Lo studio e lo sviluppo dei metodi diretti del calcolo delle variazioni è stato uno degli argomenti a cui Ennio De Giorgi ha sempre dedicato un'attenzione particolare. Lo entusiasmavano i risultati di esistenza di una soluzione per un problema di minimo, ma il suo spirito di matematico curioso ed esploratore lo spingeva ad appassionarsi ancora di più dei casi di non esistenza, in cui le successioni minimizzate presentano forti oscillazioni ed interessanti fenomeni asintotici e si può parlare di soluzioni soltanto in un opportuno senso generalizzato, o "*rilassato*".

L'enunciato più semplice di esistenza di una soluzione di un problema di minimo è noto come *teorema di Weierstrass* e stabilisce che ogni funzione continua su un insieme compatto ha massimo e minimo.
L'applicazione di tale principio ai problemi del calcolo delle variazioni si deve a L. Tonelli [1] il quale osservò che, modificando leggermente l'enunciato di Weierstrass nella forma: "*ogni funzione semicontinua inferiormente su un insieme compatto ha minimo*", si ottiene un risultato che può fornire direttamente (da qui il nome di metodi diretti) l'esistenza di una soluzione per molti problemi di minimo del tipo:

$$min\left\{\int_\Omega f(x,u,Du)dx : u \in X(\Omega)\right\}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ e $X(\Omega)$ è un opportuno spazio di funzioni su Ω.
In realtà l'analisi di Tonelli si fermò es- caso unidimensionale di integrali della forma:

$$(1) \qquad F(u) = \int_0^T f(t,u,u')\,dt$$

con integrandi f abbastanza regolari, per i quali dimostrò un risultato di semicontinuità inferiore che può essere enunciato nella forma seguente:

Teorema 1
Se una funzione $f:(0,T)\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ verifica le ipotesi:
i) $f(t,s,z)$ e $f_z(t,s,z)$ sono continue in (t,s,z)
ii) $f(t,s,z)\geq 0$ per ogni (t,s,z)
iii) $f(t,s,z)$ è convessa rispetto a z per ogni t ed s,

allora il funzionale (1) è sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto ad una convergenza debole delle funzioni assolutamente continue. Più precisamente, per ogni successione $\{u_n\}$ di funzioni assolutamente continue convergente uniformemente a una funzione assolutamente continua, con

$$\int_0^T\left|u_n'\right|dt$$

equilimitato, si ha:

$$F(u)\leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n).$$

Questo legame tra semicontinuità inferiore del funzionale integrale e convessità della funzione integranda non sfuggì a De Giorgi che nel 1968-1969, in un corso tenuto all'Istituto Nazionale di Alta Matematica di Roma [2], dimostrò il seguente risultato generale per un funzionale della forma:

$$(2) \qquad F(u,v) = \int_\Omega f(x,u,v)\,dx$$

Teorema 2
Siano Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, $p\geq 1$ e $q\geq 1$, e sia $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ una funzione non negativa tale che:
a) $f(\cdot,s,z)$ è misurabile per ogni (s,z);
b) $f(x,\cdot,z)$ è continua per *q.o.* x e per ogni z;
c) $f(x,s,\cdot)$ è convessa per *q. o.* x e per ogni s.

Allora il funzionale (2) è sequenzialmente semicontinuo inferiormente in $L^p(\Omega,\mathbf{R}^k)\times L^q(\Omega,\mathbf{R}^m)$ per la topologia prodotto della topologia forte in L^p e debole in L^q.

Questo risultato, sebbene fosse il primo di tale generalità a mettere in evidenza il ruolo della convessità per funzionali dipendenti da due variabili u e v non collegate tra loro e sia oggi citato in tutti i lavori sull'argomento, non venne mai pubblicato. Ne è rimasta traccia grazie agli appunti del corso presi dagli allora studenti Umberto Mosco, Giovanni Troianiello, Giorgio Vergara.
Dal risultato precedente si ottiene subito la semicontinuità inferiore dei funzionali:

$$(3) \qquad F(u) = \int_\Omega f(x,u,Du)\,dx$$

qualora la funzione integranda f verifichi le ipotesi (a), (b), (c).
Rimaneva il problema di stabilire se la semicontinuità dei funzionali del tipo (3) potesse essere sempre dedotta da quella dei funzionali del tipo (2) oppure se si potessero ottenere per funzionali del tipo (3) risultati di semicontinuità più generali.
Il seguente risultato fu ottenuto da De Giorgi, Buttazzo e Dal Maso nel 1983 e prova, almeno nel caso di funzionali con funzioni integrande di tipo *autonomo* (cioè indipendenti della variabile x), il verificarsi di questa seconda possibilità:

Teorema 3

Sia $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione tale che:

i) per ogni $z \in \mathbf{R}^n$ la funzione $f(\cdot, z)$ è misurabile su $\mathbf{R}$;

ii) per ogni $s \in \mathbf{R}$ la funzione $f(s, \cdot)$ è convessa su $\mathbf{R}^n$;

iii) la funzione $f(\cdot, 0)$ è semicontinua inferiormente su $\mathbf{R}$;

iv) la funzione

$$\alpha_f(s) = \limsup_{z \to 0} \frac{[f(s,0) - f(s,z)]^+}{|z|}$$

risulta localmente integrabile su $\mathbf{R}$.

Allora il funzionale:

$$F(u) = \int_\Omega f(u, Du)\, dx$$

risulta ben definito sullo spazio $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ed ivi semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$.

Accanto ai teoremi di semicontinuità per funzionali integrali andava sviluppandosi, anche a causa dell'affermarsi della teoria della Γ-convergenza che richiedeva la messa a punto di molti strumenti comuni, il concetto di *problema di minimo rilassato*, essenziale per trattare i casi in cui il problema in questione non abbia soluzioni. Ad ogni problema di minimo del tipo:

$$(P) \qquad \min\{F(u) : u \in X\}$$

in cui il funzionale F non sia semicontinuo inferiormente, si può associare il cosiddetto problema rilassato:

$$(\bar{P}) \qquad \min\{\bar{F}(u) : u \in X\}$$

dove $\bar{F}$ è definito come il massimo funzionale semicontinuo inferiormente che non supera F. Al funzionale $\bar{F}$ si possono applicare i metodi diretti del calcolo delle variazioni e le successioni minimizzanti di (P), qualora compatte, hanno come punti limite i punti di minimo di $(\bar{P})$.

Naturalmente, nel caso in cui F è di tipo integrale, rimane da stabilire se anche $\bar{F}$ è un funzionale integrale.

Tale questione ha dato inizio alla cosiddetta *teoria della rappresentazione integrale*, su cui ormai c'è una vasta letteratura. La monografia [5], certamente ispirata dai numerosi colloqui avuti con De Giorgi sull'argomento, raccoglie alcuni risultati su semicontinuità, rilassamento e rappresentazione di funzionali integrali.

Il problema della semicontinuità inferiore e del rilassamento può essere posto per funzionali definiti su diversi spazi di funzioni. Oltre ai casi degli spazi L^p e degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$, che De Giorgi considerava interessanti ma *"senza particolari sorprese"*, di grande utilità sono i casi di funzionali definiti sullo spazio M delle misure e sullo spazio BV delle funzioni a variazione limitata. Erano questi gli ambienti funzionali che De Giorgi considerava più interessanti e difficili, che si impongono quasi naturalmente all'attenzione qualora si debbano trattare problemi in cui le funzioni abbiano delle zone di discontinuità, come nel caso dei problemi di meccanica delle fratture o di alcuni modelli di ricostruzione di immagini. Nel caso di funzionali del tipo:

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u)\,dx \qquad (u \in L^1(\Omega))$$

un risultato di De Giorgi, Ambrosio e Buttazzo [4] mostra che il funzionale $\bar{F}$ che si ottiene per rilassamento rispetto alla convergenza debole delle misure può essere scritto nella forma:

$$\bar{F}(\mu) = \int_\Omega \varphi(x, \mu^a)\, dx + \int_\Omega \varphi^\infty(x, \mu^s)$$

per un'opportuna funzione integranda φ, dove $\mu = \mu^a \cdot dx + \mu^s$ è la decomposizione di μ in parti assolutamente continua e singolare, e φ^∞ è la funzione di recessione convessa della funzione φ.

Bibliografia

[1] L. Tonelli, La semicontinuità nel calcolo delle variazioni, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 44 (1920), pp. 167-249

[2] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Note delle lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1968-1969

[3] E. De Giorgi - G. Buttazzo - G. Dal Maso, On the lower semicontinuity of certain integral functionals, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 74 (1983), pp. 274-282

[4] E. De Giorgi - L. Ambrosio - G. Buttazzo, Integral representation and relaxation for functionals defined on measures, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 81 (1987), pp. 7-13

[5] G. Buttazzo, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser. 207, Longman, Harlow (1989)