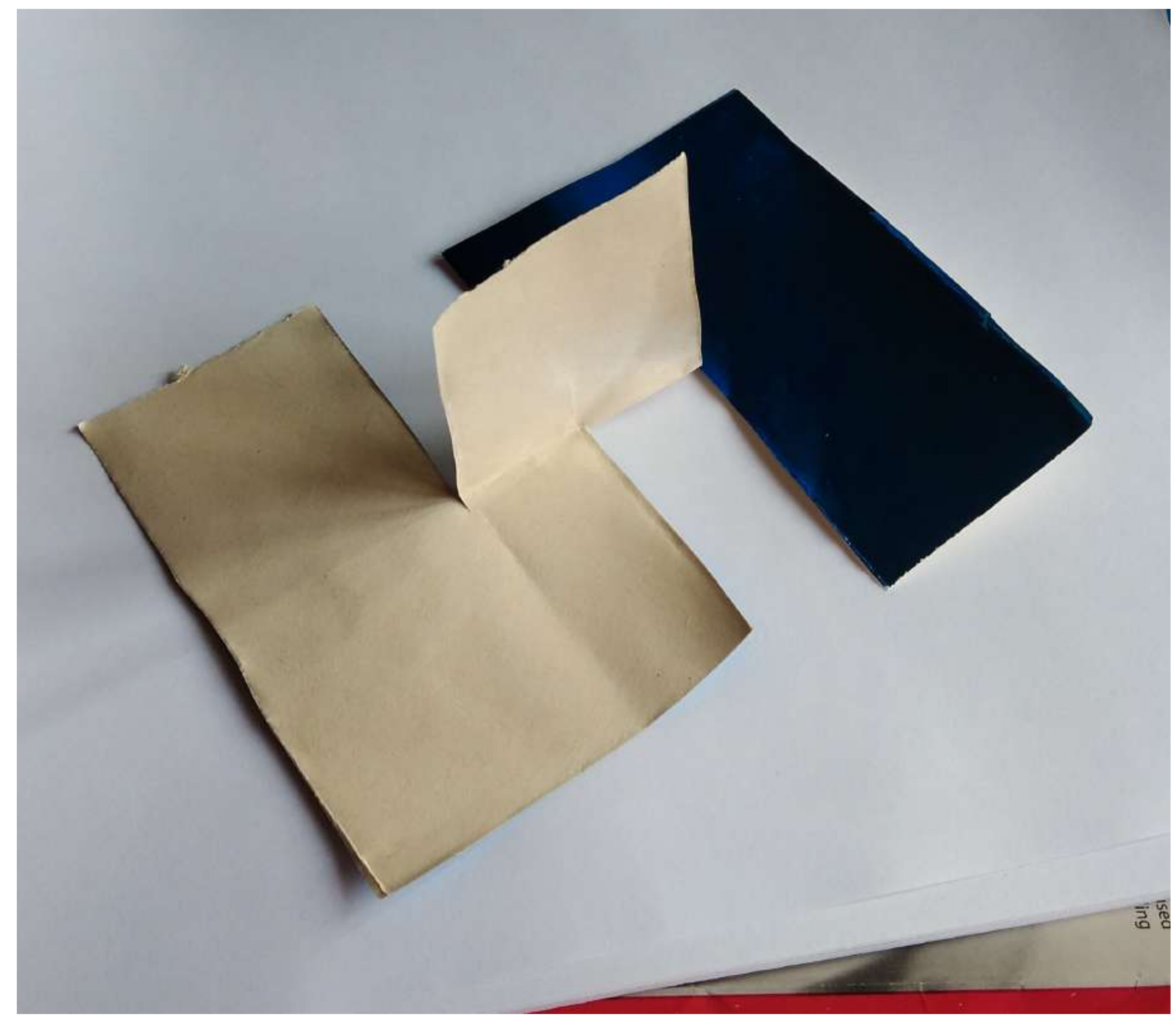
Suggerimento

Niente suggerimento

Come è possibile?



Un modello costruito a partire da un foglio di carta colorato da una parte sola fa capire come stanno le cose…



https://www.cutoutfoldup.com/1102-impossible-flap-.php

Per tirare le fila

- Nella scuola il ruolo di mani e occhi è sottovalutato ed è un peccato: si spreca una (grossa!) potenzialità.

- Usare le mani non basta: occorre costruire **canali di comunicazione** fra il cervello e le mani…

- … e gli occhi: lavorare con le mani potenzia la capacità di *osservazione*.

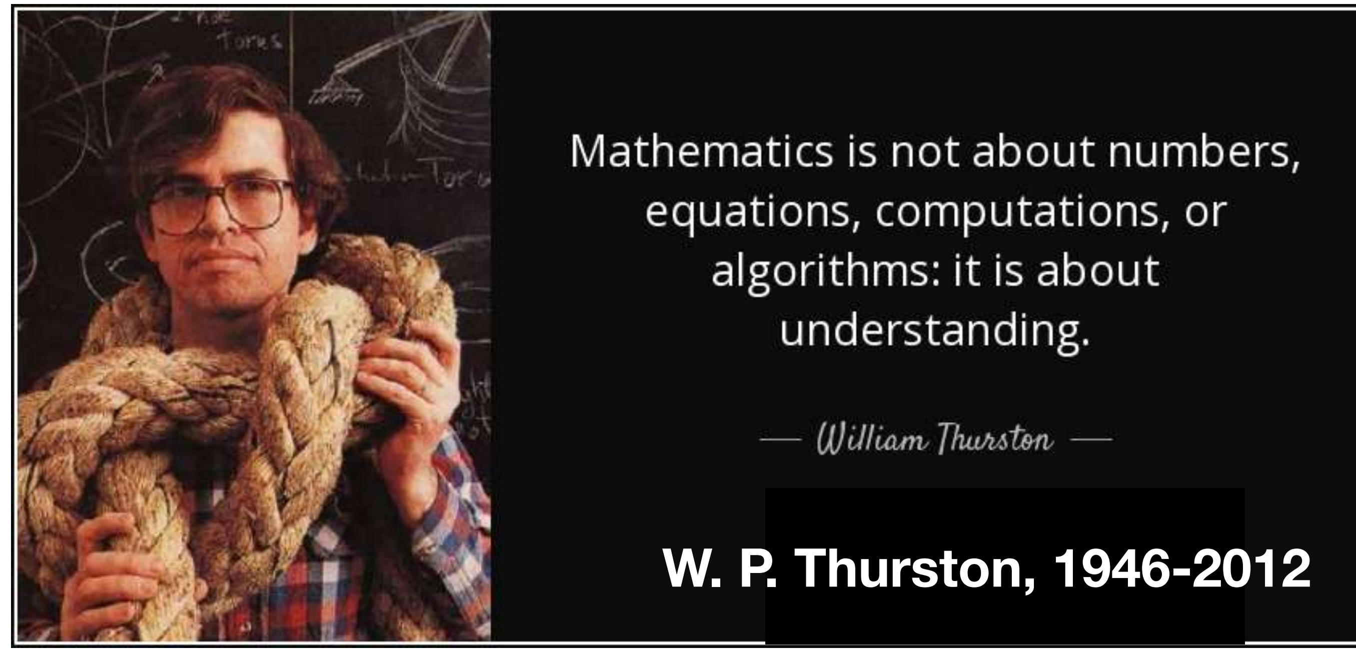
- L'osservazione fine a sé stessa rischia però di scivolar via senza lasciar traccia. C'è bisogno che l'osservazione sia **finalizzata**.

Per tirare le fila

- Il ruolo dell'insegnante è fondamentale per passare da un'*osservazione* generica a un'**osservazione mirata**, con uno scopo.

- **Verbalizzare**, raccontare ai compagni che cosa si è osservato, che cosa si sta facendo, e perché lo si fa proprio in quel modo, è un tassello fondamentale nel passaggio dal concreto all'astratto.

- *Last but not least:* usare le mani aiuta a mantenere il sano proposito di **rallentare**!



La via è lunga e il cammino è malvagio…
Dante, Inferno canto XXXIV

Grazie per l'attenzione!

Oppure, qualche altro esempio:

- cubi piccoli e grandi
- mosaici
- rigidità dei poliedri
- nastri di Moebius

maria.dedo57@gmail.com

Osservare e immaginare

Geometry and the Imagination in Minneapolis

John H. Conway Peter G. Doyle Jane Gilman
William P. Thurston

June 1991
Version 2.0, 8 April 2018
No Copyright*

Una vera miniera di esempi significativi di uso delle mani (a tutti i livelli).

https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/mpls/mpls.pdf

Un esempio
Chiudete gli occhi e provate a immaginare come si fa a tagliare un cubo in modo tale da ottenere un esagono regolare.

19 Exercises in imagining

How do you imagine geometric figures in your head? Most people talk about their three-dimensional imagination as 'visualization', but that isn't exactly right. A visual image is a kind of picture, and it is really two-dimensional. The image you form in your head is more conceptual than a picture—you locate things in more of a three-dimensional model than in a picture. In fact, it is quite hard to go from a mental image to a two-dimensional visual picture. Children struggle long and hard to learn to draw because of the real conceptual difficulty of translating three-dimensional mental images into two-dimensional images.

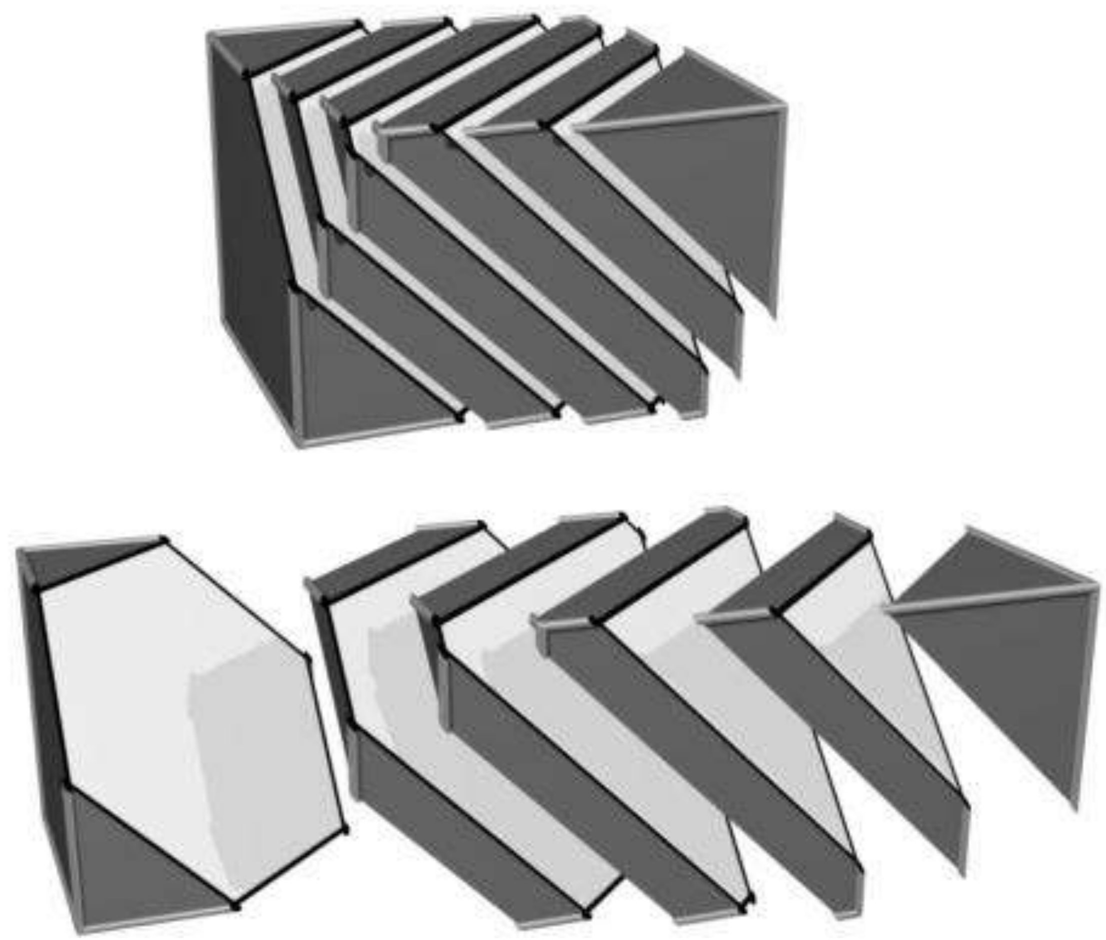
L'avete immaginato?
Quanto era grande il cubo?

Quanto è grande il cubo?

Quanto era grande il cubo?

La domanda sembra sciocca, ma, se davvero avete provato (a occhi chiusi!) a immaginarlo, vi sarete resi conto che non lo è.

Probabilmente avrete anche molta difficoltà a immaginare la stessa situazione in un cubo di dimensioni diverse.
Per esempio, lo riuscite a immaginare anche in un cubo di spigolo 10 metri?

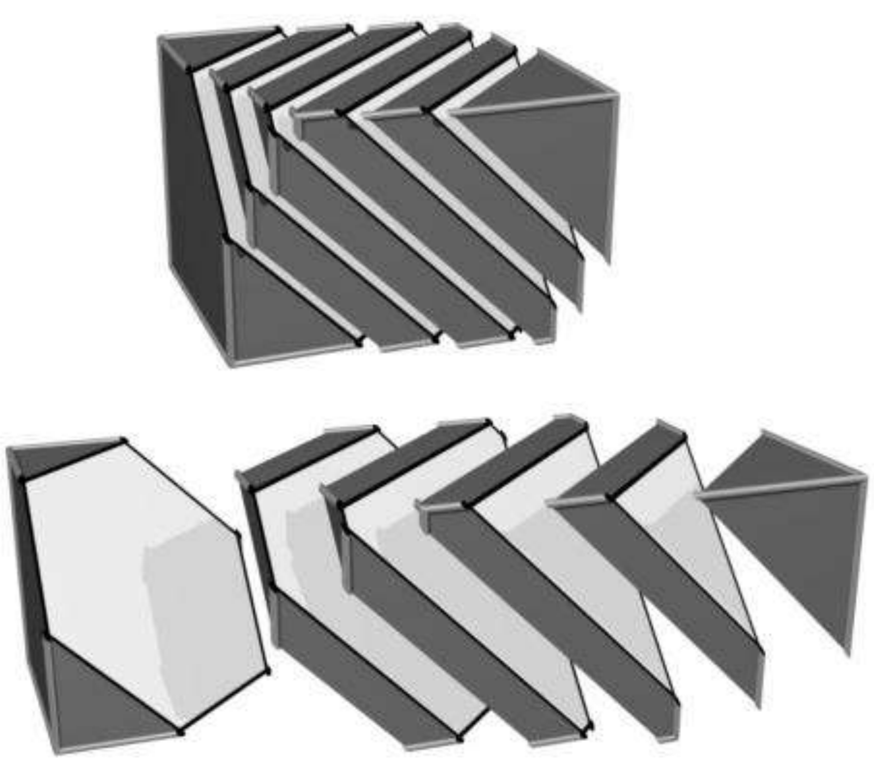


Gli occhi ci servono per *osservare;* ma anche per *immaginare*.

https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/mpls/mpls.pdf

Quanto è grande il cubo?

Generalmente, le persone indicano per lo spigolo una lunghezza tra i 5 e i 20 centimetri.
E, generalmente, facciamo tutti una **enorme** fatica a immaginare un cubo di dimensioni diverse dal primo che abbiamo pensato, in particolare se sono molto più grandi (o molto più piccole).

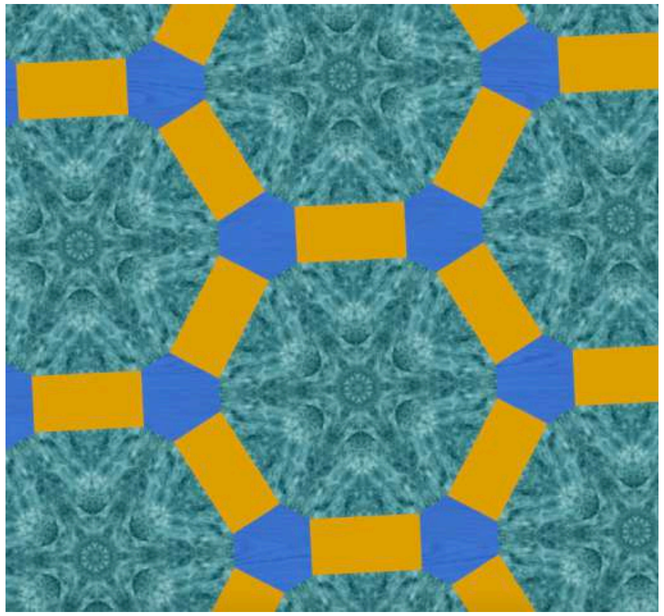


Evidentemente anche le mani, e il senso del tatto, ci servono per immaginare.

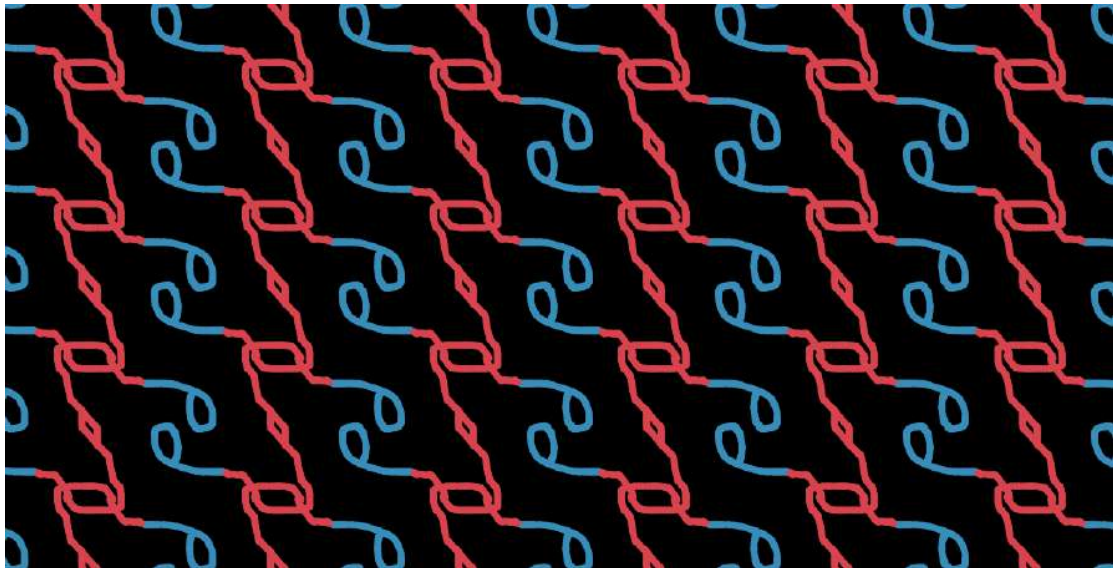
https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/mpls/mpls.pdf

Simmetria e manipolazione virtuale

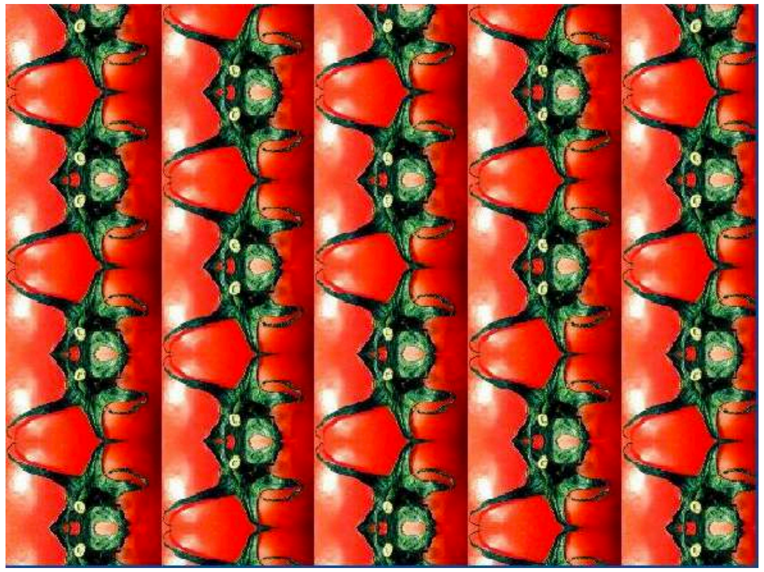
Sul tema della simmetria, esistono in rete diversi siti in cui viene predisposto un ambiente dove il visitatore possa *metterci le mani*. Non è naturalmente la stessa cosa rispetto all'usare le mani (reali), **però…**



https://www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html.en

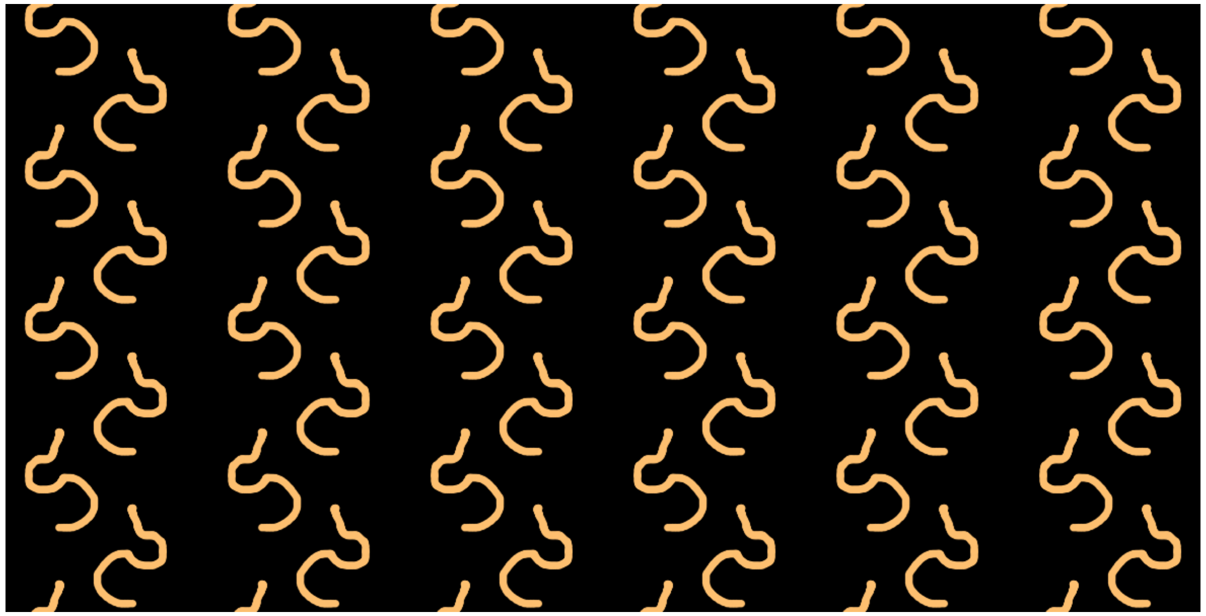


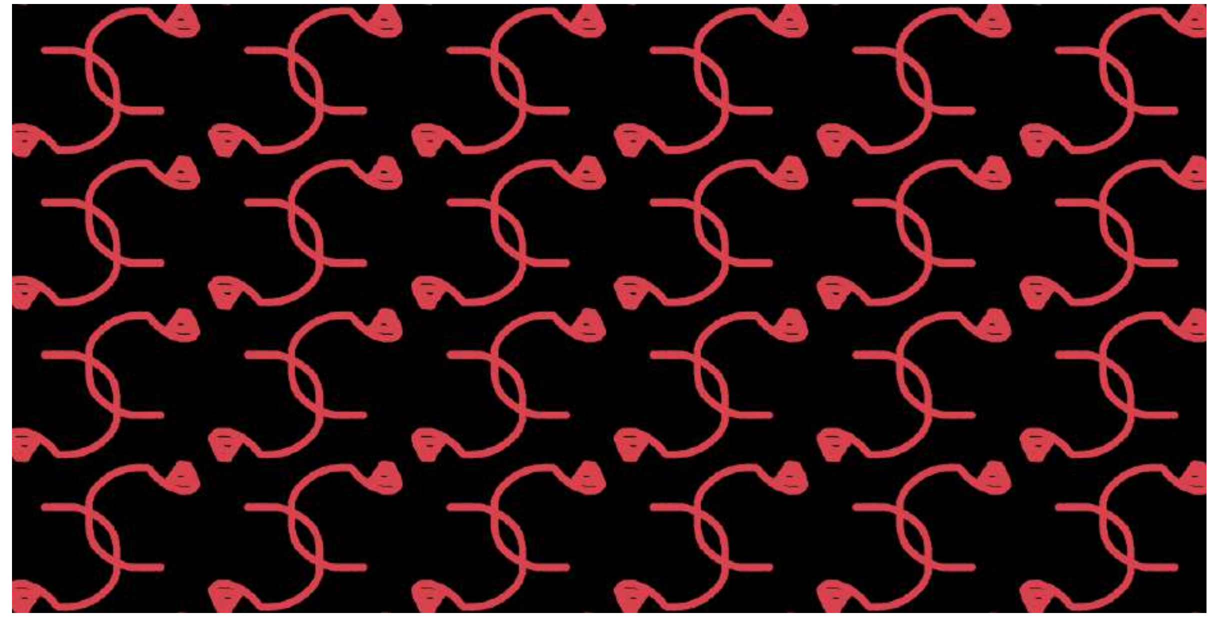
https://www.animatamatematica.it/2022/08/27/mosaici/

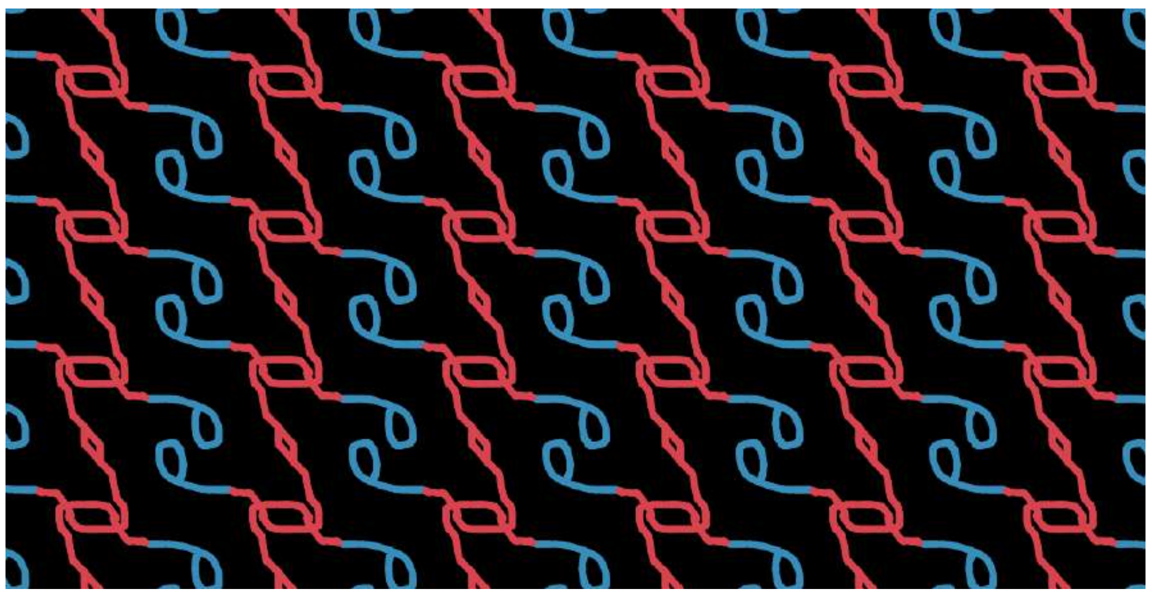


https://www.atractor.pt/mat/GeCla/GeCla-_en.html

Mosaici che si assomigliano





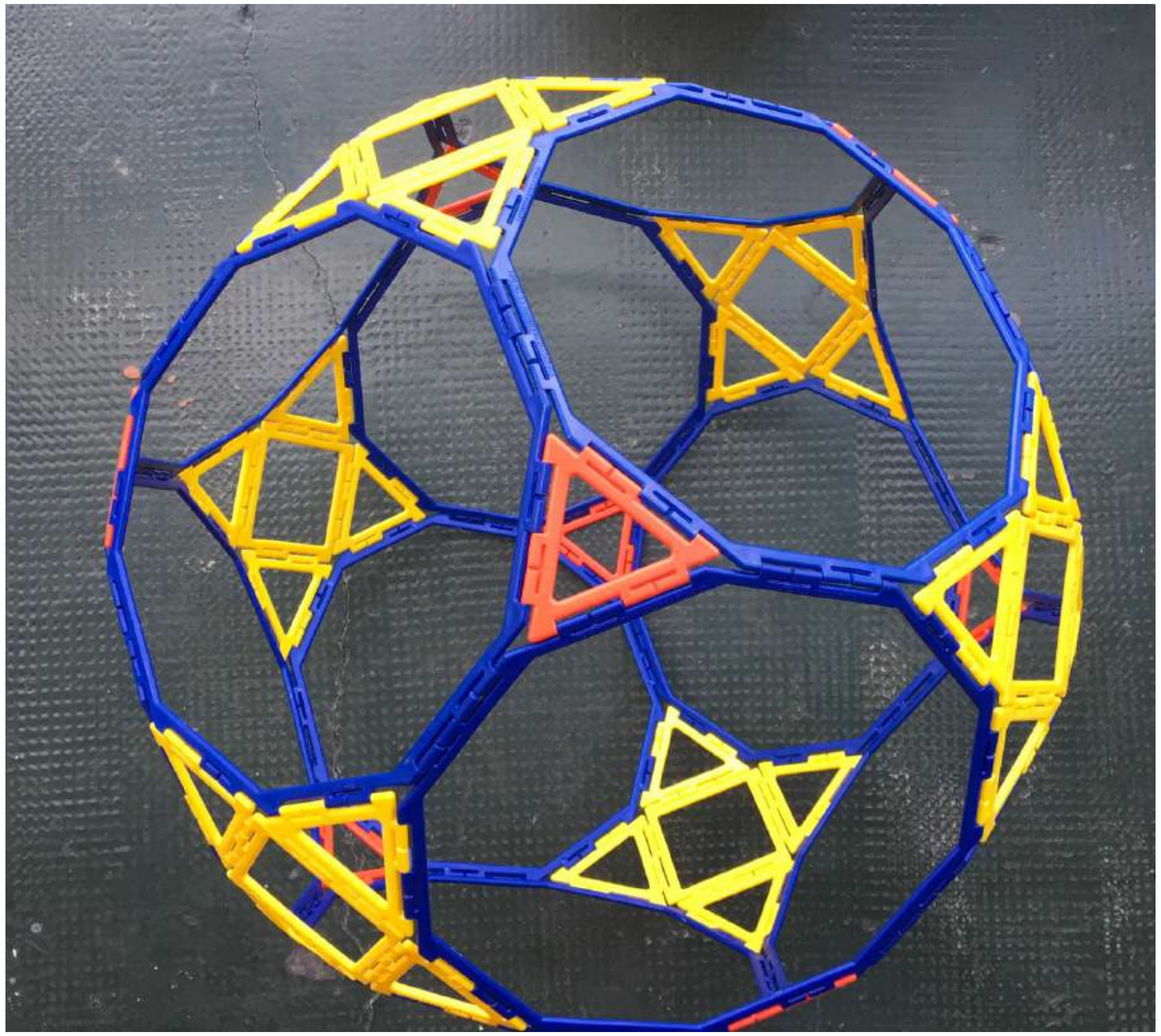


Il problema: *a quale dei due mosaici qui sopra assomiglia, dal punto di vista della simmetria, il mosaico sulla sinistra?*

https://www.animatamatematica.it/2022/08/27/mosaici/

Una bella storia dell'uso di questa animazione in una classe: le reazioni di ragazzi (anche molto giovani) di fronte a quesiti di questo genere può essere sconcertante.

Il poliedro che non c'è



Un'altra bella storia (già raccontata a un convegno Pristem: Bari, 2018).

https://www.problemi.xyz/wp-content/uploads/2018/12/paderno-fig-col.pdf

I poliedri sono rigidi

Teorema

Se due poliedri convessi sono combinatoriamente equivalenti e se l'isomorfismo combinatorio fra i due si restringe a un'isometria su ogni faccia, allora esiste un'isometria fra i due poliedri.

Il teorema si deve a Cauchy e la dimostrazione non è immediata.

Eppure…

Eppure, tradotto in un linguaggio che le mani conoscono, dice semplicemente che, se si fissano le facce con cui costruire il poliedro + le regole di assemblaggio, allora c'è una sola possibilità.

Cioè, in un certo senso, i poliedri sono *rigidi*.

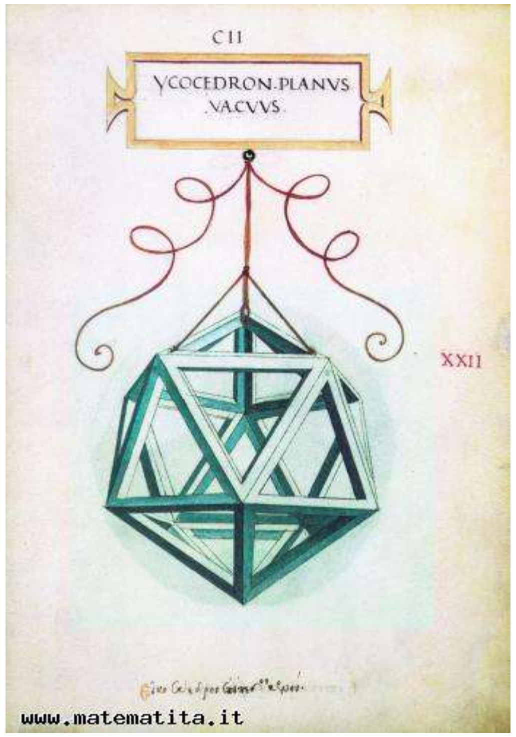
La traduzione

Teorema Se due poliedri convessi sono combinatoriamente equivalenti e l'isomorfismo combinatorio fra i due si restringe a un'isometria su ogni faccia, allora esiste un'isometria fra i due poliedri.

- *isomorfismo combinatorio* = quali facce sono adiacenti a quali altre = conosciamo le regole di assemblaggio.

- *isometria su ogni faccia* = abbiamo in mano le facce con cui costruire il poliedro.

- *isometria fra i due poliedri* = con queste premesse, c'è una sola possibilità.



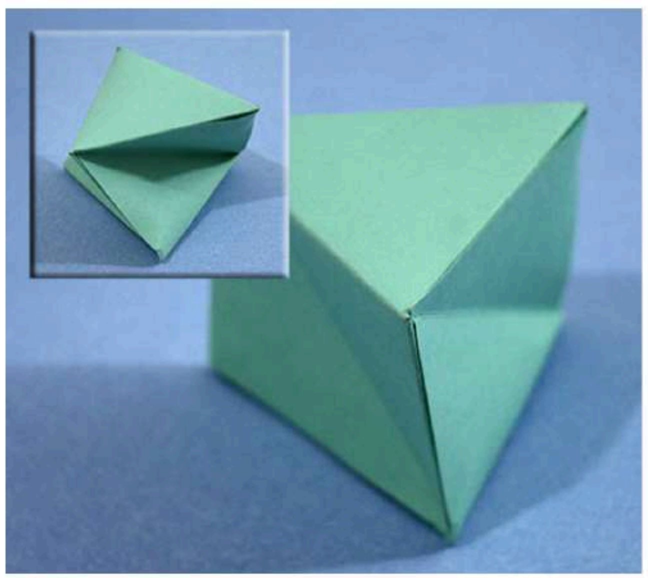
Per esempio, se una persona ha a disposizione un sacco di triangoli equilateri tutti uguali e le chiedono di unirli a 5 a 5, ottiene necessariamente un icosaedro, non è possibile che salti fuori un'altra cosa.

I poliedri sono rigidi… o no?

Teorema

Se due poliedri convessi sono combinatoriamente equivalenti e l'isomorfismo combinatorio fra i due si restringe a un'isometria su ogni faccia, allora esiste un'isometria fra i due poliedri.

Wunderlich's Jumping Octahedron



Subentra un altro problema:
chi ha costruito poliedri con un set di tessere predisposte non ha dubbi su questo teorema perché le sue mani lo conoscono già.
Ne è talmente convinto che fa fatica ad accettare che possa non essere vero per i poliedri non convessi. **Eppure…**

NB Le costruzioni possono generare controesempi (che possono diventare idee per dimostrazioni, anche se non sono dimostrazioni).

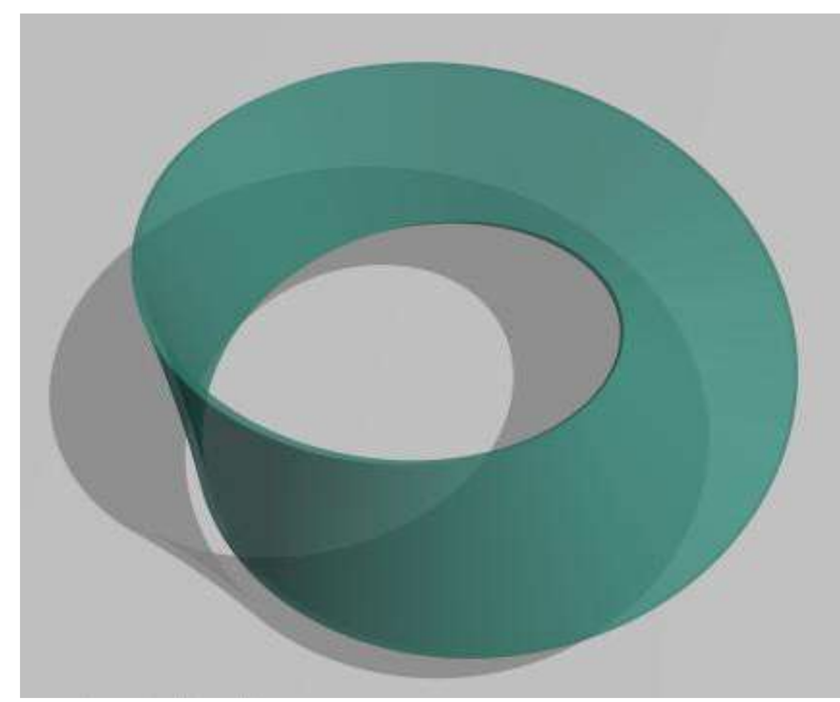
https://www.cutoutfoldup.com/903-wunderlich-s-jumping-octahedron.php

Nastri di Moebius

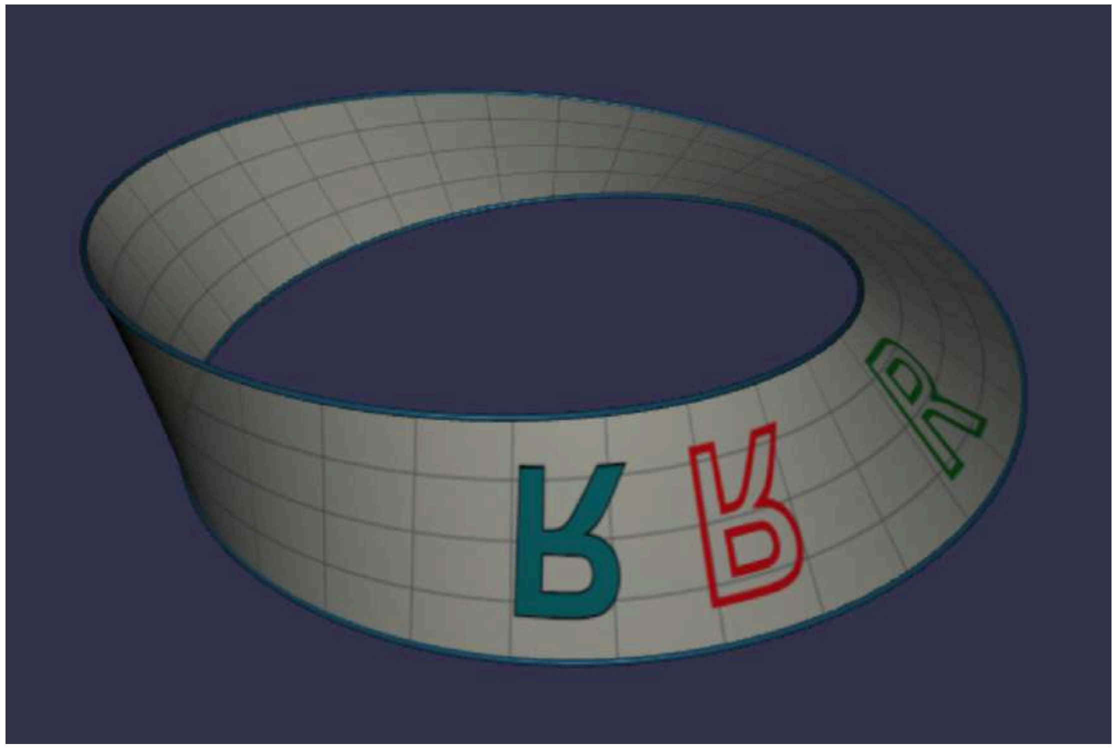
I nastri di Moebius sono un bell’esempio per incuriosire e coinvolgere anche i più piccoli e per educarli all’osservazione.

Ma questo è un nastro di Moebius?
Quando è mancato il collegamento tra mani e cervello, questa domanda può mettere in difficoltà.

Quanto è spesso un nastro di Moebius?
La storia di una domanda che ha scatenato una discussione infuocata…



Nastri di Moebius



Il nastro di Moebius non è orientabile.

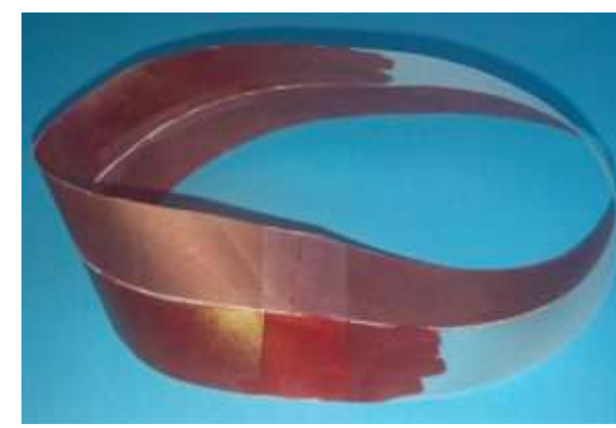
https://www.animatamatematica.it/2022/08/18/moebius-2/

Significa anche che "ha una sola faccia"?

Non proprio:
dipende da dove lo si mette!

Nastri di Moebius

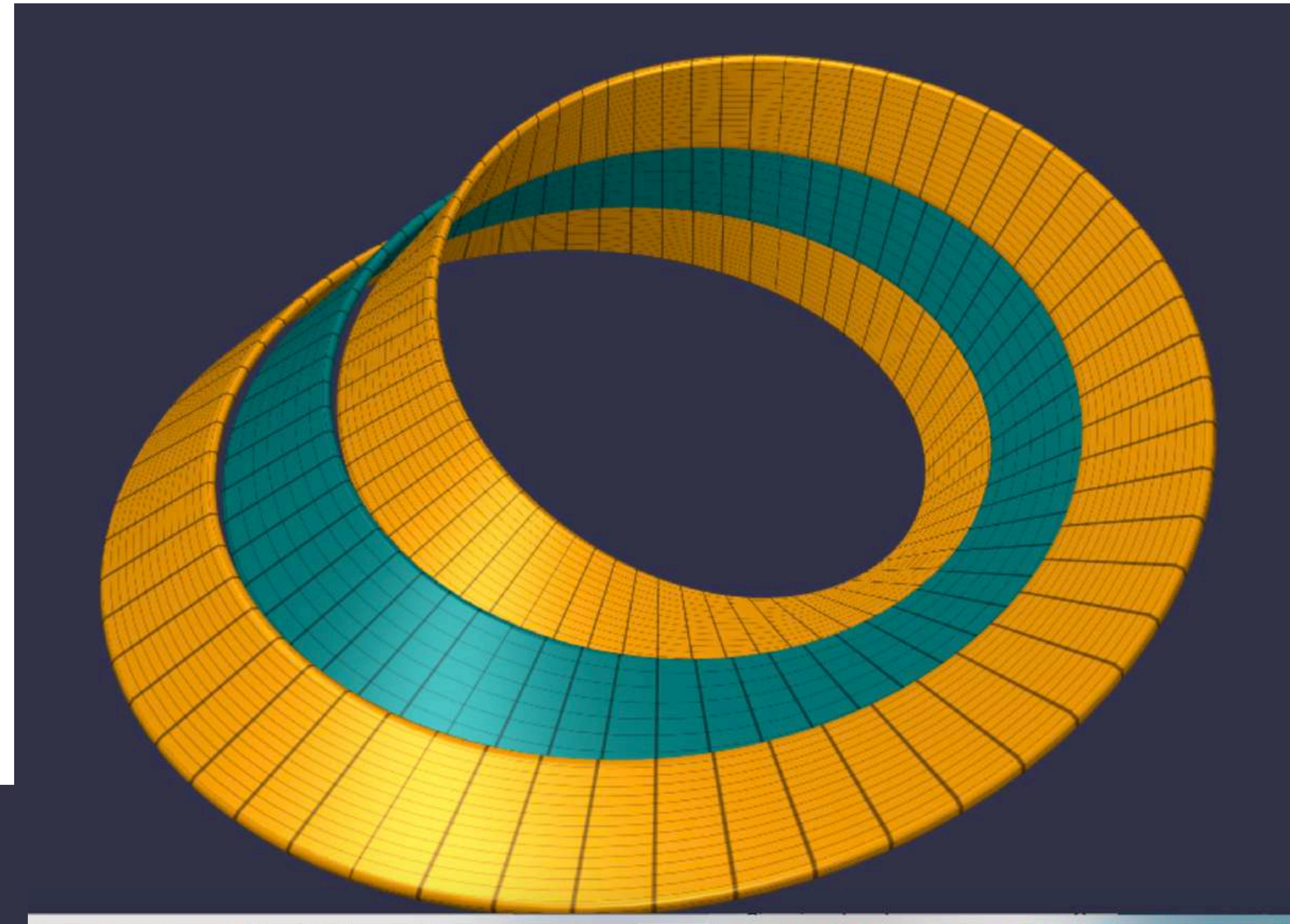
Le mani sanno che la carta è diversa da un lucido!

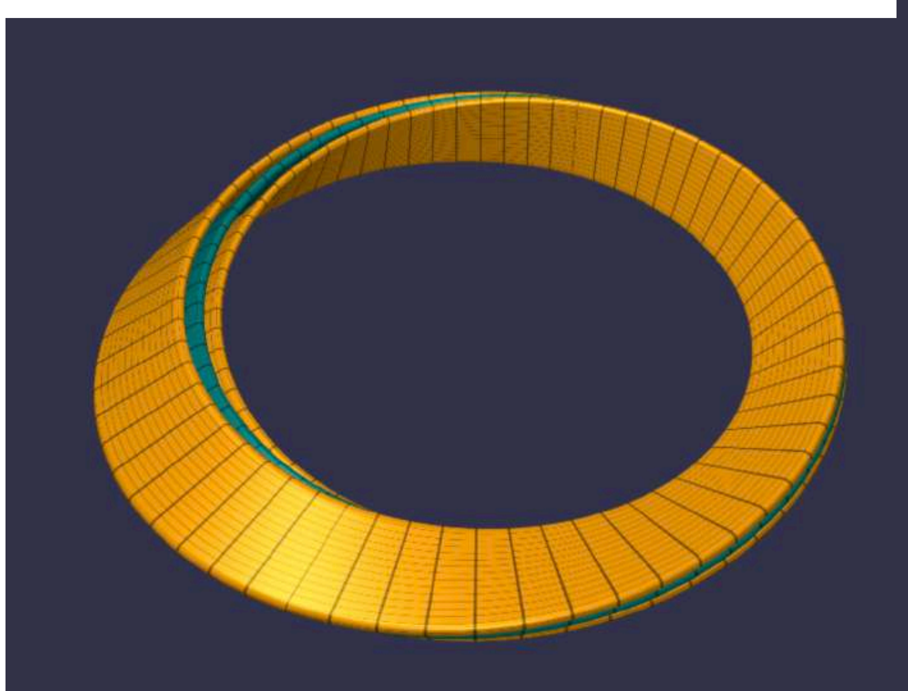


Volendo fare un modello di nastro di Moebius per un’esposizione, occorre (e non è facile!) spiegare all’artigiano che ha il compito di decorarlo che è **necessario** che la colorazione coincida sulle (apparenti) due facce.

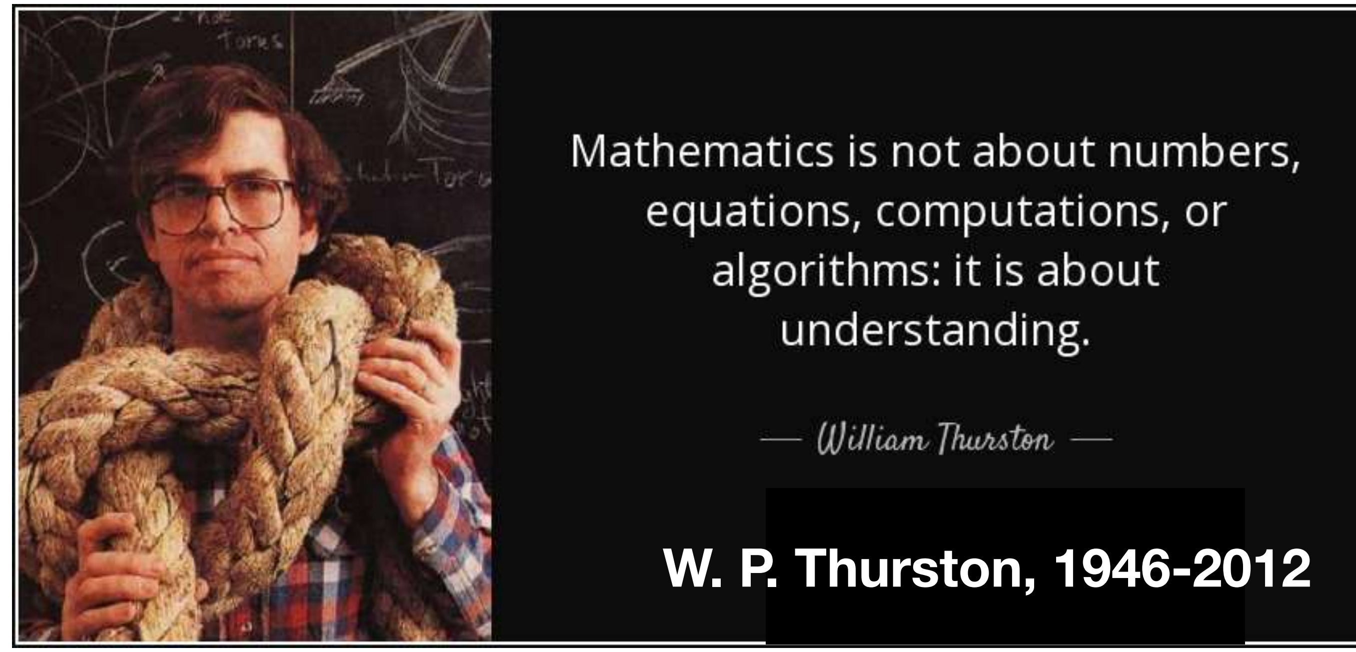
Come si fa?

Come si fa ad *assottigliare* un nastro di Moebius già costruito?
Piegarlo a metà non funziona!





Qua https://www.animatamatematica.it/2022/08/14/moebius/ un suggerimento.



La via è lunga e il cammino è malvagio…
Dante, Inferno canto XXXIV

Grazie per l’attenzione!

maria.dedo57@gmail.com