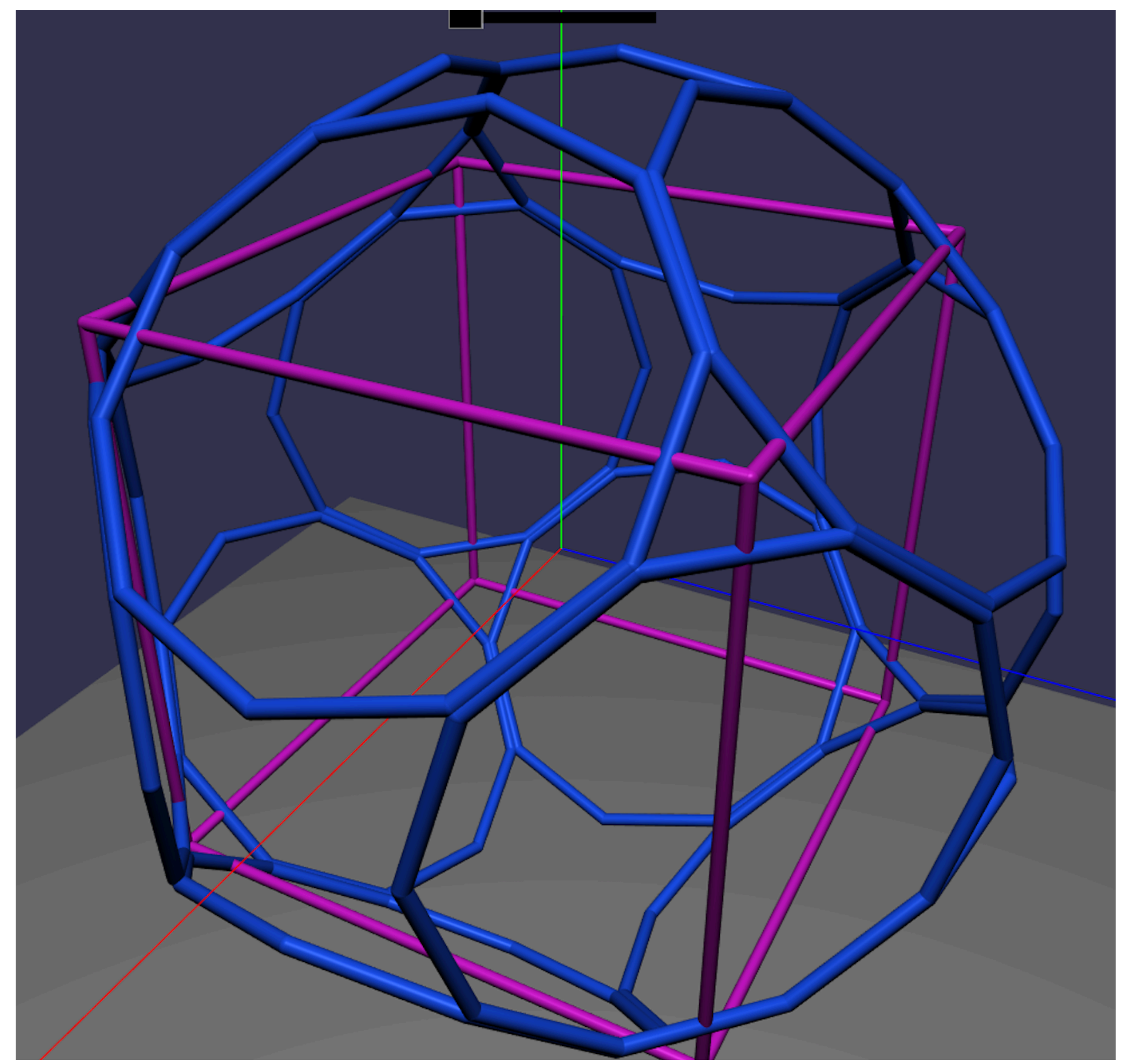
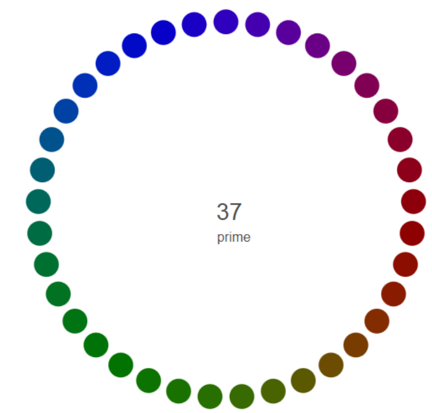
Aboliamo la geometria?!



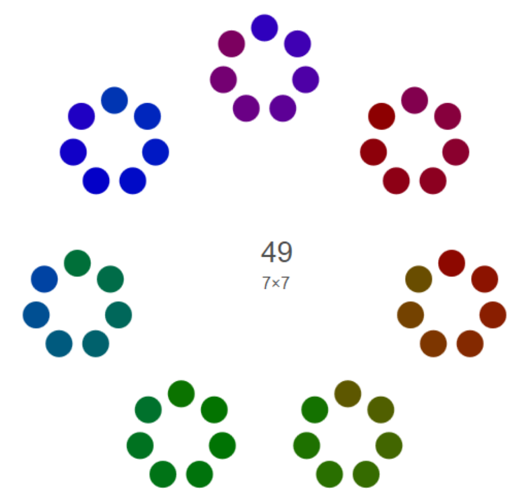
Convegno Pristem + mateinitaly
Un anno di laboratori, di giochi, di… matematica
Bari, 5 ottobre 2018
M. Dedò + GM Tedesco

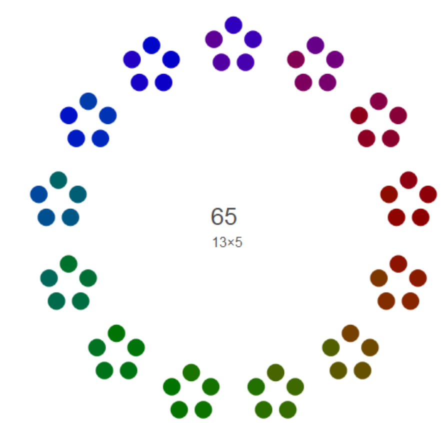
Perché questa provocazione nel titolo?

L’insegnamento dovrebbe tenere come *bussola* l’obiettivo di **dare significato** ai concetti e agli strumenti che si introducono.



Un punto di vista geometrico (**visione d’insieme** del problema che si ha di fronte, attenzione alla **struttura**, prima di perdersi nei dettagli, capacità di **rappresentazione**…) è **una** delle maniere (non certo l’unica) per dare significato (e non solo ad argomenti di geometria, ma anche in diversi settori della matematica).





http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

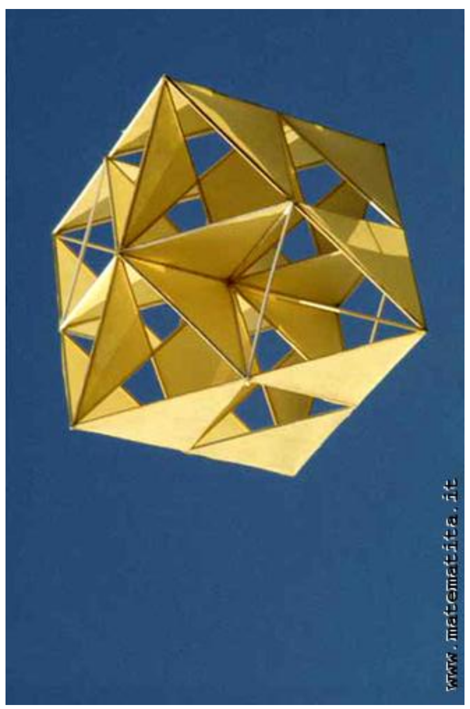
Invece, l’insegnamento della geometria, come appare da molti libri di testo scolastici, sembra avere l’obiettivo di **togliere significato!**

Claudi Alsina: *La enseñanza de la geometría y el asesinato en el "mathematics express”*
http://claudialsina.com/la-geometria-y-el-asesinato-en-el-mathematics-express
Ai tredici assassini indicati da C. A. aggiungerei un quattordicesimo: **la fretta**!

Che cosa manca? Che cosa è di troppo?

Nei primi livelli scolastici:

- nomi, nomi, nomi (senza una **gerarchia** di importanza);
- formule, formule, formule (senza una **gerarchia** di importanza);
- … poi spunta la geometria analitica (e scompare tutto il resto…).



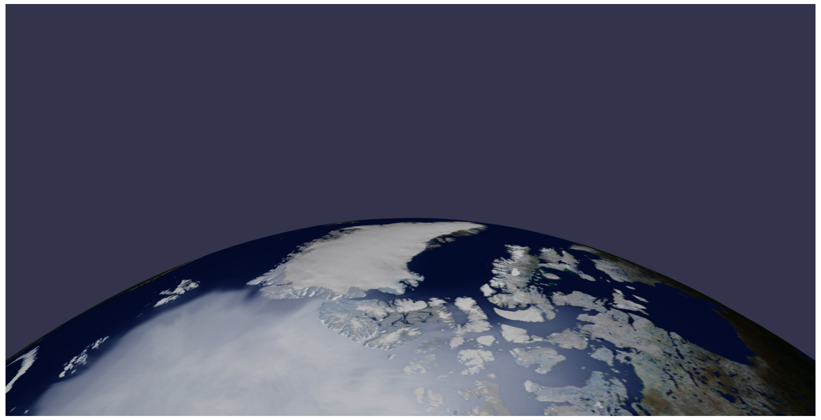
Nelle scuole superiori:

- rigore, rigore, rigore (ma, a volte, **rigore fasullo**)
- conti, conti, conti (ma, a volte, **senza controllo**)

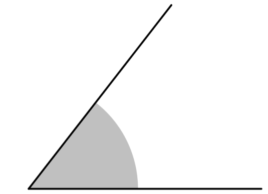
Non è un particolare *capitolo* della geometria che manca: manca proprio lo *spirito geometrico*, manca l'*osservazione* della realtà, manca l'attenzione al *punto di vista globale*, mancano i *fatti* della geometria, mancano i *problemi* della geometria, mancano *fantasia e immaginazione*.

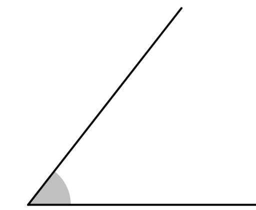
NB Fantasia e immaginazione non sono doti di élite, riservate a pochi eletti, ma sono capacità che la scuola (a tutti i livelli) potrebbe e dovrebbe coltivare *in tutti e per tutti*, aiutando ciascuno a riconoscere le proprie particolarità.

In che senso una gerarchia nei nomi e nelle formule?

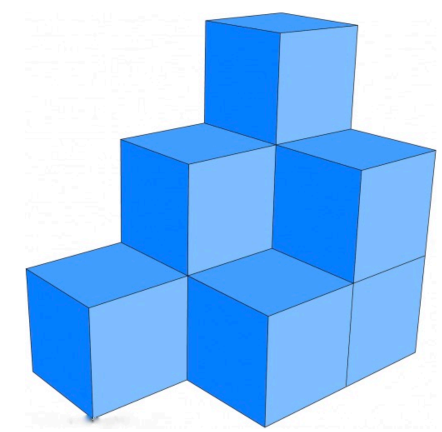


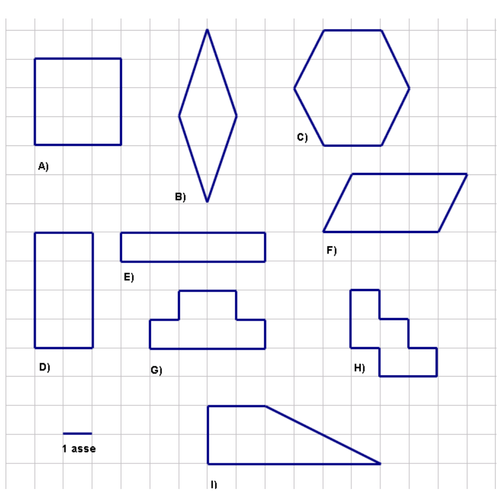
Nomi (un esempio). Sui libri e in rete si trovano i nomi di centinaia di tipi di aggettivi relativi agli angoli… magari senza nemmeno dire **che cos'è un angolo**.



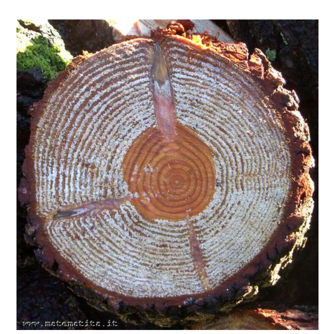


Formule (un esempio). **Non** sono sullo stesso piano le formule relative al volume e quelle relative alla superficie di un poliedro in 3D. E **non** sono sullo stesso piano le formule relative all'area e quelle relative al perimetro di un poligono in 2D.



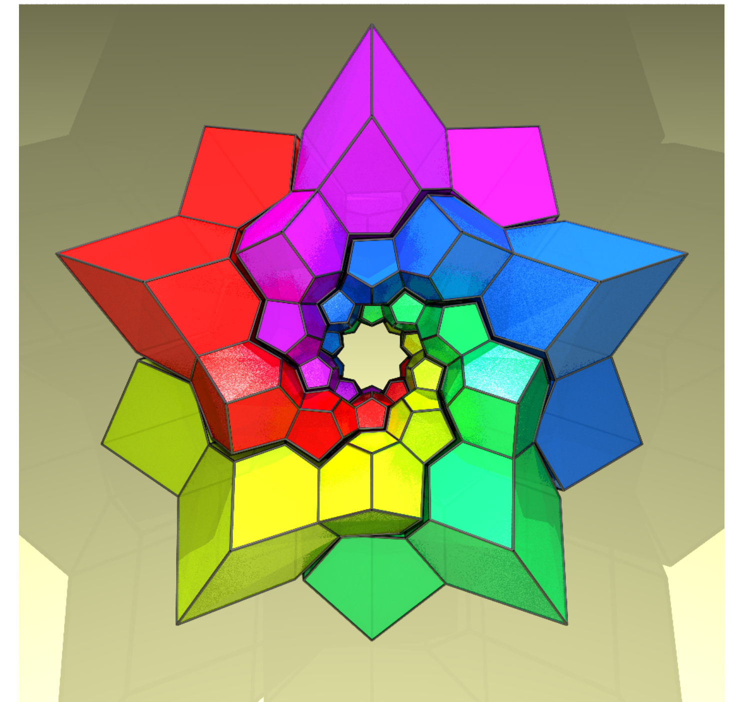


E poi succede: (INVALSI, II superiore) *Non mi ricordavo più la formula del perimetro di un parallelogrammo.*

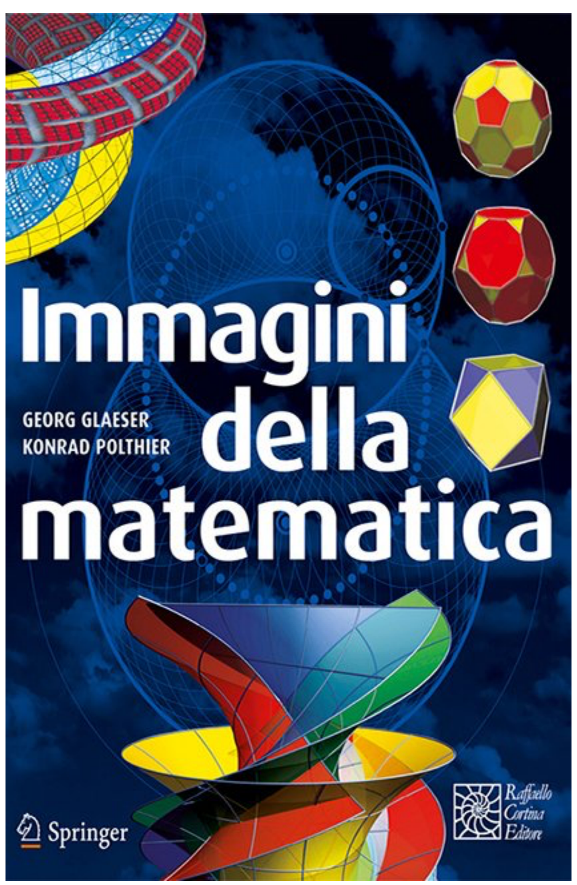


Per le figure curve è un altro discorso: le formule per la superficie della sfera (in 3d), o per la lunghezza di una circonferenza (in 2d) devono occupare una posizione di rilievo nella gerarchia delle formule.

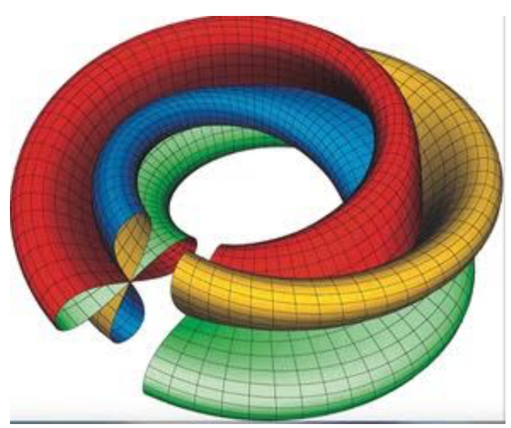
Un inciso: la geometria e le figure

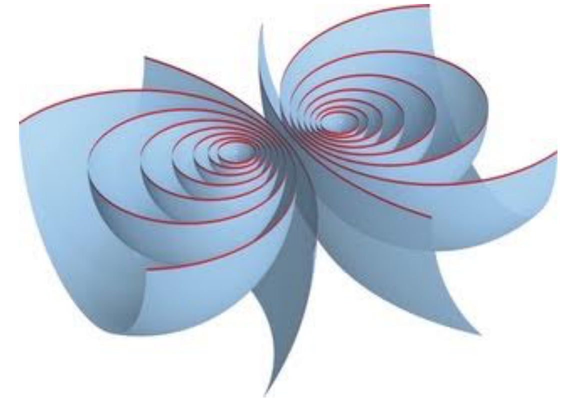


Sembra che molti pensino che
“*geometria = figure*”
e magari anche che
“*figure = cose per bambini piccini*”.



Le figure sono un linguaggio, che può essere facile o difficile, che occorre studiare, insegnare e imparare (e chi non legge, o perché non sa leggere o perché non si concentra a leggere, spesso non sa leggere nemmeno le figure!)



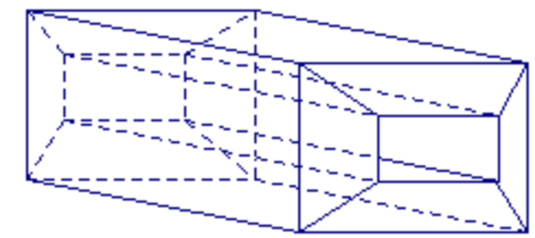


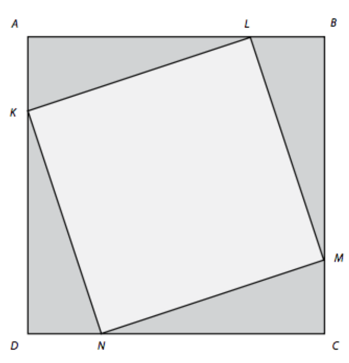
Un interessante esperimento di comunicazione.

In che senso rigore fasullo?

Educare al rigore significa **chiarezza concettuale** nelle definizioni e nelle motivazioni, nei modi e nelle forme che (a seconda dell'interlocutore) possano essere dall'interlocutore recepite e utilizzate.

Non si può definire un poliedro in una maniera che comprende anche i non semplicemente connessi e poi, arrivati alla relazione di Eulero, dire "Questo però non lo consideriamo un poliedro".





Non si può in una dimostrazione essere pedanti sui passaggi ovvii e scivolare via ("si vede che…!) su quelli che invece richiederebbero una giustificazione.

E perché poi il rigore deve esserci solo in geometria?

Rigore non significa pedanteria su alcuni punti (in genere i più facili) e faciloneria su altri (in genere i più complessi e delicati).

Per esempio: *Che cosa significa misurare? Che cos'è un movimento rigido? Che differenza c'è tra movimento rigido, isometria e congruenza?*

Il rigore è prezioso. Meglio però rinunciare al rigore piuttosto che rinunciare alla geometria!

In che senso conti senza controllo?

Il metodo delle coordinate è una bellissima **idea** (che si può esportare altrove… anche alle posizioni di un robot…). E la geometria analitica può essere un (prezioso!) **strumento**, che permette di fare cose che prima non si sapevano fare.

Ma l'idea si perde (e lo strumento si perde) se:

- i punti sono tutti a coordinate intere (numeri positivi e piccoli),
- le rette sono tutte parallele agli assi…
- le rotazioni sono sempre e solo di 90° e di centro l'origine,
- le riflessioni sono solo rispetto agli assi,

Nelle prime classi: sembra di introdurre uno strumento fasullo (per i problemi trattati basterebbe la carta a quadretti…). **Oltre:** sembrano ricette per far fare conti senza porsi il problema del **significato** di tali conti (*si fa così!*). E poi succede che…

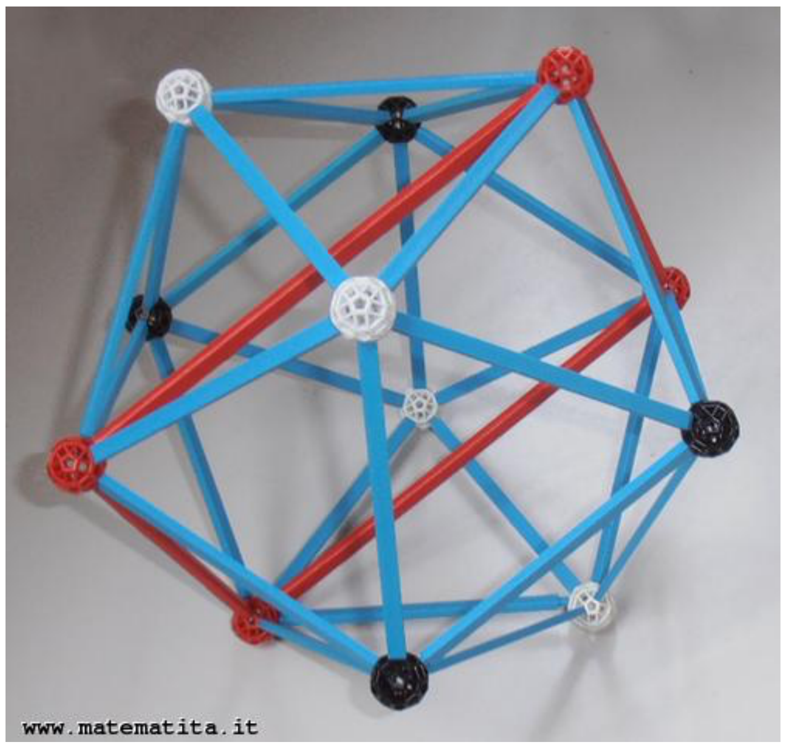
… parallele? o perpendicolari?
… una delle due…
… non mi ricordo mai quale…

… la distanza fra due rette sghembe diventa un problema difficilissimo, mentre… la usano anche i ragni!

*Spesso è proprio l'**osservazione della realtà** che può aiutare a recuperare lo spirito geometrico.*

Un altro esempio

Occorre sempre **un'idea** per impostare i conti, altrimenti il rischio di girare a vuoto (o di imbarcarsi in complicazioni inutili) è enorme.

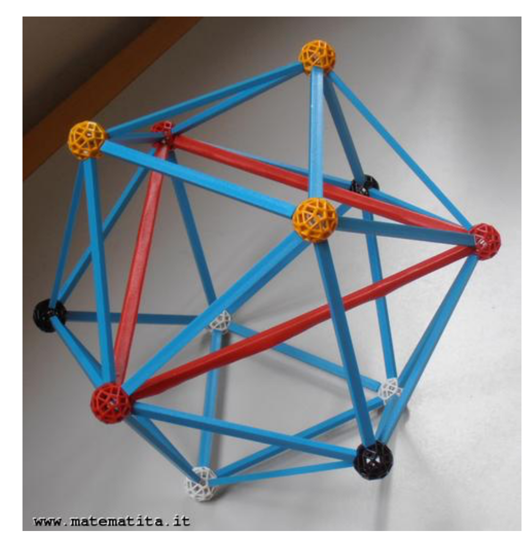


Un esempio. Trovare (in un opportuno sistema di riferimento) le coordinate dei vertici di un icosaedro.

Il problema è semplice **SE** si conoscono alcuni fatti geometrici: i dodici vertici dell'icosaedro sono distribuiti su tre rettangoli aurei, su tre piani che sono a due a due ortogonali fra loro.

Possono essere, per esempio: $(0,\pm 1,\pm\boldsymbol{\tau})$, $(\pm 1,\pm\boldsymbol{\tau},0)$, $(\pm\boldsymbol{\tau},0,\pm 1)$.

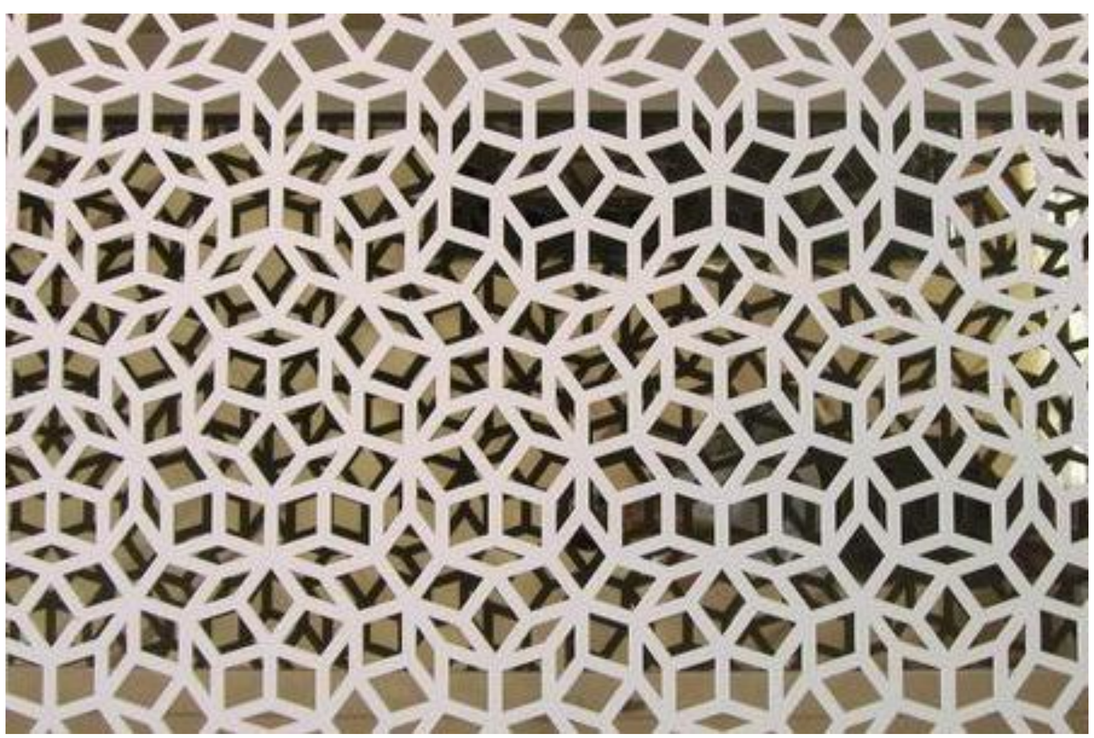
Un'obiezione: è difficile e richiede tanto tempo.
Sì, ma… quello che ci interessa non sono certo le coordinate dei vertici dell'icosaedro… siamo alla ricerca dello *spirito geometrico*… e questo richiede **lentezza**.



Vogliamo davvero abolire la geometria?

Ovviamente no!

Abolire la geometria equivale ad amputarsi un braccio o una gamba, precludendosi a priori una delle (molte, diverse) maniere che abbiamo per guardare e interpretare la realtà.



Possiamo (***dobbiamo?***) però recuperare lo *spirito geometrico* (e recuperare un po' di *lentezza*…).

Ma che cos'è lo *spirito geometrico*?

Difficile darne una definizione. Però può essere facile individuare esempi dove c'è e esempi dove non c'è.

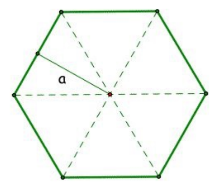
Due metodi a confronto

Da dove piovono? Mistero!

POLIGONI REGOLARI

- L'apotema si calcola moltiplicando la misura del lato per il numero fisso (che dipende dal numero dei lati)

$$a = l \cdot f$$



- Alcuni numeri fissi:

	Triangolo	Quadrato	Pentagono	Esagono
f = numero fisso	0,288	0,5	0,688	0,866

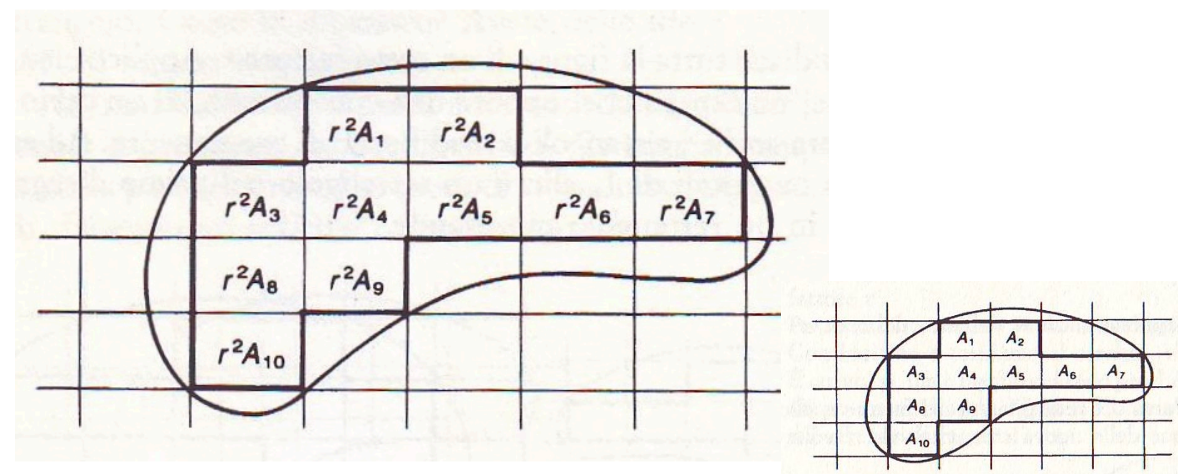
Poligono	Numero di lati	Angolo	Numero fisso f	Costante d'area φ
Triangolo equilatero	3	60°	0,289	0,433
Quadrato	4	90°	0,5	1
Pentagono	5	108°	0,688	1,720
Esagono	6	120°	0,866	2,598
Ettagono	7	≈ 128,571°	1,038	3,634
Ottagono	8	135°	1,207	4,828
Ennagono	9	140°	1,374	6,182
Decagono	10	144°	1,539	7,694
Dodecagono	12	150°	1,866	11,196

Certo così si fa in fretta (anche il volume dei poliedri regolari!), **ma ...**

dov'è la geometria???

Spirito geometrico: **NO!**

- similitudine: esiste una formula che dà l'area di un poligono regolare in funzione (solo) del lato)
- come varia l'area in una similitudine
- ecco il numero fisso (e anche π).

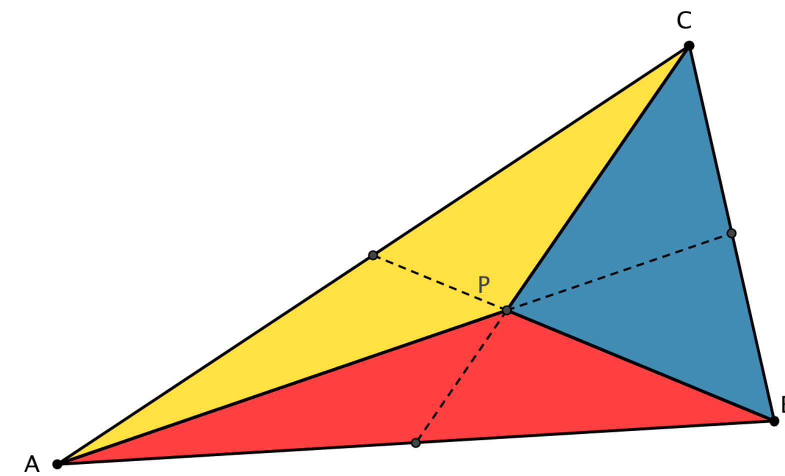


Andando piano, si può
- stabilire delle **priorità**;
- mettere in evidenza le **idee** e i **legami** fra temi diversi;
- riorganizzare gli argomenti intorno ad alcune **idee forti**.

Spirito geometrico: **SÌ!**

Mettere in evidenza le idee: un problema

Un appezzamento triangolare da dividere in tre parti uguali: occorre trovare un punto P, all'interno di un triangolo ABC, tale che i tre triangoli APB, BPC, CPA abbiano uguale area.

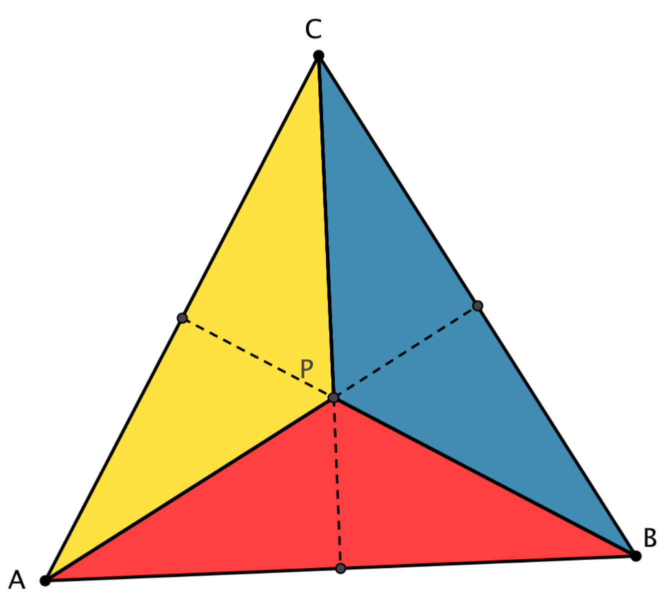


Soluzione: P è il baricentro del triangolo ABC. Perché?

Si può fissare un sistema di riferimento e fare i conti (… se si è proprio disperati).

Si può far vedere che i sei triangolini in figura hanno uguale area.

Oppure:



Se ABC è equilatero; è facile:

i tre triangoli sono addirittura uguali (per rotazione).

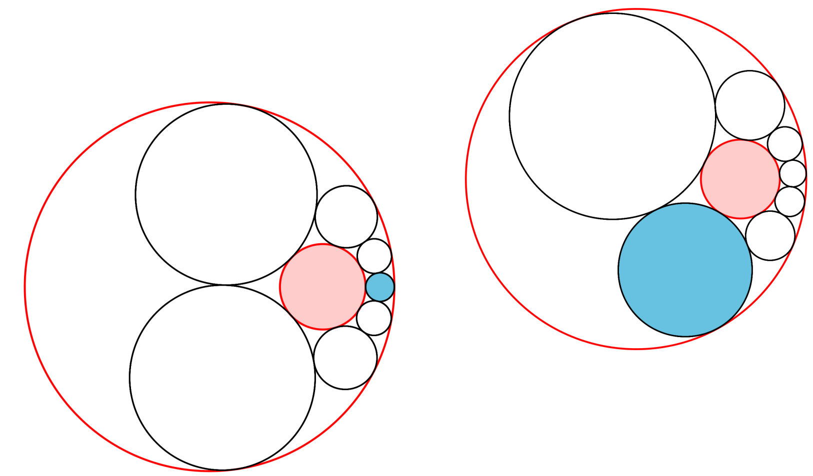
Ma questo **non** è un caso particolare!

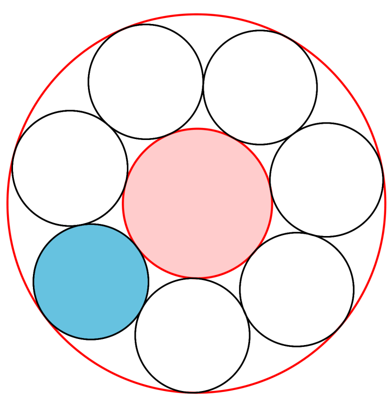
- Il problema è invariante per affinità (le affinità conservano i rapporti fra le aree).
- Con un'affinità si può mandare un triangolo qualsiasi in un triangolo equilatero.
- Le affinità mandano baricentri in baricentri.
- FINE

Un altro problema: la stessa idea, lo stesso metodo

Il porisma di Steiner

Il fatto che la catena si chiuda o meno dipende solo dalle due circonferenze rosse, non dalla posizione della prima circonferenza blu. ***Perché?***

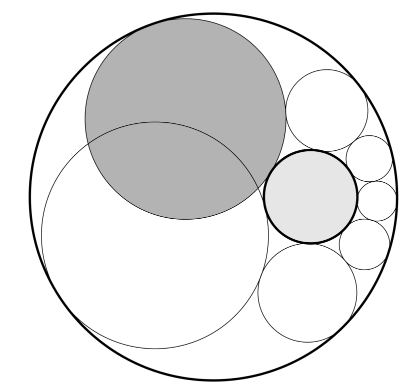




L'idea è **la stessa** di prima:

- il problema è facile quando le due circonferenze rosse sono concentriche;

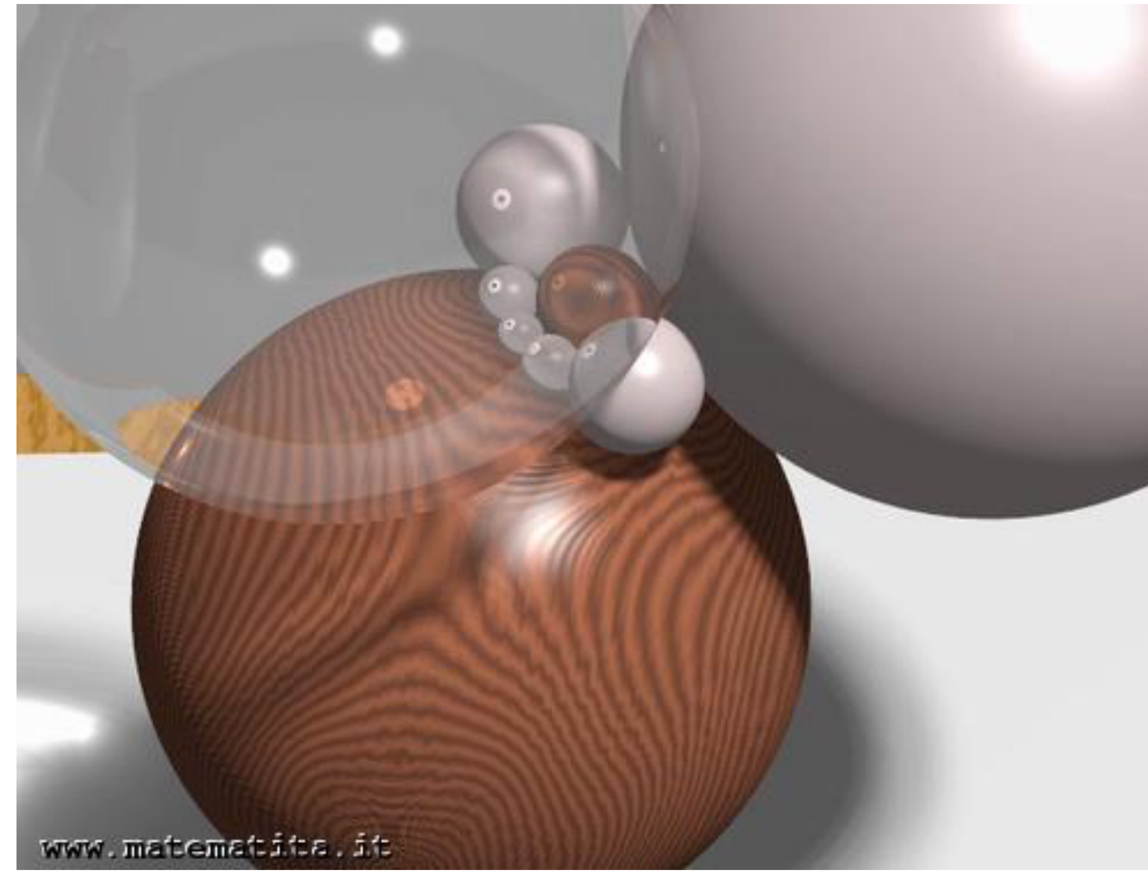
*Ma questo… **non** è un caso particolare!*

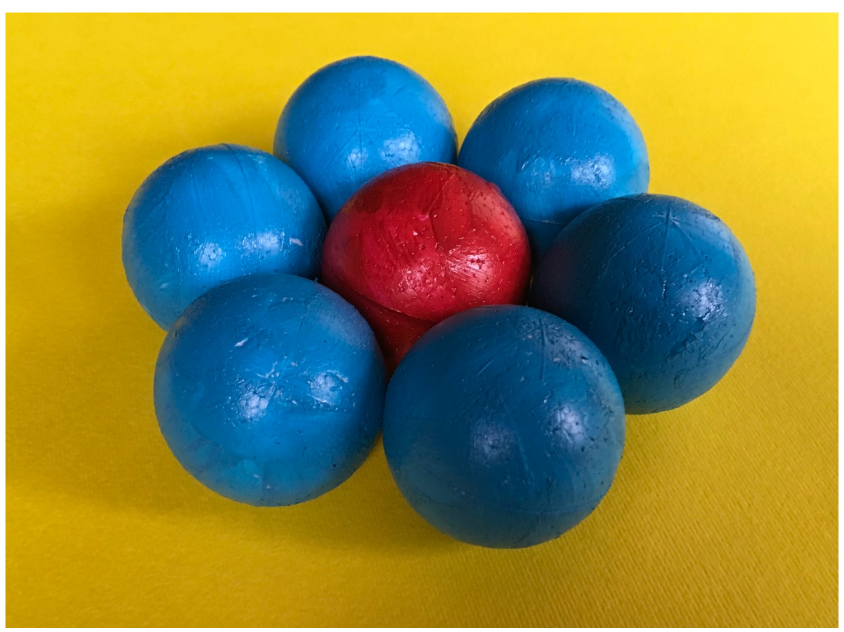


- Il problema è invariante per inversioni circolari: le inversioni circolari conservano la tangenza e mandano cerchi (e rette) in cerchi (o rette).
- Con un'inversione circolare si può mandare una qualsiasi coppia di circonferenze che non si intersecano in due circonferenze concentriche.
- Quindi: se l'affermazione è vera nel caso di due circonferenze concentriche lo è anche per due circonferenze qualsiasi (che non si intersecano).

Le sfere di Soddy

Problema analogo, approccio analogo, risultato diverso: questa volta la catena si chiude sempre e sempre in **sei** passi.



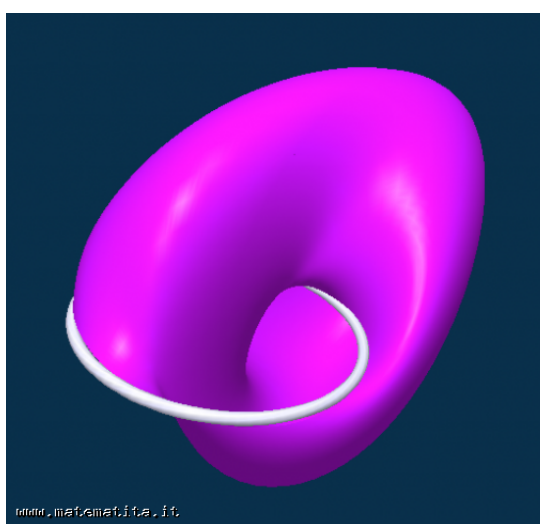


Ed è anche facile rendersi conto del perché.

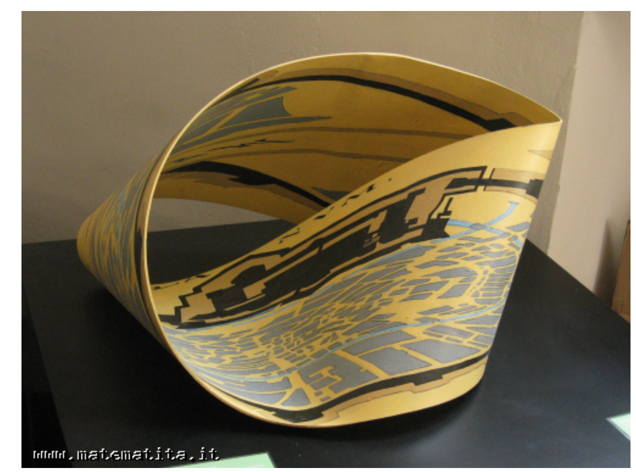
Un po' di topologia

La topologia è interessante (anche) dal punto di vista didattico perché:

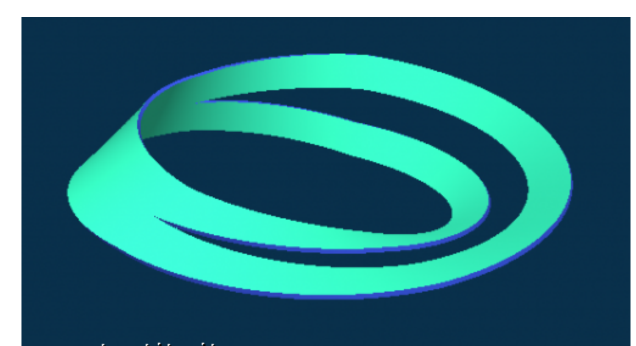
- può essere **intrigante e sconcertante** (quesiti che non richiedono un particolare *background*, ma spiazzano; risposte che non ci si aspetta…);
- dà ai ragazzi l'idea di ***pensare in grande*** (e poi si ritorna alle equazioni di II grado *guardandole dall'alto in basso*);
- si possono trovare problemi (grafi; nastri di Moebius) **accessibili anche ai primi livelli** di scuola, e insieme affrontabili a gradi diversi di approfondimento;
- stimola **immaginazione e visualizzazione**;
- …



Chissà che non sia proprio attraverso la Topologia che si possa recuperare la Geometria che è andata perduta!



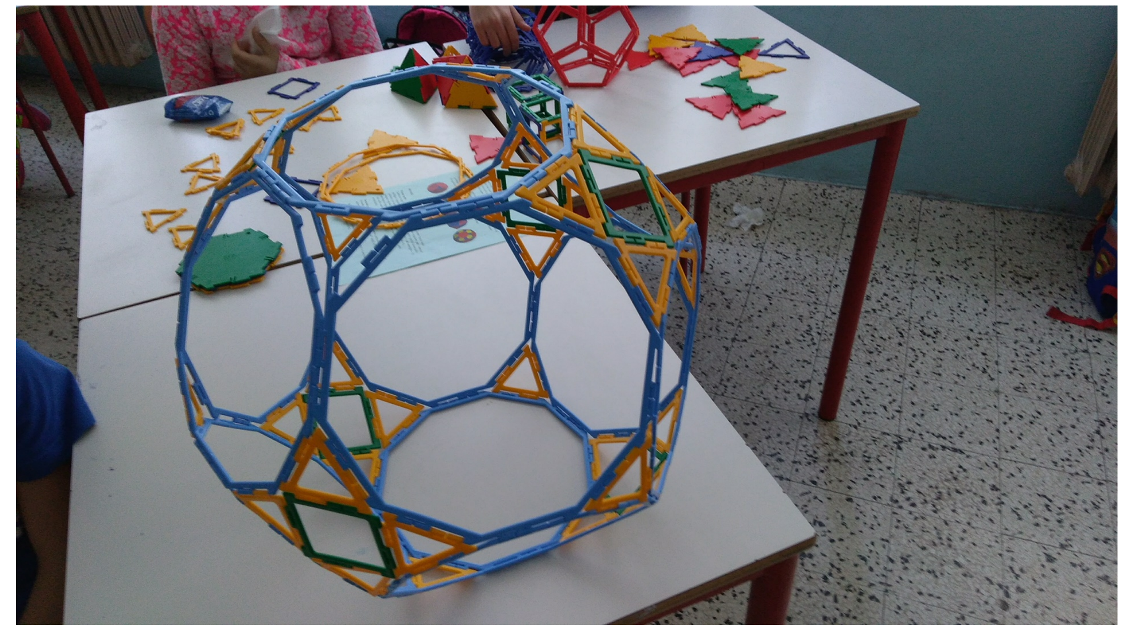
Sappiamo cosa succede tagliando a metà un nastro di Moebius. E se si prova a *piegarlo* a metà?



Per concludere, una bella storia: il *poliedro-che-non-c'è*

Un elogio della lentezza e degli errori

Costruito da un bambino di scuola primaria, che aveva la consegna di costruire dei poliedri con il Polydron usando però sempre lo stesso tipo di tessere.



*Uno di quei bambini a cui i libri di testo fanno credere che esistano solo cubi e piramidi…! I ragazzi **hanno** fantasia e immaginazione (anche geometrica): coltiviamole!!*

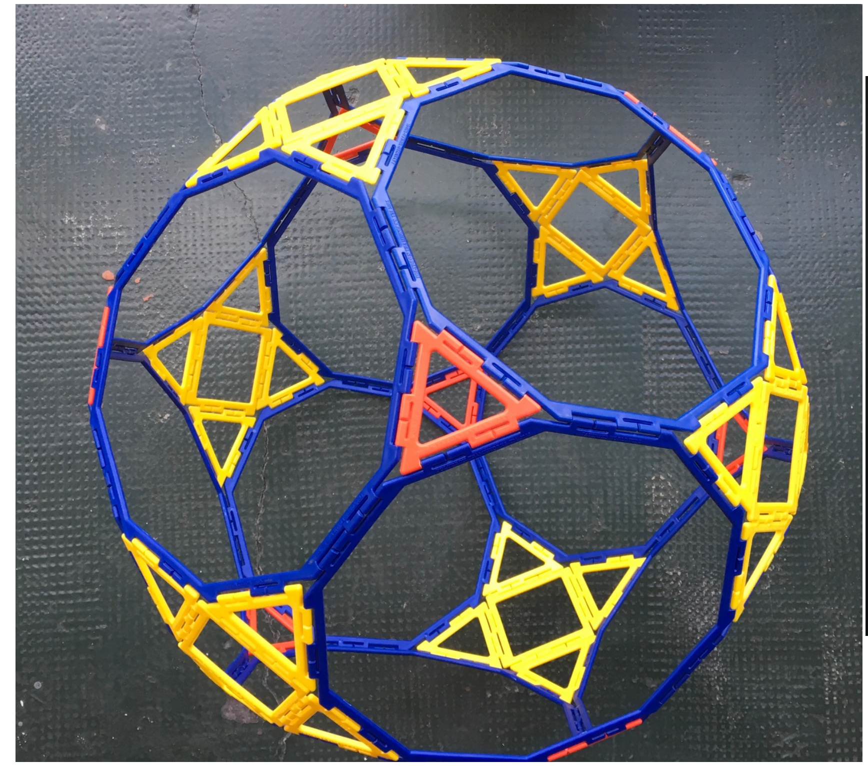
Ma questo poliedro esiste?

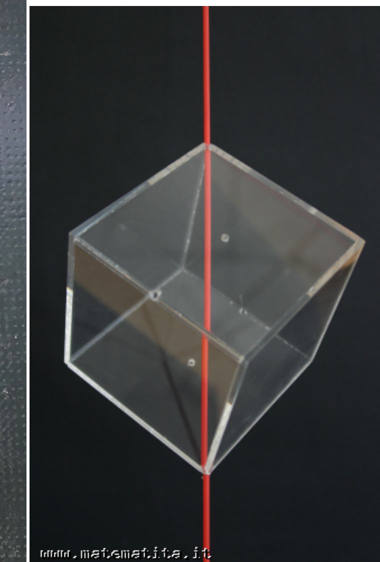
La domanda è legittima perché il poliedro **non** rientra fra i 92 ***poliedri di Johnson*** (poliedri convessi, a facce regolari, escludendo le due famiglie di prismi e antiprismi).

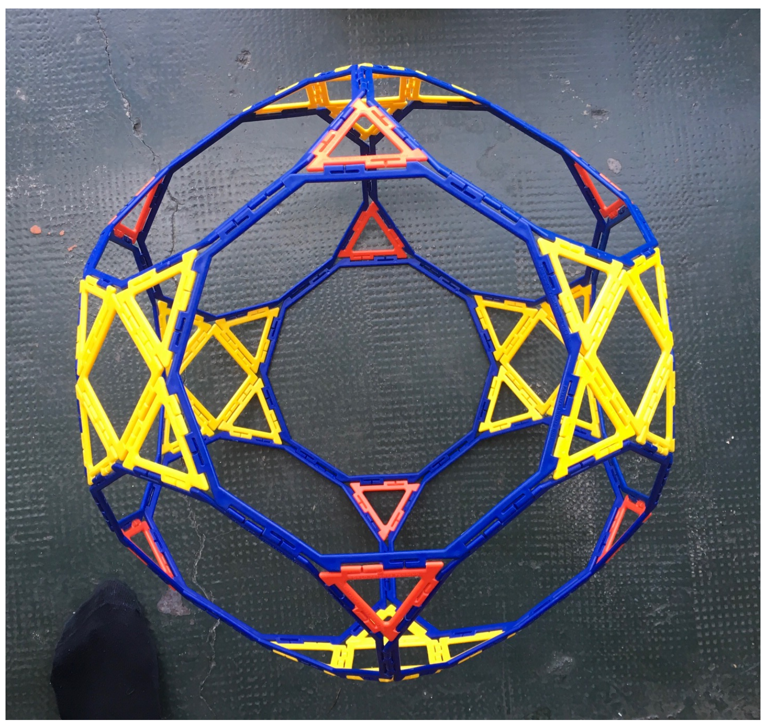
Ma come si fa a dimostrare che qualcosa non esiste?

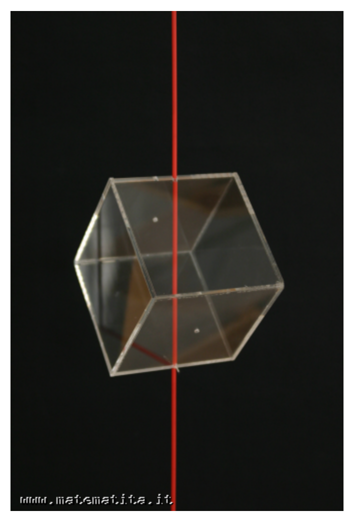
… quando poi si tratta di qualcosa che si ha in mano! In effetti è una situazione che genera equivoci e errori!

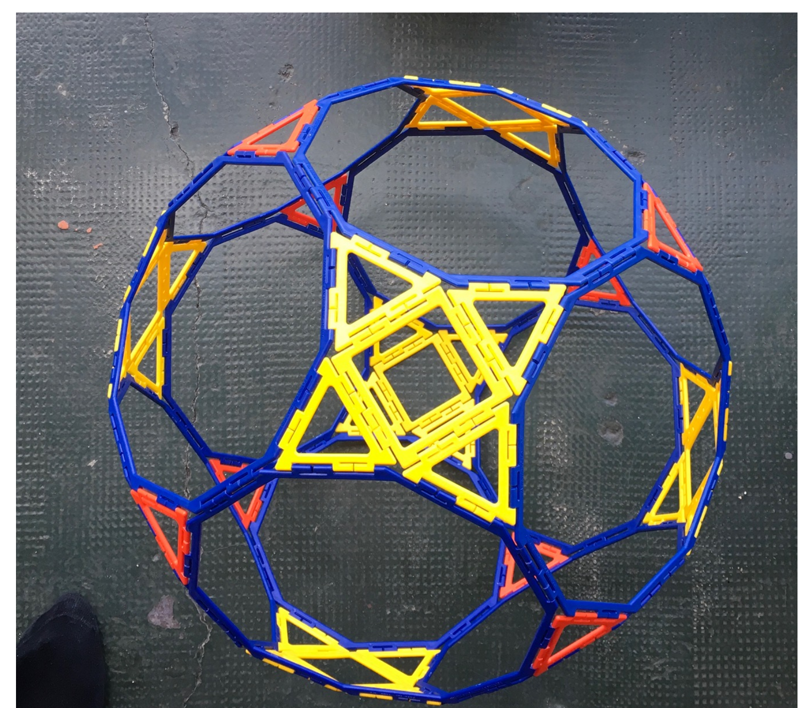
Primo passo.
Capire come è fatto, e capire se ci sia stata una forzatura nel costruirlo.
Emerge la **simmetria** (e si può usare il colore per metterla in evidenza).

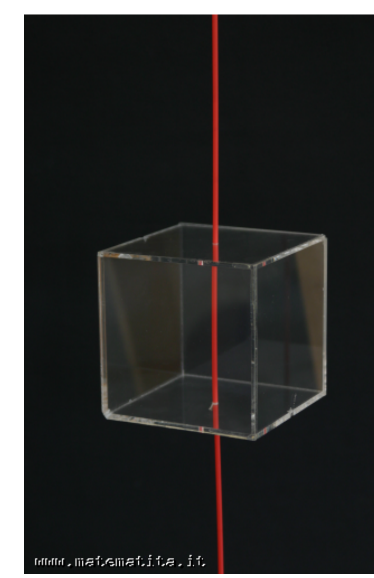












La simmetria emerge come una chiave di lettura estremamente potente, per organizzare l'osservazione…!

Per fare in fretta, basta rifarsi al teorema di Johnson: sappiamo che la lista è quella, è stato dimostrato, questo oggetto non c'è nella lista, quindi qualcosa non torna e la forzatura da qualche parte deve esserci, anche se non si vede. **FINE.**

Ma noi cerchiamo la strada tortuosa e vogliamo capire dove sta l'inghippo nell'oggetto che abbiamo in mano: che fare? bisogna fare i conti? ma come impostare i conti? Si possono trovare altre vie prima di fare i conti?

Per ogni poliedro (semplicemente connesso) vale la **relazione di Eulero** V-S+F=2.

La simmetria aiuta a contare.

V = 3x8 + 4x6 + 4x6 = 24+24+24 = 72

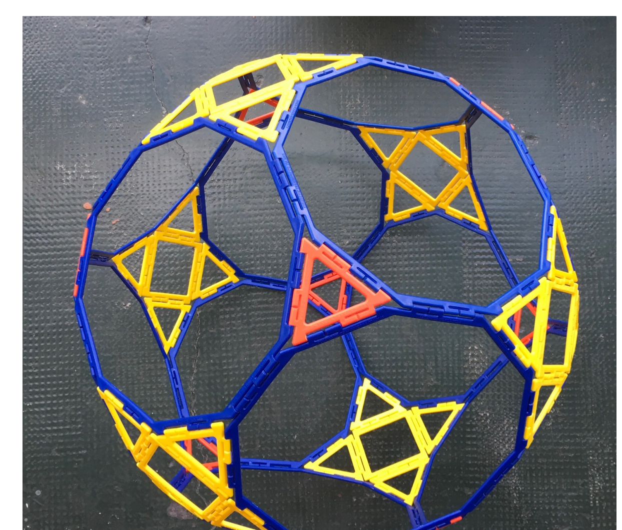
F = 12 + 6 + (8+4x6) = 18+32 = 50

S = 4x6 + (8x6 + 3x8) + 12x4/2 = 24+72+24 = 120

Allora:

V-S+F = 72 - 120 + 50 = 2

La relazione di Eulero (qui) non serve!



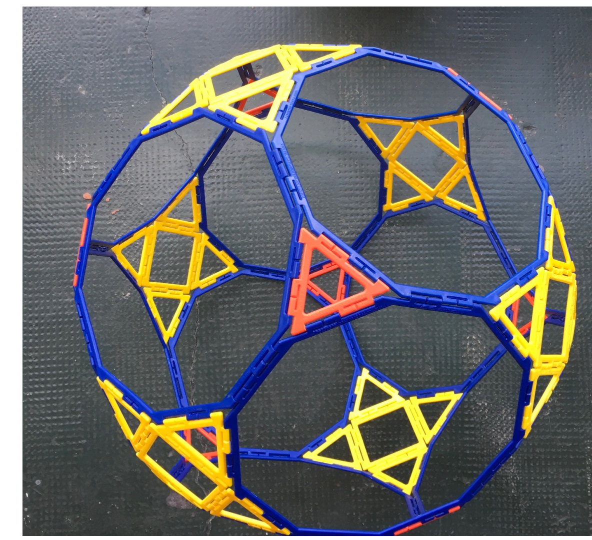
Il **teorema del difetto angolare**: in ogni poliedro (semplicemente connesso) la somma dei difetti angolari in ogni vertice vale 4π. Il difetto angolare in un vertice è quel che manca per arrivare a 2π (cioè al vertice piatto…).

I vertici sono 72, di cui

- 48 in cui arrivano due decagoni e un triangolo;
- 24 in cui arrivano due triangoli, un quadrato e un decagono.

Il difetto angolare in un singolo vertice vale:

- $2\pi - 4\pi/5 - 4\pi/5 - \pi/3 = \pi/15$ nel primo caso
- $2\pi - \pi/2 - \pi/3 - \pi/3 - 4\pi/5 = \pi/30$ nel secondo caso.



Quindi il difetto angolare totale del poliedro vale:

$48 \times \pi/15 + 24 \times \pi/30 = 4\pi$

Anche il difetto angolare (qui) non ci serve!

In realtà si poteva dire subito! La relazione di Eulero (e anche il difetto angolare!) rappresentano un fatto **topologico**.

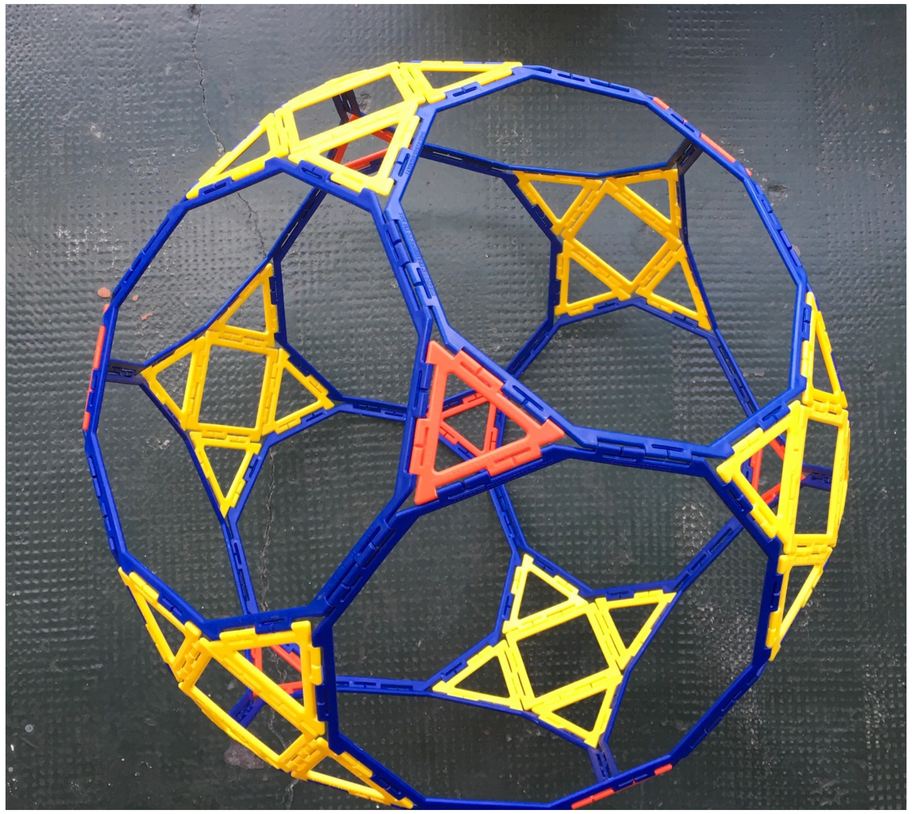
Di più: numero di Eulero e difetto angolare **sono proprio la stessa cosa**; (anche per poliedri non semplicemente connessi) succede che:

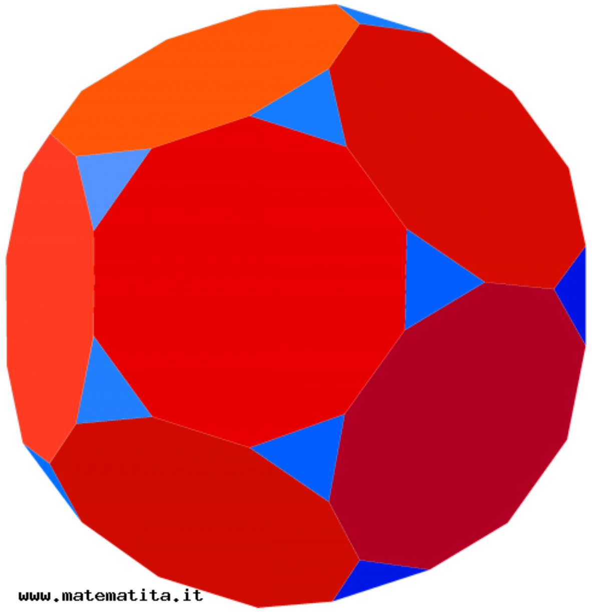
$\boldsymbol{\Delta = 2\pi\,(V-S+F)}$.

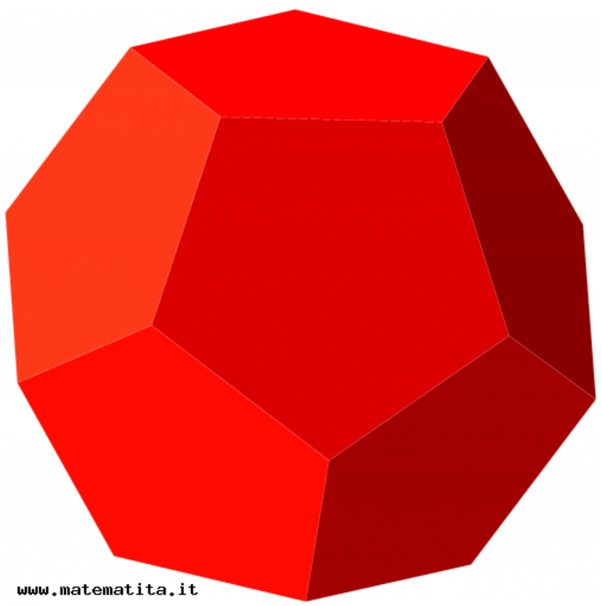
E allora non c'è speranza che possano servire per giustificare la non-esistenza del poliedro-che-non-c'è.

E allora?

Alcuni vertici sono **rigidi** (quelli in cui arrivano tre facce) e altri non lo sono. La terna di facce che appare in un vertice rigido è identica a quella che appare nel poliedro uniforme (3,10,10), di cui si sanno trovare le coordinate dei vertici.



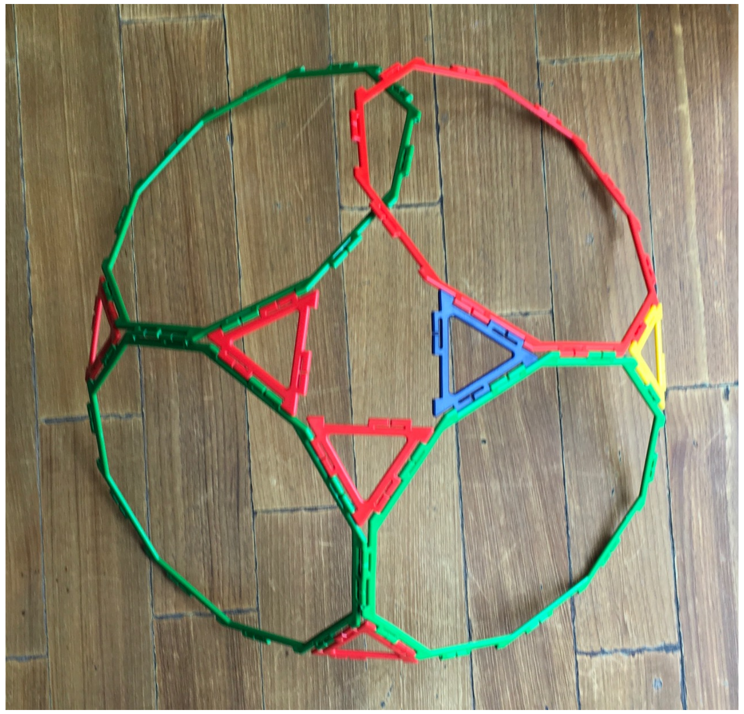


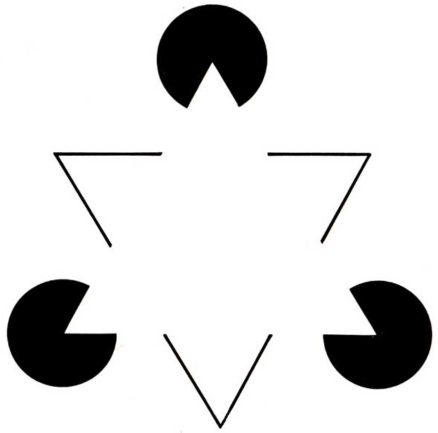


Ecco una maniera possibile per **impostare i conti**: si trovano le coordinate dei 4 punti che dovrebbero essere vertici di un quadrato e si controlla se lo sono. E si scopre che…

Sorpresa!

Non c’è neppure bisogno dei conti.
Costruendo quella parte di poliedro che coinvolge **solo i vertici rigidi**, è chiaro dove sta il problema, ed è evidente la forzatura necessaria per chiudere.



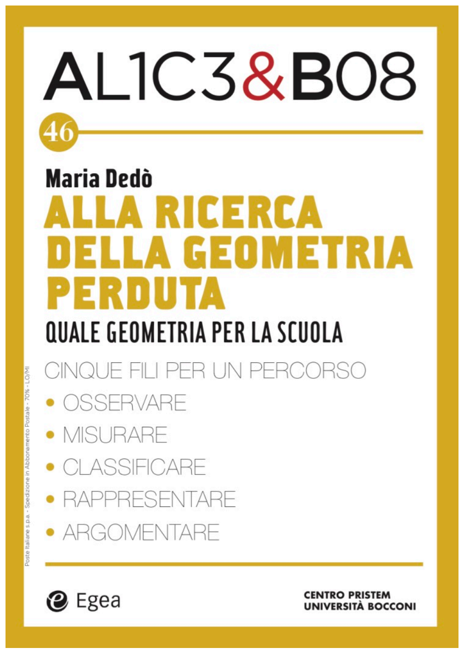


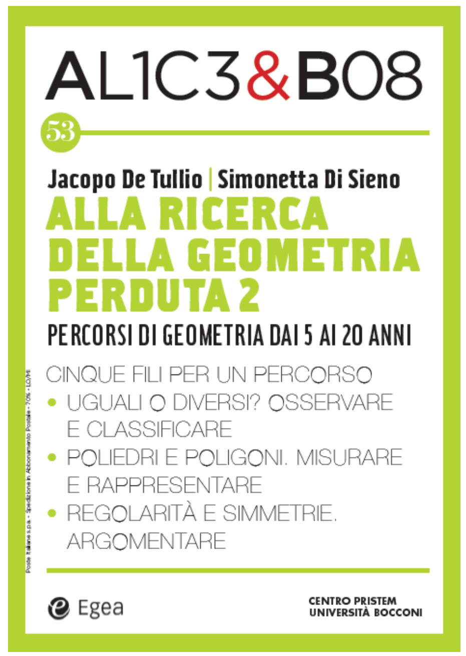
Proprio la simmetria è stato l’ingrediente che ci ha indotto in errore: la ricerca della simmetria spinge anche a vedere cose che non ci sono.

W gli errori!

La strada tortuosa ha fatto **incontrare fatti** inaspettati, ha fatto **collegare argomenti** apparentemente distanti, ha fatto acquisire una consapevolezza diversa sul **significato**.

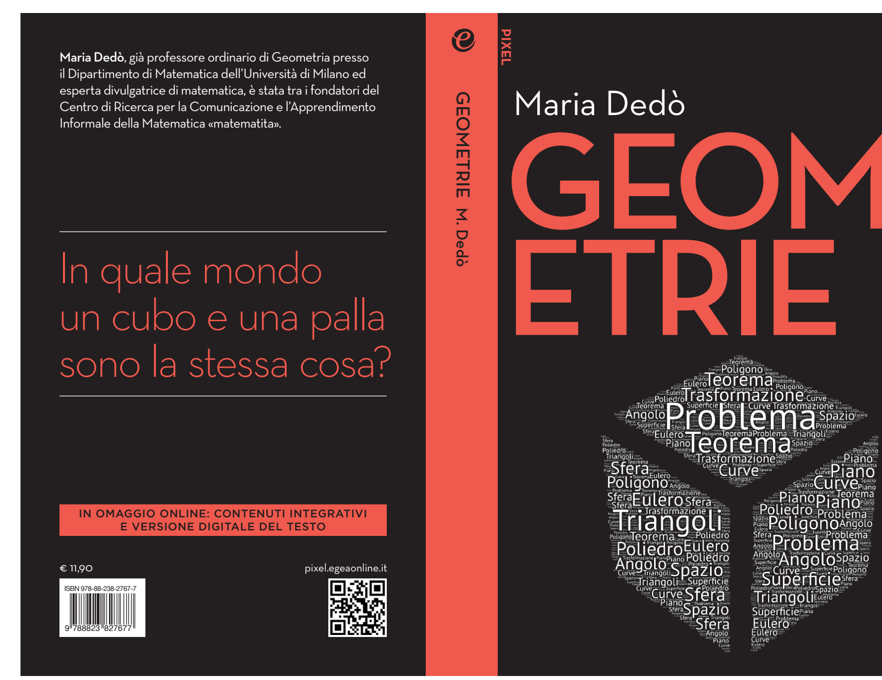
Alcune indicazioni bibliografiche





Qualche proposta per chi non vuole abolire la geometria.

Un libro che non è diretto alla scuola, ma…



… non sono pochi gli *Spunti didattici* (per la scuola primaria, per la scuola media, per la scuola superiore) che se ne possono estrarre. In particolare si può trovare qui il teorema del difetto angolare e il suo legame con la caratteristica di Eulero.

… grazie dell'attenzione!