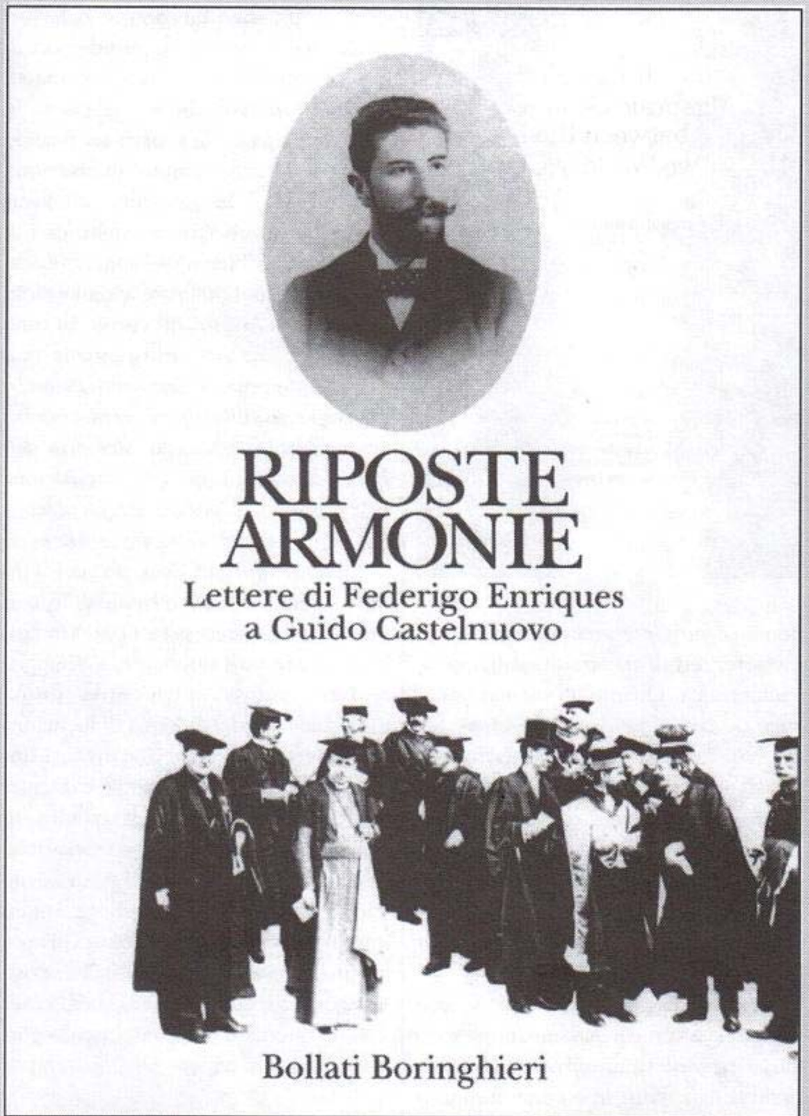
Enriques e la Geometria algebrica

Non è facile parlare della figura di Federigo Enriques matematico. Si vorrebbe infatti far apprezzare al lettore come il suo apporto alla Geometria algebrica sia stato così profondo e sconvolgente da far sì che persino un odierno ricercatore ricavi dalla lettura delle sue opere una inusuale impressione di vigore e profondità e una sensazione di grande attualità.
Ci si lasci usare, seppure in modo forse improprio, il termine *rivoluzionario* per riferirci ai punti di vista espressi da Enriques in Geometria algebrica. Di rivoluzione non si tratta, in quanto, come cercheremo di spiegare, le sue idee e quelle di Guido Castelnuovo, con lui realizzatore della classificazione delle superficie e ispiratore della moderna classificazione delle varietà di dimensione superiore, affondano saldamente le radici nella tradizione creata da Riemann e sviluppata da Cremona, Clebsch, Noether e Corrado Segre. Tuttavia le intuizioni di Enriques sono state tanto vivide e luminose da determinare uno stacco netto con ciò che le precedeva - consentendo un progresso fino ad allora inimmaginabile - e da proiettare la loro luce direttamente fino ai giorni nostri. I lavori di Enriques, e quelli da lui ispirati, non appartengono dunque soltanto alla storia della matematica, ma costituiscono ancora un'incredibile ed inesauribile fonte di problemi.
È impossibile perciò parlare del contributo di questo scienziato scomparso ben cinquant'anni fa senza rivolgere lo sguardo a questioni vive e aperte della ricerca contemporanea. Il che non è prerogativa di molti! E anche volendosi limitare solo ad alcuni aspetti dei suoi contributi, lo studio e la classificazione delle superficie algebriche, come volutamente faremo noi (non menzionando, o facendolo solo di sfuggita, i suoi apporti alla teoria delle curve, alle varietà di dimensione superiore, a problemi di razionalità), il compito resta arduo.
Altro motivo di difficoltà è l'impossibilità di separare l'Enriques ricercatore matematico dall'Enriques storico, filosofo, epistemologo. La sua statura intellettuale lo portò a esercitare una poderosa influenza su colleghi e allievi, anche al di là della profusione a piene mani delle idee matematiche nell'ambiente scientifico. Di questi fili conduttori, di questi legami, non abbiamo potuto non parlare e abbiamo creduto opportuno farlo, con ampie citazioni dallo stesso Enriques, in relazione alla sua trattatistica di argomento matematico, che ci pare sia stata il banco di prova della sua concezione fortemente unitaria del sapere, pur in un argomento assai specialistico come la Geometria algebrica.
Chiediamo al lettore dunque di pazientare e di seguirci in un cammino che non sarà breve. Nel box alle pagine VI e VII abbiamo raccolto una breve premessa sullo sviluppo della Geometria algebrica negli anni che precedono l'entrata in scena del Nostro: senza di essa i suoi contributi non sarebbero facilmente comprensibili (la loro effettiva valorizzazione deriva infatti dalla prospettiva storica che acquistano).
Così pure il lettore meno esperto di Geometria algebrica ci perdoni l'indulgenza a qualche dettaglio tecnico, che speriamo non abbia appesantito troppo l'esposizione.
Infine ci è parso essenziale concludere con un paragrafo sugli allievi di Enriques. Il magistero didattico fu infatti per lui parte così integrante della sua attività scientifica, il suo bisogno di "creare" matematica come risultato di una appassionata maieutica così sentito e profondo, la sua influenza sui discepoli così suggestiva, da rendere difficilmente distinguibile la figura del *maestro* da quella del *ricercatore*.
Queste note non sono certo esaurienti. Esse sono ampiamente ispirate al nostro contributo su *La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali* che comparirà nel quarto volume della serie *La storia della matematica italiana dall'Unità* in cui si troveranno pure ampie referenze bibliografiche, che qui non ci è sembrato opportuno riportare.

1. Castelnuovo ed Enriques

Enriques si laureò nel 1891 a Pisa dove oltre a R. de Paolis, suo maestro, aveva avuto modo di incontrare E. Bertini. Poco dopo la laurea Enriques si recò a Roma, alla scuola di L. Cremona, allora *vecchio saggio* della geometria algebrica[1]. Ma non furono certo le lezioni di Cremona a sollecitare il gusto e la fantasia del giovane e intraprendente normalista. Cremona, a parte l'età non più giovane, aveva a quell'epoca già da alcuni anni abbandonato la ricerca attiva, limitandosi a guidare gli allievi e dedicandosi soprattutto a grandiosi compiti politico-organizzativi (fu tra l'altro, pur se per brevissimo tempo, Ministro della Pubblica Istruzione e come tale presentò in Parlamento, per la prima volta nella storia italiana, una legge di autonomia dell'Università).
Per contro, l'evento di gran lunga più importante per il giovane Enriques, in vista sia della sua formazione scientifica che del suo itinerario umano, fu l'incontro con Guido Castelnuovo, soltanto di sei anni più anziano di lui ma già



professore ordinario, chiamato da Cremona a soli venticinque anni a ricoprire una cattedra a Roma.

La giovane età dei protagonisti di questa storia, di questa bella avventura intellettuale, che ci piace immaginare, come si racconta, impegnati in appassionate discussioni che toccavano temi umani, scientifici, filosofici nel corso di lunghe passeggiate a Villa Borghese, ben spiega la loro audacia e la loro capacità di avventurarsi lungo percorsi nuovi e inesplorati.

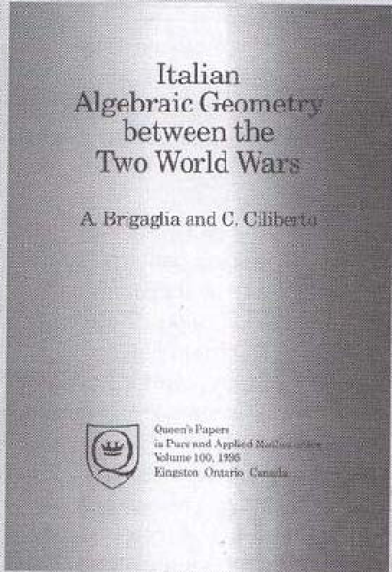
Castelnuovo era stato allievo di G. Veronese e dopo un soggiorno a Roma era diventato assistente di E. D'Ovidio a Torino, dove aveva incontrato Corrado Segre.

In questo primo periodo della sua attività Castelnuovo contribuisce a costruire, assieme a Corrado Segre, l'indirizzo italiano alla teoria delle curve secondo le vedute della scuola tedesca. Con la chiamata a Roma come professore ordinario nel 1891 si apre nella carriera di Castelnuovo un nuovo periodo. Egli supera, pur senza abbandonarla, la teoria delle curve e si volge decisamente allo studio e alla classificazione delle superficie, riprendendo le pionieristiche ricerche di R. F. A. Clebsch e M. Noether, che non avevano visto continuatori per più di un ventennio. È proprio all'inizio del suo periodo romano che Castelnuovo incontra il giovane Enriques, che alquanto deluso dagli insegnamenti un po' ripetitivi di Cremona si rivolge a lui, quale portatore nell'ambiente romano delle nuove idee iperspaziali e della geometria birazionale delle curve maturate alla scuola di Veronese e C. Segre. Castelnuovo, con coraggio e intuito, indirizza decisamente il giovane allievo, in cui intravvede grandi capacità, allo studio delle superficie algebriche.

Un'idea che si rivela assai fortunata. La pubblicazione (a cura di U. Bottazzini, A. Conte e P. Gario) del carteggio tra i due, in contatto epistolare giornaliero quando, ad esempio nei periodi di vacanza, non potevano incontrarsi personalmente a Roma, ci permette oggi di seguire come - nel giro di qualche mese - dalle conversazioni tra i due geometri emerga un nuovo approccio alla teoria delle superficie. Tale approccio pur traendo profitto dalle idee originarie di Clebsch e Noether va assai più in profondità, con lo studio e la comprensione di esempi riposti e significativi, e ingloba il punto di vista dei maestri tedeschi in un quadro più vasto, completo e rigoroso i cui tratti salienti si possono così riassumere.

Innanzitutto viene precisato il concetto che lo studio di una superficie algebrica consiste in quello delle famiglie di curve giacenti sulla superficie. Tra queste si evidenziano i *sistemi lineari*, analoghi delle serie lineari sulle curve, che dal punto di vista proiettivo si possono riguardare come le famiglie di curve tagliate sulla superficie da sistemi lineari di ipersuperficie di uno spazio proiettivo, fuori da eventuali curve fisse. Vengono studiati i sistemi continui di curve che non sono lineari, come, ad esempio, il sistema delle rette di una superficie rigata a curve sezioni di genere positivo. Tali sistemi, si dimostra, esistono solo sulle superficie irregolari e anzi la loro presenza caratterizza tali superficie. Si considerano le intersezioni tra le curve sulla superficie. A questo riguardo si prende in esame la serie lineare tagliata da un dato sistema lineare su una assegnata curva, e in particolare si studia la nozione, che risale a C. Segre, di *serie caratteristica* di un sistema lineare: si tratta della serie lineare tagliata su una curva del sistema dalle altre curve del sistema stesso.

Inoltre il concetto di curva viene esteso, con un'ardita generalizzazione, a quello di *curva virtuale*, o *divisore* secondo la moderna terminologia, cioè una combinazione lineare formale a coefficienti interi di un numero finito di curve sulla superficie. Anche a questa nozione più generale di curva si estende la teoria dell'intersezione e la nozione di serie caratteristica: in particolare viene definito il *numero di intersezione* di due divisori su una superficie, che, nel caso i due divisori coincidano, prende il



nome di *autointersezione* o *grado* del divisore, ed è il grado della serie caratteristica. Quanto al *sistema canonico* (le cui curve si dicono *curve canoniche*) introdotto da Noether [2], esso viene caratterizzato intrinsecamente con la proprietà geometrica di tagliare opportune serie lineari sulle curve di un sistema di sezioni iperpiane della superficie (*formula di aggiunzione*) ovvero con altre proprietà invarianti per trasformazioni birazionali.

La nozione di genere geometrico viene interpretata come il massimo numero di curve *canoniche* linearmente indipendenti sulla superficie e vengono introdotti nuovi invarianti birazionali, i *plurigeneri* P_i, cioè il massimo numero di curve i-canoniche (cioè che stanno in uno stesso sistema lineare con i multipli secondo l'intero i delle curve canoniche) linearmente indipendenti. Di questi invarianti si apprezza subito, come vedremo, l'importanza nella classificazione.

La classificazione birazionale delle superficie viene ridotta a quella di modelli particolarmente semplici, i cosiddetti *modelli minimali*, che sono il piano, le superficie rigate e le superficie su cui le curve canoniche hanno intersezione non negativa con ogni curva effettiva.

Viene infine risolto in molti casi il cosiddetto problema di Riemann-Roch, che consiste nel calcolare le dimensioni dei sistemi lineari di curve su una superficie. Tutto ciò è esposto in due storiche Memorie di Enriques (*Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, apparsa nel 1893 nelle *Memorie dell'Accademia di Torino*, e *Introduzione alla geometria sopra le superfie algebriche*, apparsa nel 1896 nelle *Memorie dell'Accademia dei XL*), in cui l'influenza di Castelnuovo è palpabile, e in una memoria successiva (1901) in collaborazione tra i due.

A Castelnuovo si deve la prima dimostrazione del teorema di Riemann-Roch per le superficie nel 1896. L'importanza di queste ricerche è evidente: esse forniranno infatti il quadro di riferimento non solo per la teoria delle superficie ma anche per lo studio delle varietà di dimensione superiore. Studio intrapreso in quegli anni da G. Fano, altro allievo di C. Segre, e dallo stesso Enriques, sui cui contributi, assai notevoli, in quest'ambito non potremo purtroppo trattenerci.

L'approccio di Castelnuovo ed Enriques appare subito tanto semplice e naturale quanto efficace. Dice lo stesso Enriques, riferendosi a un aspetto particolare della teoria - ma quello che dice ha in verità portata più vasta: *"L'idea è così semplice, la sua attuazione così facile, la sua portata così generale per riguardo alla teoria delle varietà ad un nume-*

ro qualunque di dimensioni, che è potuto sembrare a qualcuno [...] trattarsi di cosa appartenente al patrimonio comune dei geometri e che dovrebbe esser nota da tempo".

Così tuttavia non era, tant'è vero che queste idee così semplici ed efficaci consentono ai due geometri di rispondere in breve tempo ai problemi che più di un ventennio prima erano stati posti da Noether e che erano per così lungo tempo rimasti irrisolti. Alcuni esempi di superficie con $q = 0$ e $p_g = 0$ ma $P_2 \neq 0$ (uno di Enriques e uno di Castelnuovo, entrambi del 1896) rendono chiaro che la condizione $q = p_g = 0$ (analoga all'annullarsi del genere nel caso delle curve) non basta per assicurare che la superficie sia razionale: infatti per queste ultime devono annullarsi tutti i plurigeneri. Tuttavia Castelnuovo, poggiando anche sui criteri di razionalità di Noether [3], e sullo studio dei piani doppi razionali di Noether e Bertini, dimostra nel 1896 il fondamentale *criterio di razionalità*: una superficie è razionale se e solo se $q = P_2 = 0$.

Questo teorema risponde affermativamente al *problema di Lüroth* per le superficie (mentre qualche anno dopo toccava a Fano (1907) ed Enriques (1912) mostrare che per le varietà di dimensione tre la risposta è negativa). Il problema consiste in generale nel chiedersi se una varietà di dimensione n che sia *unirazionale* (cioè tale che esista una applicazione razionale di uno spazio proiettivo sulla varietà) è anche *razionale* (cioè birazionale a uno spazio proiettivo) e J. Lüroth e Clebsch avevano dimostrato che per le curve la risposta è affermativa. Enriques caratterizza poi le superficie razionali o rigate come quelle per cui si annullano tutti i plurigeneri. Sono questi i primi fondamentali risultati sulla classificazione, che da essi prende il via.

Il cosiddetto *metodo euristico* che caratterizzerà l'approccio di Enriques consiste nel ritenere assegnata una superficie o una classe di superficie solo se ne sono dati modelli proiettivi che ne mettano in luce tutte le proprietà birazionali che occorrono per la classificazione.

Le superficie vengono ripartite, come diremo poi, a seconda dei valori dei plurigeneri, in quattro grandi classi all'interno delle quali vengono effettuate ulteriori esaustive ripartizioni in sottoclassi, le quali vengono a loro volta sistematicamente studiate. A questo monumentale lavoro, che occuperà tutta la prima metà del nostro secolo, partecipa gran parte della scuola di Geometria algebrica italiana.

A differenza di Enriques, Castelnuovo smise, con poche interessanti eccezioni, la pubblicazione di articoli di geometria algebrica intorno al 1910, senza però mai tralasciare il magistero didattico e la creazione di una florida scuola. Inoltre egli si dedicò attivamente ad altri settori di ricerca come il calcolo delle probabilità, della cui scuola in Italia fu uno dei fondatori. Il lettore dovrà però tenere presente che l'influenza di Castelnuovo, per il suo prestigio e la sua profonda cultura, fu ubiqua sulla Geometria algebrica, non solo italiana, anche negli anni tra le due guerre mondiali. In particolare il suo influsso su Enriques, cui era legato da vincoli di parentela acquisita e di grande amicizia, fu sempre fondamentale.

Enriques da parte sua fu invece sempre appassionatamente impegnato nella ricerca attiva in Geometria algebrica, fino alla morte, che lo colse improvvisa mentre era ancora alle prese, come vedremo, con una rielaborazione critica delle idee che lui stesso aveva posto alla base della classificazione delle superficie.

2. I rapporti tra Enriques e Severi e le superficie irregolari

La triade dei grandi maestri che hanno dato l'impronta alla scuola algebro-geometrica italiana di questo secolo è completata da Francesco Severi, una figura di ricercatore assai complessa, di vastissimi interessi e di larghe vedute scientifiche.

La sua produzione assai ampia spazia in molti campi della matematica (che includono: algebra, topologia, analisi complessa, equazioni differenziali ecc.), anche se quello prediletto fu la geometria algebrica, e si estende per più di sessanta anni, un periodo di tempo in cui questa disciplina ha subito cambiamenti radicali. Su di essa però non è qui il luogo di intrattenersi, se non per le relazioni che Severi ebbe con Enriques e che furono molto significative, crediamo, per entrambi.

L'incontro con Enriques, di cui Severi fu assistente, avvenne a Bologna all'inizio del secolo, dove Enriques si era trasferito come vincitore di cattedra e dove rimase fino all'inizio degli anni '20, quando fu chiamato a Roma.

Tale incontro fu dapprima collaborativo e successivamente conflittuale. Un conflitto però solo personale e, diremmo, caratteriale, che non intaccò, pare, la stima dell'un ricercatore per l'altro e soprattutto non ostacolò visibilmente lo sviluppo della scuola.

L'iniziale sodalizio con Enriques fu comunque decisivo per Severi, in quan-

to ne orientò gli interessi sui molti problemi aperti nella teoria delle superficie.
Sebbene la classificazione fosse già stata delineata da Enriques e Castelnuovo, restavano tuttavia molti problemi irrisolti nello studio di importanti classi di superficie. A tali questioni Severi diede decisivi contributi. Ad esempio in una fondamentale memoria di Enriques e Severi del 1907 vengono classificate le superficie abeliane. A essa va aggiunto un interessante articolo del 1903 in cui Severi studia la superficie prodotto di una curva per se stessa, studio equivalente a quello delle corrispondenze su una curva. Dal lavoro del 1903 prende origine l'interesse di Severi per lo studio delle superficie irregolari. È questo un argomento fondamentale di indagine nel primo periodo dello sviluppo della teoria delle superficie. Le superficie irregolari infatti apparivano già a Noether quali oggetti misteriosi più da esorcizzare che da studiare, visto che egli congetturava, senza alcuna apparente evidenza, che non ne esistessero affatto, tranne le rigate irrazionali. Per dirla con Castelnuovo, di cui riportiamo una citazione che dà al metodo euristico, per così dire, una dimensione piena - crediamo - anche di valori letterari:
"Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano


Francesco Severi nel 1912

i guai, e si presentavano eccezioni d'ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica".
Questo bel brano illustra meglio di ogni altro commento lo spirito quasi pionieristico dei primi esploratori nel mondo delle superficie, e mette bene in evidenza l'imbarazzo a trattare le superficie irregolari con i metodi algebrico-proiettivi. Un imbarazzo col quale, come vedremo, la scuola italiana dovrà sempre convivere.
In realtà si deve alla scuola francese il merito di aver intuito l'approccio giusto alla nozione di irregolarità, cercandone il legame con l'esistenza di sistemi continui, non lineari, di curve su una superficie, e aspetti topologico-trascendenti.
Questi legami apparvero evidenti in basilari ricerche sulle superficie abeliane svolte tra la fine del secolo scorso e gli albori di questo da T. Appell e G. Humbert, e in quelle successive di Enriques-Severi (1907) e Bagnera-De Franchis (1907-1909), che ebbero in tali questioni un ruolo fondamentale. Humbert aveva dimostrato nel 1893 che l'esistenza di sistemi continui non lineari comporta che esistano delle 1-forme olomorfe non nulle sulla superficie. Enriques d'altra parte aveva dimostrato (1899) che l'esistenza degli stessi sistemi comporta che $q \neq 0$ e nel 1901 aveva invertito il teorema di Humbert, provando che esistono sistemi continui non lineari di curve su una superficie se e solo se sulla superficie esistono 1-forme olomorfe non nulle. Nel frattempo Castelnuovo (1897) aveva legato il concetto di irregolarità a proprietà della serie caratteristica dei sistemi lineari di curve sulla superficie, provando che se $q \neq 0$ tale serie è incompleta per sistemi "abbastanza grandi" (ad esempio quelli che contengono il sistema canonico).
Si poneva pertanto il problema di invertire il teorema di Enriques, provando che $q \neq 0$ comporta l'esistenza di famiglie di dimensione q e non maggiore di sistemi continui non lineari di curve. Una dimostrazione algebrico-geometrica di questo teorema (detto *teorema fondamentale delle superficie irregolari*) fu proposta da Enriques nel 1904, ed era basata su un ingegnoso procedimento di degenerazione di curve su una superficie, detto *principio di spezzamento*. Essa fu accettata dalla comunità matematica, e su questa base Castelnuovo e Severi provarono in-

dipendentemente (1905) che q coincide con il massimo numero di 1-forme olomorfe indipendenti sulla superficie. Sfortunatamente la dimostrazione di Enriques era sbagliata e di ciò si avvide Severi soltanto nel 1921, proponendo a sua volta una nuova dimostrazione. Anche questa però risultò errata, anzi l'articolo di Severi fu all'origine di una lunga e accesa polemica con Enriques, che guastò definitivamente i rapporti già tesi tra i due geometri e nella quale si inserirono anche altri autori. Ma su ciò non vale la pena di intrattenersi, poiché la polemica in questione non portò ad alcun risultato scientifico apprezzabile.

Nel frattempo invece Poincaré aveva provato nel 1910, usando tecniche trascendenti, che l'irregolarità q può essere interpretata come il massimo numero di 1-forme olomorfe linearmente indipendenti su una superficie, come la metà del primo numero di Betti della superficie, e come la massima dimensione di sistemi continui di curve non linearmente equivalenti.

Sul tentativo di dimostrare questo teorema per via algebrico-geometrica la scuola italiana fallì, non riuscendo mai a venire a capo della questione per mancanza di tecniche adeguate. Esso rimase pertanto uno dei punti basilari irrisolti della teoria delle superficie. Il sapere la cosa dimostrata dal punto di vista trascendente non era, per ragioni metodologiche e, diremmo, filosofiche, accettabile per i geometri italiani.

Per Enriques e Severi infatti, che postulavano per lo strumento algebrico-geometrico proiettivo un ruolo centrale nella matematica, la mancata risoluzione di un problema così essenziale nella teoria delle superficie, che essi consideravano una loro creazione, rimase sempre uno smacco inaccettabile. È perciò che su di esso tornarono ripetutamente, pur senza mai ottenere un definitivo successo.

Giova ricordare che la prima trattazione algebrico-geometrica rigorosa del problema è stata data da D. Mumford solo nel 1966, usando in tutta la loro potenza i nuovi metodi algebrici e coomologici introdotti all'inizio degli anni '50 da J. P. Serre, A. Grothendieck e K. Kodaira.

3. La classificazione delle superficie

La classificazione delle superficie fu perseguita in modo sistematico e per quanto possibile esaustivo per circa mezzo secolo a partire dagli anni '90 del secolo XIX, da Castelnuovo e soprattutto da Enriques e dalla sua scuola.

Si tratta di un'opera monumentale nella quale si riflettono tutte le idee, i metodi di indagine e le tecniche della scuola italiana, di cui è forse il contributo più originale e rilevante. Come abbiamo già detto, l'idea di base della classificazione è quella di ripartire le superficie in classi di equivalenza birazionale a seconda dei valori assunti dagli invarianti birazionali, in particolare dai plurigeneri e dal genere aritmetico. Dal punto di vista proiettivo ciò consiste nel classificare le superficie a seconda del comportamento dei rispettivi *modelli canonici* o *pluricanonici*, modelli cioè sui quali il sistema canonico o pluricanonico viene tagliato dagli iperpiani dello spazio. In tal modo si vengono a suddividere le superficie in quattro classi:

(A) superficie con tutti i plurigeneri nulli, che, in virtù di già citati risultati di Castelnuovo ed Enriques (1896), sono razionali se $q=0$ e rigate irrazionali se $q \neq 0$;

(B) superficie per cui i plurigeneri sono tutti uguali a 0 oppure a 1. La classificazione di queste superficie si completa intorno al 1909. Esse si distinguono in quattro classi:
(a) superficie regolari con $p_g=0$ e $P_2=1$, dette *superficie di Enriques* (che ne diede il primo esempio nel 1896, come controesempio alla congettura di Noether che $q = p_g = 0$ implichi la razionalità), classificate da Enriques con un geniale procedimento di degenerazione nel 1906;
(b) superficie regolari con tutti i plurigeneri uguali a 1, modernamente dette *superficie K3*, caratterizzate da Enriques (1896) come superficie regolari a curve sezioni canoniche, e studiate e classificate indipendentemente da Enriques (1908) e Severi (1909);
(c) superficie irregolari con tutti i plurigeneri uguali a 1, che si caratterizzano come *superficie abeliane;*
(d) superficie irregolari con $p_g = 0$ e $P_2 = 1$, modernamente dette *superficie biellittiche;* la classificazione dei due ultimi tipi di superficie si deve a Enriques-Severi (1907) e Bagnera-De Franchis (1907-1909);

(C) superficie (dette *ellittiche*) i cui modelli pluricanonici sono punti o curve; queste vengono caratterizzate come superficie possedenti un sistema unidimensionale privo di punti base (ossia un *fascio*) di curve di genere 1. La loro classificazione fu effettuata da Enriques negli anni 1898-1914. Su di essa Enriques tornò varie volte per affinarla e semplificarla: ad esempio in un volume di lezioni scritto in collaborazione con il suo allievo L. Campedelli (1932) e nel libro *Le superficie algebriche* del 1949, che è un po' la *summa* della sua opera, dove viene proposto un elegante approccio che fa uso di risultati ottenuti dall'altro suo allievo O. Chisini (1921);

(D) superficie per cui qualche modello pluricanonico è una superficie, oggi dette superficie *di tipo generale*. Lo studio di queste superficie inizia con un famoso articolo di Castelnuovo (1891) in cui si discutono vari esempi e si dimostrano alcune disuguaglianze fondamentali tra i caratteri. Esso fu poi continuato da Enriques e dai suoi allievi nei cinquant'anni successivi.

Questo schema di classificazione, che oggi viene generalmente attribuito a Kodaira ma che si trova esposto esattamente in questa forma da Enriques in un articolo del 1914, è già delineato alla fine del secolo scorso, ma viene messo alla prova nei primi tre lustri di questo secolo quando vengono studiate le principali caratteristiche delle superficie delle quattro classi.

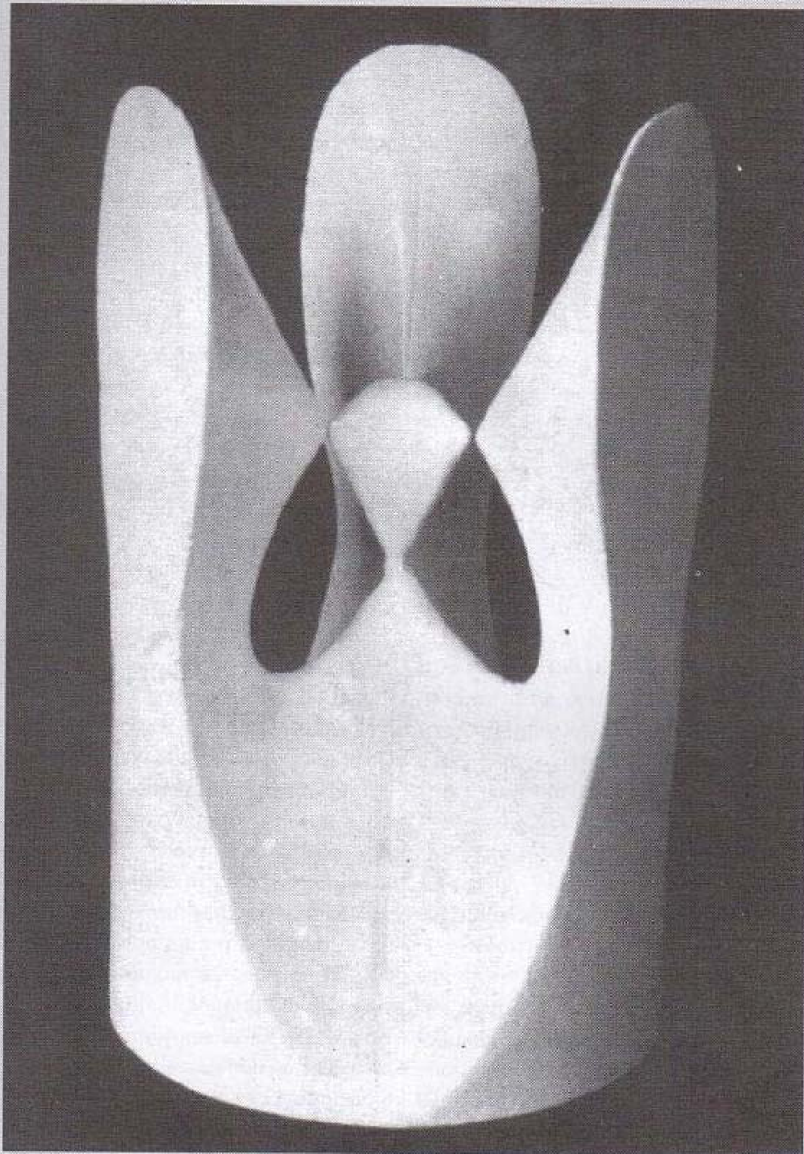
Per tornare alle parole di Castelnuovo ricordate nel precedente paragrafo e all'implicito parallelo in esse contenuto tra la classificazione delle superficie e l'opera di un botanico o di un entomologo, possiamo affermare che il primo ventennio dell'opera di Enriques viene speso nella costruzione di una solida scaffalatura in cui sistemare le varie classi di superficie che si presenteranno poi all'indagine dei geometri attraverso la considerazione dei diversi esempi e fenomeni possibili.

Non solo, ma nella scaffalatura vengono sistemati esemplari notevoli, alcuni già ben studiati e compresi, altri le cui caratteristiche vanno ancora esplorate. A partire dal secondo decennio di questo secolo inizia un lungo periodo di raffinamento della classificazione, con la ricerca degli invarianti effettivamente assunti da classi di superficie e con lo studio delle varie famiglie particolari di superficie. Ad esempio le superficie K3, che, per avere curve sezioni canoniche, risultano particolarmente interessanti anche nella teoria delle curve, vengono più volte riprese: da G. Fano (1909), da S. Lefschetz (1921-1923), da P. Du Val (1932), da A. Franchetta (1942), ultimo allievo di Enriques, dal belga B. D'Orgeval (1945). Uno dei principali argomenti di indagine in questo periodo fu lo studio delle superficie di tipo generale, le quali, proprio in vista della loro generalità, erano state alquanto trascurate nella fase iniziale dell'esplorazione del mondo delle superficie.

La superiore visione che Enriques aveva acquisito del concetto stesso di classificazione - e la sua modernità - è vivacemente espressa nella seguente citazione dal suo testo del 1949:

"*[...] conviene notare che la geometria algebrica è, in sostanza, un'aritmetica superiore, dove il criterio stesso della generalità ha soltanto un significato relativo. [...] Da un punto di vista puramente logico non può dirsi, per esempio, che la famiglia delle superficie non riferibili a rigate sia più ampia di quella delle rigate. [...] Ma se continueremo a ritenere lo studio delle superficie non appartenenti alla famiglia delle rigate come più generale di quello delle rigate, questo giudizio, piuttosto che un'affermazione di fatto, sarà un giudizio di valore in cui si soppesano - per così dire - i problemi che si riferiscono all'uno e all'altro tipo, la ricchezza dei casi cui danno luogo, la possibilità di subordinare l'una all'altra famiglia da punti di vista più significativi. Da ciò conviene trarre questo insegnamento: che ogni famiglia o classe di superficie, la quale presenti caratteri propri che la distinguano dalle rimanenti, costituisce un oggetto di studio altrettanto degno di essere perseguito, e che la definizione di una tale famiglia in ordine ai caratteri interi invarianti importa spesso un interesse d'ordine generale. Per esempio la definizione della famiglia delle rigate mediante l'annullamento del quadrigenere e del sestigenere costituisce non tanto un risultato particolare interessante codesta famiglia, quanto un teorema significativo della teoria generale [...]*".

Per le superficie di tipo generale si trattava, in sostanza, di analizzare le proprietà proiettive dei modelli canonici o pluricanonici di queste superficie. Quest'analisi venne condotta con il solito metodo euristico, dal particolare al generale, basandosi cioè sulla costruzione di una larga messe di esempi da cui estrapolare poi proprietà generali. Tra questi esempi occorre citare quelli trovati da Campedelli e L. Godeaux, allievi di Enriques nel 1930: si tratta di superficie di tipo generale con $p_g = 0$. Se si ricorda la congettura di Noether del 1875 che $p_g = 0$ dovesse caratterizzare le superficie rigate o razionali, si capisce quali sorprese avesse riservato la teoria delle superficie ai suoi cultori in cinquant'anni di sviluppi. Il principale risultato di Enriques per le superficie di tipo generale è alquanto tardo (forse è l'ultimo importante risultato della scuola italiana), ed è esposto nel già citato volume del 1949: esso afferma che per una superficie S con $q = 0$ e $p_g > 0$ il modello tricanonico è birazionale a S



Superficie cubica con quattro punti doppi
(tratta dalle *Esercitazioni complementari di geometria* di Luigi Campedelli)

con due eccezioni completamente descritte, mentre quello n-canonico è sempre birazionale a S per $n \neq 4$. Il teorema fu poi esteso da Franchetta (1949) alle superficie irregolari.

Questo risultato è fondamentale: ad esempio da esso si deduce la costruzione di uno spazio dei moduli delle superficie di tipo generale. La sua dimostrazione sfrutta un classico teorema, il cosiddetto *teorema di regolarità dell'aggiunto*, che calcola la dimensione del sistema lineare completo somma di un dato sistema lineare di curve sulla superficie con il sistema canonico.

Il teorema che era stato stabilito per via trascendente da Picard (1905) gioca un ruolo fondamentale nello studio delle superficie, ha implicazioni notevoli nello studio dei sistemi continui di curve su una superficie e ha estensioni di vario tipo a varietà di dimensione superiore (*teoremi di annullamento in coomologia*). Su di esso perciò si appuntarono gli sforzi della scuola italiana per ottenerne una dimostrazione algebrico-geometrica. In particolare Severi, a più riprese, diede contributi importanti su questo argomento.

A differenza che per il teorema fondamentale delle superficie irregolari, gli sforzi della scuola italiana furono qui coronati da pieno successo. Infatti il teorema fu dimostrato nella massima generalità e per via algebrico-geometrica da Franchetta (1948), ricorrendo a una nozione tecnica, quella di *aritmetica connessione* di curve su una superficie. Questa nozione si è rivelata basilare anche nell'approccio moderno allo studio delle superficie di tipo generale e dei loro modelli pluricanonici, inaugurato nel 1973 da E. Bombieri.

Gli sviluppi moderni sulla classificazione sono stati iniziati dalla scuola russa con I. Shafarevich negli anni '60 dopo la "riscoperta" della classificazione di Enriques, e proseguiti dalla scuola americana con Kodaira, Zariski, Mumford, ecc.

Concludiamo questa rapida, e senz'altro incompleta, rassegna dei risultati sulla classificazione delle superficie citando le ricerche sul numero dei moduli (o parametri) m da cui dipende una famiglia di superficie con dati caratteri birazionali. L'embrione di questi studi si trova in Noether, che suggerisce nel 1888 un'importante stima inferiore per il numero m dei moduli, fornendo per essa un argomento di plausibilità basato sul computo dei parametri da cui dipende una famiglia di superficie dello spazio a tre dimensioni con singolarità ordinarie.

La questione fu riconsiderata da Enriques che cercò a più riprese (1908-1912) di perfezionare e rendere rigoroso l'argomento di Noether, ricorrendo tra l'altro alla rappresentazione delle superficie come *piani multipli*, cioè come rivestimenti multipli del piano, diramati lungo opportune curve dotate di nodi e cuspidi.

È da ricordare che a Enriques (1923) si deve la caratterizzazione delle curve con nodi e cuspidi che sono di diramazione per qualche piano multiplo, caratterizzazione tradotta in termini topologici da O. Zariski (1935), mentre O. Chisini (1934-1939), altro allievo di Enriques, seguito poi da allievi della sua scuola, cercava di costruire con interessanti considerazioni di degenerazione curve di diramazione di vaste classi di piani multipli, e dunque superficie, aventi dati caratteri. L'idea di Enriques consisteva nel cercare di valutare il numero dei moduli delle superficie contando il numero di parametri da cui dipende una famiglia di curve piane con nodi e cuspidi. Il caso delle curve con soli nodi era stato esaminato dallo stesso Enriques e da Severi, e su questa falsariga Enriques propose un approccio anche al caso delle curve con nodi e cuspidi.

Il lavoro di Enriques (1908) fu seguito da uno di Beniamino Segre (1934) sullo stesso argomento. La presenza delle cuspidi, oltre a quella dei nodi, complicava notevolmente la questione, ponendo, come fu segnalato da Zariski (1935), problemi simili a quelle concernenti l'irrisolto problema della determinazione della dimensione delle famiglie di curve su superficie irregolari.

Dunque le ricerche sui moduli subirono la stessa sorte di quelle sul teorema fondamentale delle superficie irregolari, ossia rimasero incomplete e inconclusive. In realtà, come poi ci si è resi conto, alla base di entrambe vi è il concetto di deformazione infinitesima e della sua interpretazione coomologica estranea ai classici. Infatti con tecniche moderne di teoria della deformazione, introdotte da Kodaira (1958) in ambiente analitico-trascendente e da Grothendieck (1961) in ambiente algebrico-geometrico, la stima di Noether sul numero dei moduli si prova in modo semplice e rigoroso, e così pure vari risultati di Enriques e B. Segre possono essere giustificati. In tempi più recenti sono stati fatti ulteriori notevoli progressi sullo studio dello spazio dei moduli di superficie di tipo generale.

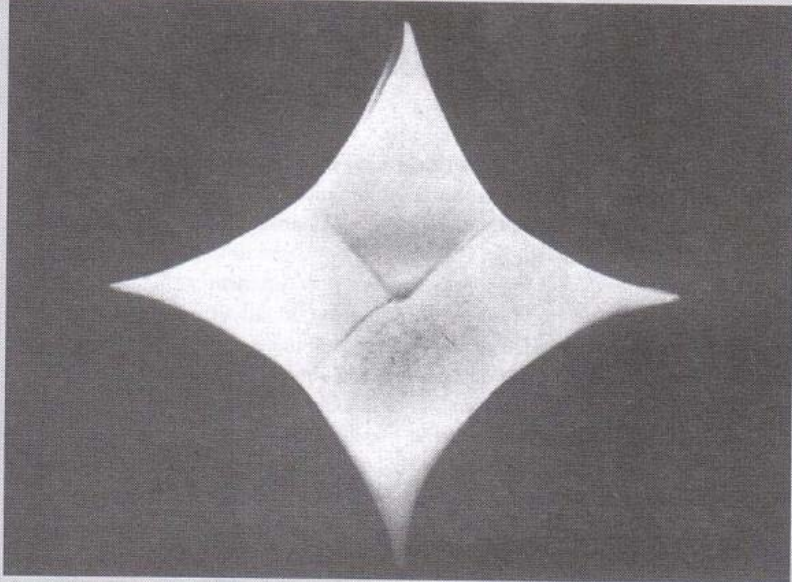
4. La trattatistica algebro-geometrica di Enriques e della sua scuola

Una parte importante del magistero scientifico e didattico di Enriques si è esplicata nella redazione di fondamentali opere di divulgazione e sistemazione del sapere algebrico-geometrico. Di esse è indispensabile parlare se si vuole intendere il punto di vista del Nostro circa lo sviluppo, la creazione e la revisione critica delle teorie matematiche, in particolare della geometria algebrica, che egli concepiva, come diremo, in una posizione centrale tra le discipline matematiche.

Si tratta in sostanza di tre trattati. Il primo, in collaborazione con il suo allievo Oscar Chisini, è un'opera monumentale in quattro volumi, la *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, scritta nell'arco di circa un ventennio (1915-1934), che raccoglie tutti i principali risultati nella teoria delle curve algebriche, presentati da vari punti di vista: quello sintetico proiettivo, quello analitico differenziale, quello topologico-trascendente. Il secondo, *Le superficie razionali*, scritto con la collaborazione di Fabio Conforto, raccoglie la classica teoria delle superficie razionali. La terza opera è il già citato volume *Le superficie algebriche* pubblicato postumo che, riprendendo ed estendendo una prima edizione del 1934 redatta in collaborazione con Luigi Campedelli, riassume lo sviluppo della teoria delle superficie secondo le vedute sintetiche della scuola italiana.

Nella prefazione al trattato sulla Geometria algebrica scritto in collaborazione con Chisini, e in numerose altre opere, Enriques chiarì alcuni punti concettuali del suo modo di procedere, delle relazioni tra metodi quantitativi e qualitativi, del rapporto tra ricerca e storia della scienza, tra ricerca e filosofia. Naturalmente si può dissentire dalle opinioni di Enriques, ma riteniamo che non vada mai dimenticato il fatto che tali opinioni non nascono da una riflessione astratta esterna alla ricerca stessa: la concezione filosofica più generale della scienza di Enriques nasce dalla ricerca stessa, è parte integrante del suo metodo di lavoro, diviene strumento essenziale di lavoro, partecipa dei suoi successi e anche dei suoi limiti e delle difficoltà.

Dalla prefazione sopra citata trarremo ora alcuni brani che illustrano bene, a



Una superficie dell'ottavo ordine
(tratta dalle *Esercitazioni complementari di geometria* di Luigi Campedelli)

nostro avviso molti importanti punti di vista del Nostro.

Nella trattatistica di Enriques si manifestano dunque, pur nella tradizione ormai classica della scuola italiana, elementi di grande innovazione e di profonda originalità dovuti alla prorompente e peculiare personalità dell'Autore. Un primo aspetto assai rilevante è l'insistenza sull'approccio intuitivo che fa della "*geometria algebrica - ove confluiscono il metodo delle coordinate e quello delle proiezioni, tutti i diversi ordini di concetti suggeriti dallo studio delle curve - [...] una dottrina qualitativa delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra e che vorremmo pur designare con questo nome, superando la significazione più ristretta che vi attribuiscono gli specialisti*".

Come si vede Enriques si ricollega qui alla classica matrice cremoniana, alla fondazione di quell' "algebra geometrica" sviluppata dalla scuola italiana e menzionata da Castelnuovo nella sua famosa commemorazione di Cremona. Ma l'elemento innovativo dell'approccio di Enriques è l'importanza da lui attribuita, soprattutto nel trattato in collaborazione con Chisini, alla visione topologico-trascendente, che egli, in contrapposizione agli aspetti differenziali della teoria delle funzioni algebriche, ingloba nella sua visione intuitiva riaccostandola alla visione più puramente geometrico-proiettiva. Infatti sebbene Enriques riconosca che la geometria algebrica possiede "*la sua base [...] negli algoritmi dell'Aritmetica e nei principi dell'Analisi infinitesimale*", tuttavia per lui "*lo sviluppo ulteriore della dottrina è dominato dalla visione sintetica delle funzioni considerate nella loro integrità, e perciò si riattacca naturalmente al campo delle variabili complesse*".

Ma l'aspetto probabilmente più rilevante della trattatistica di Enriques, cui essa deve forse il suo fascino maggiore, è l'approccio euristico che si manifesta principalmente nell' "*esporre accanto alle verità le vie - spesso diverse - che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e chiarirli l'un l'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie*".

È invero un progetto culturale assai ambizioso, che ha come immediata conseguenza un approccio fortemente storicistico all'esposizione delle discipline trattate. Si tratta tuttavia di una visione assai dinamica della storia del sapere, che non è vista soltanto come "erudizione letteraria", intesa cioè a recare un mero "completamento d'informazione cronologica e bibliografica". Anzi per Enriques "*la comprensione storica del sapere che mira a scoprire nel possesso l'acquisto, si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni termine provvisoriamente raggiunto. Una tale storia diviene parte integrante della scienza e ha posto nella esposizione delle dottrine, [...] storia [...] guadagnata attraverso la scienza, in servigio della scienza, e non viceversa*".

In sostanza è costante la ricerca "*non soltanto di dare alle teorie esposte un assetto logico, sì anche [...] di porgere una prospettiva storica del loro divenire. In tal guisa vuolsi offrire al lettore, non già il dono di qualcosa di perfetto che si lasci contemplare dal di fuori, anzi la veduta di un acquisto e di un progresso di cui si deve comprendere le ragioni, e che egli è invitato a riguadagnare da sé e per sé, trovando* *nel libro un istrumento di lavoro"*.

Così la presentazione di tanti casi particolari, molti dei quali rilevanti secondo un criterio storico, costituisce l'approccio sistematico di Enriques nella sua ricerca di un sempre maggiore grado di generalità e di un sempre più elevato livello di rigore nella trattazione.

Sarà bene qui soffermarsi per un attimo su questi due concetti di *rigore* e di *generalità* in Enriques. È chiaro come date le premesse relative a una impostazione euristica della sua trattazione anche i concetti di rigore e di generalità assumano per Enriques un valore dinamico. Enriques rifiuta intanto, alla luce di un moderno approccio logico e gnoseologico alla scienza, un astratto ideale di purezza riferentesi, ad esempio, al modello di esposizione dei Principi di Euclide, ossia il modello "*di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che debba apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sé le incerte e mutevoli suggestioni del concreto, tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca o scopra nuove difficoltà, rompendo l'armonia del sistema*".

Infatti per Enriques la "*generale filosofia della scienza, frutto della critica moderna, [...] approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, [...] oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase d'un processo unico, che sale dai particolare al generale per ridiscendere al particolare*".

Come si vede è un punto di vista di grande attualità che tende a "*comporre l'antitesi tradizionale fra ricerca ed esposizione sistematica, e così fra scienza e storia della scienza*". Il rigore, in cui la moderna trattatistica ha visto il vero tallone d'Achille della scuola italiana, assume alla luce di quanto precede un significato affatto diverso da quello della ricerca di una formale pulizia espositiva, che "*affettando di bandire ogni manchevolezza, talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore...*". A esso "*vuolsi sostituire il culto sincero del rigore concepito come abito di correzione e di critica. Da questo punto di vista acquistano speciale interesse gli errori storici, i paradossi, i sofismi, che spesso hanno segnato la via delle più importanti scoperte*".

E in merito al concetto di generalità l'idea di Enriques non è meno audace, né meno concreta. Egli asserisce: "*Il criterio di ricerca così splendidamente fatto valere da Abel - porre i problemi nell'aspetto più generale per scoprirne la vera natura - designava l'indirizzo dell'Analisi che vuol liberare la conoscenza dei rapporti qualitativi dalle complicazioni accidentali dei calcoli, cioè appunto quell'indirizzo di cui è massima attuazione la teoria geometrica delle equazioni e funzioni algebriche. Ma il precetto della generalità ha ricevuto altra intrepretazione presso i geometri contemporanei. [...] Si è eretto a principio di massima che ogni teorema debba sempre enunciarsi nella forma più generale di cui è suscettibile. [...] Conviene riconoscere che quest'abito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri, e merita di essere seriamente contrastato. Giacché in primo luogo, la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini, e - in secondo luogo - crea nei giovani studiosi la lusinga delle facili generalizzazioni, puramente formali; [...] ad ogni problema compete in qualche modo un proprio grado di generalità, che è il primo grado in cui il problema stesso rivela la sua vera natura*".

Si tratta di questioni da sempre cruciali nello sviluppo della scienza, come testimoniano anche recentissimi contributi. Anzi, alcuni dei citati brani di Enriques ci paiono addirittura risposte *ante litteram* di un ricercatore attivo, e che ricercatore!, ad alcuni dei punti di vista espressi nel recente articolo di A. Jaffe e F. Quinn, "Theoretical Mathematics...", tradotto nel n. 16 della *Lettera* (per ulteriori interventi sullo stesso articolo di Jaffe e Quinn si veda anche il n. 18 della *Lettera*). Tali questioni vengono da Enriques affrontate da un lato con grande concretezza, con la concretezza, vorremmo dire, di chi, preso dall'impeto creativo, si cura più di indicare la meta della ricerca e la strada per raggiungerla, che non di precisarne e delinearne i contorni. Accanto alla concretezza però Enriques manifesta nel suo approccio una buona dose di aristocratico idealismo, evidente nell'ultimo brano citato, ove egli assume un grado di generalità naturalmente attribuibile ai problemi considerati, che, riteniamo, egli pensasse solo lo scienziato *illuminato* fosse in grado di afferrare realmente. In qualche modo è questo il senso da attribuire alla frase polemica, a lui attribuita da Zariski: "*We aristocrats do not need proofs. Proofs are for you commoners*".

Dei tre trattati che portano il nome di Enriques e che da lui furono poderosamente ispirati, anche grazie al suo assiduo impegno didattico, quello in collaborazione con Chisini riscosse forse la maggior fortuna fino alla fine degli anni Quaranta ed esercitò una enorme influenza su tutta la matematica italiana della prima metà del secolo.

Il trattato sulle superficie razionali con Conforto non poté neanche portare alla sua prima uscita nel 1939, il nome di Enriques come suo autore, a causa delle leggi razziali fasciste. Esso raccoglie il contenuto delle lezioni di Geometria Superiore tenute per vari anni da Enriques presso l'Università di Roma. L'approccio è qui, rispetto al trattato sulla Teoria Geometrica delle Equazioni, più marcatamente proiettivo, in qualche modo più vicino, benché posteriore, alle radici della tradizione italiana. L'abilità maggiore dell'autore è, a nostro avviso, quella di utilizzare l'esempio classico, e per certi versi banale, delle superficie razionali, per lumeggiare tutte le difficoltà che nella teoria delle superficie si incontrano quando in essa ci si addentri nello studio di classi più complicate. Si tratta in sostanza del banco di prova per l'esposizione, contenuta nel terzo trattato, della teoria generale delle superficie.

Questo volume è la vera *summa* dell'opera di Enriques. In esso l'Autore espone la gran parte dei risultati principali della scuola italiana sull'argomento, limitandosi, per deliberata scelta, ai risultati e agli argomenti di tipo algebro-geometrico. La parte trascendente viene rielaborata per adeguarla all'approccio proiettivo; ad esempio è qui che si trova un tentativo, originale nella scuola italiana, di trattare le superficie e le varietà abeliane, la cosiddetta mappa di Albanese ecc. per via puramente algebro-geometrica.

L'esigenza dichiarata dell'Enriques degli ultimi anni è quella di sviluppare la teoria delle superficie secondo un coerente linguaggio proiettivo "puramente geometrico", e quindi, implicitamente, indipendente dal corpo base, in esso inglobando e rendendone casi particolari le trattazioni analitiche e trascendenti. Della modernità di questa visione, più vicina di quanto non sembri al punto di vista "aritmetico" odierno, non pare si siano resi ben conto i suoi contemporanei. Infatti l'epoca in cui il volume apparve è quella della decadenza della scuola italiana. L'opera non fu accolta con molto calore e fu presto dimenticata, e solo in tempi più recenti, ossia a partire dagli anni '70, quando è rinato un vasto interesse per i metodi e i problemi della geometria algebrica italiana, ha avuto il successo che meritava, - tanto che ne apparirà tra breve, per i tipi della Cambridge University Press, la traduzione in inglese a cura di F. Catanese, C. Ciliberto e R. Pardini.

5. I principali allievi di Enriques

È bene ritornare ora sui vari allievi della scuola di Enriques già menzionati in precedenza, per meglio metterne in risalto i tratti caratteristici e i contributi più rilevanti in relazione al loro rapporto con il Maestro.

Enriques non ebbe molti allievi. Una ragione di ciò, crediamo, sta nel fatto che non doveva essere impresa facile seguirne le orme intellettuali sulle vie della visione geometrica e della sua sensibilissima ed esigente intuizione. Ci sembra illuminante in proposito una bella, anche se un po' lunga, citazione da Fabio Conforto:

"Federigo Enriques [...] concepiva il mondo algebrico come a sé esistente, indipendentemente e fuori di noi, regolato da una legge suprema che è la legge di continuità, rispecchiante l'analiticità degli enti considerati. Nel cercar di comprendere tale mondo non è tanto da prefiggersi un ideale di perfezione logica: meno che mai è da procedere assiomaticamente, partendo da postulati in qualche modo in nostro arbitrio. Ciò si potrà fare, soleva dire l'Enriques, in altre parti della matematica, quale, ad esempio, la teoria delle funzioni di variabile reale, dove gli enti da studiare sono in qualche guisa posti da noi stessi, ed è quindi possibile, con qualche opportuna limitazione, escludere certi enti o far entrare nelle nostre considerazioni certi altri. Il mondo algebrico esiste invece di per sé e l'escludere da esso certi enti, perché ad esempio eccezionali, è impossibile, perché contrasterebbe alla legge di continuità. Le eccezioni debbono anzi essere accolte e spiegate al lume della continuità stessa. Il capire dunque il mondo algebrico non è tanto una questione di corretta deduzione, quanto anzitutto e soprattutto una questione di "vedere". Una simile concezione appagava profondamente lo spirito potentemente intuitivo dell'Enriques, il quale spesso arrivava addirittura al punto - e nell'intimità con i suoi allievi si compiaceva di tale aspetto apparentemente paradossale del suo pensiero - di non sentire il bisogno di una dimostrazione logica di qualche proprietà, perché "vedeva"; e ciò lo rendeva sicuro della verità della proposizione in questione e lo appagava pienamente: certamente ad ogni modo gli impediva di procedere oltre. Avendogli una volta dichiarato di non vedere la verità di un'affermazione, che egli riteneva evidente, ma che invano avevamo tentato di dimostrare logicamente, egli si fermò di botto (eravamo nel corso di una delle abituali passeggiate) e, invece di tentare un'ultima dimostrazione, roteò il suo bastone appuntandolo sopra un cagnoli-

no sul davanzale di una finestra, dicendomi: "non vede? Per me è come se mi dicesse che non vede quel cagnolino!" E tuttavia quella tal proprietà, che abbiamo pur trovato modo di inserire nel volume sulle superficie razionali, attende forse ancor oggi una dimostrazione soddisfacente".

Questi tratti così "aristocratici" non dovevano riuscire attraenti se non per quei pochi allievi molto dotati intellettualmente e disposti a un continuo, e sicuramente impari, confronto con le superiori capacità intuitive del Maestro. Su di loro il fascino di Enriques era tuttavia indiscutibile e il rispetto e l'affetto con cui egli viene da loro citato o rievocato ne testimoniano le grandi doti umane e morali.

Va anche aggiunto che Enriques era un lavoratore vulcanico, e tenergli dietro doveva riuscire a pochi, perché in ciò, oltre all'intelligenza, gli allievi dovevano fare appello a tutte le loro risorse di energie, diremmo fisiche. Ad esempio nel seguirlo, fisicamente e intellettualmente, nelle lunghe passeggiate "matematiche". O nella stesura di parte dei suoi volumi in cui, in interminabili discussioni, egli esigeva che ogni volta "si ripartisse da zero", cercando di riformulare passo per passo i ragionamenti nel modo più agile e originale, senza appellarsi a idee o concetti estranei alla questione trattata. Non a caso nella prefazione al volume *Le Superficie Algebriche* del 1949 Enriques, nel riferirsi alla trattazione, non parla di "esposizione" dei risultati, ma di "ricostruzione" della teoria attraverso la "discussione" delle idee con gli allievi che vi avevano collaborato.

"Tratti aristocratici", abbiamo detto, quelli del carattere di Enriques. Ma non gli faremmo giustizia se non segnalassimo anche, in apparente contraddizione, la sua profonda umiltà, che si rivela proprio in quel suo voler sempre "ripartire da zero" per capire più a fondo anche esempi apparentemente particolari, e per potere poi da questi passare alla formulazione delle teorie generali, anche le più ardite. Un atteggiamento di modestia e onestà intellettuale, che ritroviamo quale carattere dominante della sua scuola.

Il primo allievo di Enriques, in ordine di tempo, fu Oscar Chisini, laureatosi con Enriques a Bologna nel 1912. Chisini manifestò immediatamente un intelletto lucidissimo e un eccezionale talento matematico, tanto che Enriques se lo associò, sebbene giovanissimo e alle prime armi come geometra algebrico, nella stesura della sua monumentale *Teoria Geometrica delle Equazioni e delle Funzioni Algebriche*, di cui abbiamo già parlato.

L'idea di coinvolgere dei giovani brillanti nella redazione delle opere che egli aveva in mente doveva essere, come vedremo, una delle idee didattiche e formative caratteristiche di Enriques, oltre a derivare, probabilmente, da una sua esigenza di realizzare l'opera come il risultato di un serrato confronto dialettico con l'allievo. Citiamo da C. F. Manara, allievo di Chisini: *"Raccontava Chisini che l'opera stessa era stata concepita quasi tutta in modo «peripatetico», come usava dire, cioè passeggiando sotto i portici di Bologna con l'Enriques; anche gli sviluppi formali più complicati [...] non erano stati concepiti a tavolino: al massimo Enriques si fermava e scriveva con la punta dell'ombrello sulla pavimentazione dei portici di Bologna, mentre stavano passeggiando".*

La carriera di Chisini, che divenne poi professore a Milano, fu profondamente segnata dalla collaborazione alla stesura dell'opera citata, in cui egli profuse molte energie, imprimendole profondamente la sua impronta ma ricavandone anche molteplici spunti di ricerca che si ritrovano in tutto l'arco della sua produzione. Ad esempio la mano di Chisini si avverte nelle pagine del secondo volume dedicate alla teoria delle singolarità, e in particolare in quelle in cui si parla dell'inviluppo dei piani tangenti di una superficie algebrica dello spazio ordinario e della sua degenerazione per l'acquisto di singolarità da parte della superficie stessa.

Il tema delle singolarità fu assai caro a Chisini, che vi dedicò molta parte dei suoi studi. A lui si deve in particolare un prezioso lavoro del 1920 in cui il teorema principale è quello della riduzione a singolarità ordinarie delle superficie dello spazio ordinario, un risultato equivalente allo scioglimento delle singolarità delle superficie già affermato da Beppo Levi nel 1899.

Sul tema delle singolarità e su questioni di degenerazione Chisini ritorna nella lunga serie di geniali lavori sulle curve di diramazione dei piani multipli e sulle loro "forme limiti". Qui egli sfrutta un'idea molto feconda, di certo mutuata da Enriques, di usare opportunamente dei casi limiti delle curve di diramazione per dedurne, studiandone alcune caratteristiche, le proprietà del caso generale. Queste ricerche si ricollegano alla caratterizzazione topologica data da Enriques (1923) delle curve di diramazione dei piani multipli, e ne costituiscono una fruttuosa applicazione. In particolare a Chisini si deve il fondamentale teorema che asserisce, sotto opportune condizioni, l'identità

Da sinistra: F. Conforto, O. Chisini, F. Severi ed E. Bompiani osservano una "treccia". Taormina, 1951 (foto dall'archivio della prof. C. Tibiletti)

birazionale di due piani multipli aventi la medesima curva di diramazione (1944). Alla teoria dei piani multipli dettero ulteriori contributi B. Segre e G. Pompilj. Nel corso di queste ricerche occorse a Chisini l'idea di realizzare un modello visibile del gruppo fondamentale del piano proiettivo complesso privato dei punti di una curva algebrica, oggetto questo particolarmente rilevante nella teoria dei piani multipli. Il modello in questione è quello da lui denominato *treccia caratteristica* della curva algebrica, che gli consentì di mettere in evidenza gli aspetti topologico-combinatori della teoria delle singolarità delle curve algebriche e dei piani multipli. L'interesse di questi studi non è affatto esaurito, come dimostra la recente letteratura al riguardo. Essi si ricollegano peraltro a quelli, praticamente coevi, sul cosiddetto gruppo delle trecce di Emil Artin e della sua scuola, con cui tuttavia Chisini, a causa di un sostanziale isolamento autarchico della scuola matematica italiana negli anni tra le due guerre mondiali, non sembra aver avuto significative interazioni.

Per dirla ancora con C. F. Manara, la "particolarissima simpatia" di Chisini *"verso la Topologia, o meglio verso una parte di questa che gli faceva conseguire dei risultati fecondi con metodi allora inusitati"*, è testimoniata da varie altre ricerche che ci piace segnalare per la loro attualità e per la testimonianza che esse rendono della varietà delle tecniche adoperate in seno alla scuola italiana. *"Invero la Topologia [...] incarnava in certo senso l'ideale di ‹Geometria qualitativa› che realizzava la sua definizione di matematica come ‹Scienza che insegna a non fare i conti›"*.

Ad esempio è notevole l'approccio topologico alla teoria delle corrispondenze tra curve algebriche, esposta nel libro terzo della *Teoria Geometrica delle Equazioni*, che precorre l'analoga teoria elaborata da Lefschetz negli anni '20 che portò quest'ultimo a provare, tra l'altro, la famosa formula del punto fisso.

A essa fa seguito l'interpretazione topologica del teorema di Abel su una superficie di Riemann, che suggerì a Chisini l'introduzione della nozione di "serie a circolazione nulla", di cui si impadronì poi Severi generalizzandola in varia maniera e inglobandola nella sua teoria generale delle serie di equivalenza.

Ancora notevole è la interpretazione topologica della nozione di molteplicità di intersezione tra due curve algebriche piane (1936), cui si ricollega la teoria dei nodi elaborata verso la fine degli anni '20 dal tedesco E. Brauner, mentre, dal punto di vista analitico, trova riscontro in un famoso teorema di R. Caccioppoli (1949) che fornisce tale molteplicità in termini di residui di certe 2-forme meromorfe nel piano.

E, per continuare sul tema delle interazioni tra l'attivita di ricerca di Chisini e la sua collaborazione alla stesura della *Teoria Geometrica delle Equazioni*, segnaliamo ancora la semplice e geniale dimostrazione del teorema di Noether sulla generazione del gruppo di Cremona del piano mediante trasformazioni lineari e quadratiche, esposta nel cap. II del libro III (e ripresa poi da Enriques e Conforto nel trattato su *Le superficie razionali*) e l'intero libro IV, che contiene la trattazione trascendente e in cui è forse prevalente la sua impronta.

Il suo interesse verso gli aspetti topologico-trascendenti è confermato dal notevole contributo che egli diede alla teoria delle superficie ellittiche, di cui pervenne a dare una costruzione generale (1921) esposta anche nel cap. X del trattato su *Le superficie algebriche* di Enriques, e che precorre la successiva trattazione di Kodaira degli anni Sessanta.

Anche col suo secondo allievo, Luigi Campedelli, Enriques adottò il metodo del coinvolgimento nella redazione di un trattato, quello delle *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* del 1932-1934, che precorre il testo più volte menzionato del 1949.
Campedelli si laureò con Enriques a Roma nel 1928, divenendo poi subito assistente di Castelnuovo e successivamente professore prima a Cagliari e poi a Firenze. L'attività di Campedelli, così come quella di Chisini, fu di certo influenzata e condizionata profondamente dalla collaborazione alla redazione del volume suddetto. Infatti i risultati più espressivi di Campedelli concernono essenzialmente le questioni ancora aperte nella teoria delle superficie all'epoca della stesura del testo - inizio anni Trenta.
Anche Campedelli, come già Chisini, viene spinto dal Maestro allo studio sistematico dei piani multipli, in particolare di quelli doppi, nei quali Enriques vedeva un'inesauribile fonte di esempi su cui verificare la teoria generale delle superficie da lui elaborata. È appunto nello studio di certi piani doppi che Campedelli trovò (1932) i famosi esempi, già ricordati, di superficie di tipo generale con genere geometrico zero che oggi da lui prendono il nome. Analoghi esempi furono contemporaneamente trovati da un altro allievo di Enriques, il belga Lucien Godeaux.
Un contributo interessante di Campedelli (1933) è un teorema, oggi noto come "teorema fondamentale della classificazione delle superficie", secondo il quale una superficie minimale, cioè priva di curve contraibili a punti semplici con una mappa birazionale definita sulla superficie, è razionale o rigata se e solo se vi sono su di essa curve aventi intersezione negativa con le curve canoniche. Questo risultato, che Campedelli deduceva dalla classificazione di Castelnuovo ed Enriques, è oggi posto alla base della classificazione stessa.
È infine notevole il contributo dato da Campedelli, sotto lo stimolo di Enriques, alla classificazione delle superficie ellittiche, i cui risultati sono esposti nel volume del 1934. La classificazione di tali superficie, affrontata da Enriques nei primi anni del secolo, è essenziale per gettar luce sugli invarianti numerici che per esse si possono presentare. Ad esempio l'analisi di Enriques (1914), purtroppo alquanto incompleta, metteva in luce il notevole risultato che una superficie è razionale o rigata se e solo se il 12-genere P_{12} vale zero.
Enriques tornò sulla questione appunto nel volume del 1934 con il decisivo contributo di Campedelli, ed è qui che si trova tracciato, per la prima volta senza lacune, lo schema della dimostrazione del suddetto teorema, riesposto poi ancora nel capitolo X del trattato del 1949. Nel dopoguerra gli interessi di Campedelli si spostarono in modo significativo su temi riguardanti la didattica della matematica.

Gli ultimi allievi di Enriques, in ordine di tempo, sono stati G. Pompilj, prematuramente scomparso nel 1968, e A. Franchetta, che lo hanno coadiuvato nella stesura del trattato *Le Superficie Algebriche* del 1949, curandone la revisione quando, pochi mesi prima della pubblicazione, l'Autore venne a mancare.
La collaborazione di Pompilj e Franchetta alla stesura dell'opera suggerì di certo ai due allievi importanti argomenti di ricerca, i cui risultati portarono d'altra parte Enriques a una profonda revisione o piuttosto, come abbiamo già detto, a una vera e propria "ricostruzione" di ampi capitoli della teoria delle superficie.
In particolare il concetto di aritmetica connessione, introdotto da Franchetta, dà un notevole stimolo allo studio dei sistemi canonici e pluricanonici delle superficie di tipo generale, e viene introdotto e studiato nel capitolo IV. Altre sue conseguenze nello studio delle curve eccezionali riducibili vengono illustrate nel capitolo I.
Idee di Franchetta si ritrovano nello studio della proiezione generica di una superficie nello spazio tridimensionale (introduzione), nella costruzione di importanti classi di superficie canoniche (capitolo VIII) e nella costruzione delle superficie regolari con tutti i generi uguali a uno (oggi dette superficie K3, capitolo VII).
A Pompilj - che venne da Enriques avviato allo studio dei piani multipli, dei quali divenne un esperto conoscitore - sono da attribuirsi importanti esempi di piani doppi e tripli che sono superficie di tipo generale il cui sistema canonico presenta particolarità o "patologie" fino ad allora insospettate (capp. IV e VIII).
Tutti argomenti questi tuttora territorio di esplorazione per i più attivi ricercatori.

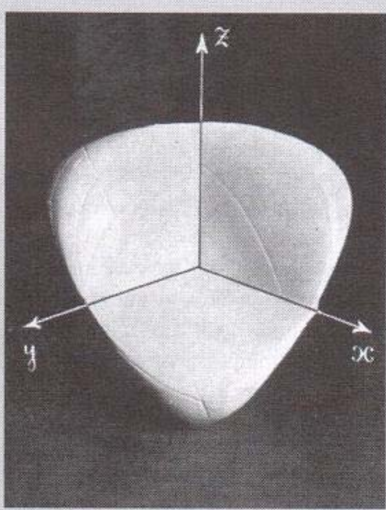
Un collaboratore di Enriques, che solo in senso lato può definirsi suo allievo, fu Fabio Conforto. Questi, nato a Trieste nel 1909 (e prematuramente scomparso nel 1954), iniziò gli studi universitari al

Politecnico di Milano. L'incontro con Chisini, che ivi teneva i corsi di geometria, lo convinse a indirizzarsi verso le discipline geometriche, sicché, trasferitosi per motivi familiari a Roma, divenne allievo di Castelnuovo, con cui si laureò nel 1931.

Conforto è famoso soprattutto per i suoi importanti contributi alla teoria delle varietà abeliane, cui fu avviato da G. Scorza. Ma su ciò qui non possiamo trattenerci. Qui ci preme ricordare la collaborazione con Enriques, ancora una volta incentrata sulla stesura di un testo, il più volte citato volume *Le Superficie Razionali* (1939). Esso, come già detto, è modellato sulle lezioni svolte per vari anni da Enriques presso l'Università di Roma, ma a Conforto *"va riconosciuto* - come afferma B. Segre - *il merito principale dell'elaborazione e la mirabile rifinitura, nonché quello di vari contributi originali notevoli"*.

Anche per Conforto l'influenza di Enriques è avvertita proprio attraverso la collaborazione alla stesura del testo. Dice infatti ancora B. Segre: *"la produzione di Conforto nell'ambito della geometria proiettiva e algebrica classica è tutta - più o meno direttamente - collegata agli argomenti svolti nel suo trattato su Le Superficie Razionali"*. E i contributi di Conforto riguardano infatti certi sistemi lineari di curve piane (i cosiddetti fasci di Halphen), i piani doppi razionali (la cui classificazione, risalente a Noether, viene da Conforto presentata per la prima volta in modo rigoroso), questioni di razionalità e unirazionalità.

In relazione agli allievi di Federigo Enriques, infine, non si può fare a meno di parlare di Oscar Zariski. Qui la parola "allievo" è usata in senso senz'altro improprio. Di Enriques Zariski subì la profonda influenza intellettuale e umana; da lui mutuò anche varie problematiche. Ma per quanto riguarda i metodi di studio dei vari problemi, nell'ambito della scuola italiana Zariski sembra seguire, almeno all'inizio della sua carriera, soprattutto la visione di Castelnuovo che lo instraderà, come vedremo, nella direzione di Lefschetz.



Un particolare tipo metrico della superficie romana di Steiner
(tratto dalle *Esercitazioni complementari di geometria* di Luigi Campedelli)

Zariski era giunto a Roma dalla Russia nel 1921 (sulla biografia di Zariski, cfr. C. Parikh, *The unreal life of Oscar Zariski*, Academic Press, 1991). A Roma Zariski rimase fino al 1927. Pur avendo già una buona conoscenza matematica quando decise di trasferirsi dalla nativa Russia in Italia per compiervi gli studi universitari, la sua formazione come ricercatore avvenne interamente nell'ambiente romano, soprattutto sotto l'influenza di Castelnuovo, relatore della sua tesi di laurea a Roma, e di Enriques. Per tutta la prima fase della sua carriera scientifica, Zariski - pur caratterizzandosi per una spiccata attitudine verso problematiche di tipo algebrico - non è significativamente distinguibile da un brillante giovane geometra italiano. Non solo egli scrive in italiano, ma usa anche lo "stile" tipico della scuola italiana e si muove nel solco tracciato dai maestri della scuola. Questo stile Zariski lo aveva acquisito non solo attraverso la frequenza alle lezioni dell'Università di Roma, ma anche, e forse soprattutto, dagli stretti legami umani e intellettuali stabiliti con Federigo Enriques, la cui casa frequentava regolarmente, partecipando a quelle conversazioni di carattere scientifico divenute leggendarie attraverso le quali il matematico italiano ha seminato a piene mani idee ricche di contenuto filosofico e problematiche matematiche avanzate. Lo stesso cambiamento di nome fu suggerito a Zariski (in origine Ascher Zaritski) da Enriques. Ci si può chiedere se sia stato del tutto casuale che egli abbia proposto lo stesso nome dell'altro allievo prediletto *Oscar* Chisini. D'altra parte l'evoluzione metodologica di Zariski, che lo porterà nel giro di un decennio a divenire spietato critico della scuola italiana e il più noto "apostolo" della rigorizzazione della geometria algebrica attraverso l'uso massiccio di topologia e algebra moderna, almeno all'inizio avviene interamente *all'interno* del modo di pensare italiano, soprattutto sotto l'influenza di Guido Castenuovo.

Pur non essendo così direttamente legato alla formazione di Zariski quanto Enriques, e pur essendo lontano dalla ricerca attiva in geometria algebrica, Castelnuovo ci sembra abbia avuto un'influenza decisiva sul giovane russo. È infatti ben noto come dei tre grandi geometri algebrici italiani, Castelnuovo fosse quello più a disagio di fronte alla mancanza di rigore e il più cosciente della crisi metodologica della scuola e della necessità di un profondo cambiamento nell'impostazione e nei metodi usati per risolvere i complessi problemi che l'evoluzione della disciplina portava a fronteggiare. Non sappiamo se la frase seguente - riportata dalla Parikh - risponda in modo esatto al pensiero di Castelnuovo, ma è certamente indicativa di un clima che Zariski respirava attraverso l'insegnamento di Castelnuovo: *"I metodi della scuola italiana hanno raggiunto un punto morto e non sono adeguati per un progresso ulteriore nel campo della Geometria algebrica"*.

È ancora da notare che l'incontro scientifico tra Zariski e Lefschetz, e quindi l'assorbimento del punto di vista topologico come strumento dello studio della geometria algebrica, che sarà il metodo principale usato dal matematico russo nei dieci anni successivi, era avvenuto in Italia, e sotto l'egida di Castelnuovo. Questi infatti accolse con grande entusiasmo i risultati di Lefschetz e la sua impostazione, in realtà precorsa dalle scuole italiana e francese, che egli ben conosceva a seguito degli scambi avuti col matematico americano durante la sua visita a Roma negli anni Venti. Non giunge quindi sorprendente l'incoraggiamento dato a Zariski *"to explore the work of Solomon Lefschetz"*, come testimoniato nel libro della Parikh.

Abbiamo detto che i lavori scritti da Zariski alla fine degli anni Venti appaiono ancora in piena sintonia con i metodi italiani. Il distacco comincia a manifestarsi quando nei primi anni trenta, impegnato nella scrittura del suo trattato *Algebraic Surfaces* del 1934, Zariski, che già dal 1927 si era trasferito stabilmente negli U.S.A., comincia a sentire un profondo disagio per la debolezza fondazionale dell'edificio che aveva imparato ad ammirare a Roma. È significativo che, mentre l'avvicinamento ai metodi topologici si era sviluppato interamente nel quadro della scuola italiana, nessuna spinta gli venne dall'ambiente romano allo studio dei metodi algebrici della scuola tedesca di Emmy Noether: *"It was a pity that my Italian teachers never told me there was such a tremendous development of the algebra which is connected with algebraic geometry. I only discovered this much later, when I came to the United States"*.

Nel 1934 Oscar Zariski pubblicava l'anzidetto trattato, che rappresenta il frutto dell'innesto nel pensiero della scuola italiana dei più moderni metodi topologici (Lefschetz) e algebrici (E. Noether). Innesto che Lefschetz definiva suggestivamente: *"to plant the arpoon of algebraic topology into the body of the whale of the algebraic geometry"*. La quasi contemporaneità di questo trattato rispetto a quello, esaminato dianzi, di Enriques e Campedelli pone interessanti questioni circa le relazioni tra le due opere: complementari o antagoniste?

La risposta è presto data: le due opere sono complementari nei contenuti, ma vi sono presenti germi di antagonismo che porteranno nel giro di qualche anno a un netto distacco tra Zariski e i geometri algebrici italiani. Vediamo brevemente alcuni aspetti.

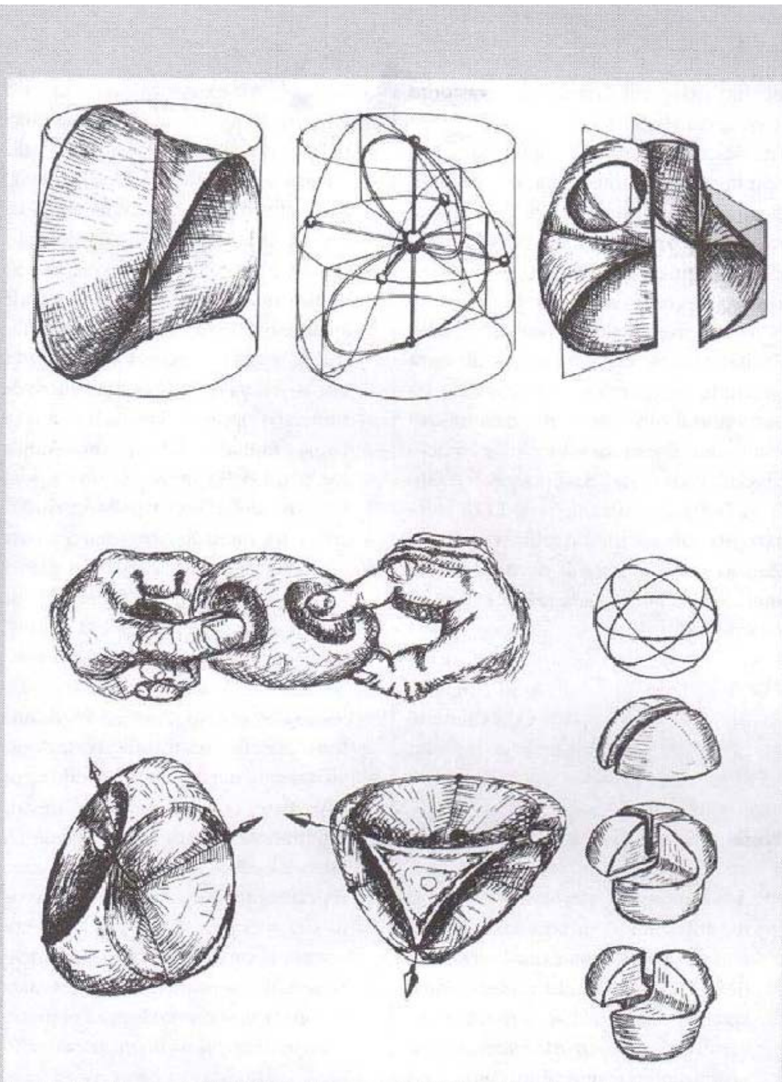
Sulla complementarietà notiamo innanzitutto che Zariski non tratta quello che abbiamo visto essere il punto centrale del lavoro di Enriques e quindi del trattato di Enriques-Campedelli, la classificazione delle superficie, ma si limita agli aspetti più generali della geometria delle superficie.

Per quanto riguarda i metodi, si può notare che malgrado Zariski faccia riferimento a B. L. van der Waerden, K. Hensel e altri rappresentanti dei nuovi metodi algebrici (che Enriques non nomina nemmeno), tutto ciò resta alquanto epidermico ed episodico. La vera differenza sta nel fatto che Zariski ricorre il più spesso possibile ai metodi trascendenti filtrati attraverso quelli topologici di Lefschetz. Se questo rende *diverse* le due trattazioni non le rende affatto *opposte* agli occhi di chi sappia quale importanza Enriques attribuisse alla topologia.

Una più profonda differenza poi, che fa la sua apparizione in questo contesto, è quella riguardante la questione del rigore. Non potendo esaminare in tutta la sua ampiezza questa questione ci limitiamo a confrontare come nei due testi venga trattata la questione cruciale dello scioglimento delle singolarità.

Enriques e Campedelli liquidano la faccenda in poche righe. Enunciato il teorema di scioglimento delle singolarità, si limitano a constatare: *"Che effettivamente il processo di trasformazione indicato abbia termine colla risoluzione completa di tutte le singolarità viene dimostrato rigorosamente da B. Levi e da O. Chisini"*.

Ben altro l'atteggiamento di Zariski che fa riferimento alle stesse dimostrazioni, cui dedica sei intere pagine: *"The proofs of these theorems are very elaborate and involve a mass of details which it would be impossible to reproduce in a condensed form. It is important, however, to bear in mind that in the theory of singularities the details of the proofs acquire a special importance and make all the difference between theorems which are rigorously proved and those*



Manipolazioni su una superficie romana di Steiner (tratta da *A Topological Picturebook* di K. Francis)

which are only rendered highly plausible".

Una differenza destinata a svilupparsi! Zariski pone dunque al centro dell'attenzione proprio quei "dettagli delle dimostrazioni" a cui abbiamo visto Enriques restare sovranamente indifferente. Il lettore di Zariski era perciò istintivamente portato a guardare con cura al consolidamento delle fondazioni della Geometria algebrica, il lettore di Enriques era spinto a tentare di edificarne l'edificio con sempre nuove acquisizioni.

Questa differenza è anche lumeggiata dalla prefazione di Castelnuovo all'edizione del 1949 del libro di Enriques ed è illuminante sul punto di rottura tra la scuola italiana e la visione di Zariski. Dopo aver sottolineato al lettore la necessità di considerare la teoria delle superficie anche alla luce dei metodi trascendenti-topologici che avevano caratterizzato il lavoro di Zariski nei primi anni di permanenza negli USA, Castelnuovo prosegue: "*Verrà presto il continuatore dell'opera delle scuole italiane e francese, il quale riesca a dare alla teoria delle superficie algebriche la perfezione che ha raggiunto la teoria delle curve algebriche? Lo spero ma ne dubito. A nutrire i miei dubbi m'induce l'osservazione che la matematica ha preso nel secolo attuale un indirizzo ben diverso da quello che dominava nel secolo scorso. La fantasia, la intuizione che guidavano la ricerca di allora sono oggi guardate con sospetto per il terrore degli errori a cui possono condurre. Le teorie sorgevano per rispondere al bisogno che il matematico provava di delineare e precisare degli oggetti del pensiero che erano già, in forma vaga, presenti alla sua mente. Era l'esplorazione di un ampio territorio intravisto da una cima lontana. [...] Oggi più che il terreno da esplorare interessa la via che vi conduce, e questa via ora vien seminata di ostacoli artificiali, ora si libra tra le nuvole*".

Enriques era stato fino all'ultimo indifferente a problemi di rigorizzazione formale e quindi sordo ai nuovi metodi. Castelnuovo invece aveva plaudito, più di ogni altro matematico italiano, al loro avvento finché essi erano stati visti come strumenti per superare le difficoltà e andare avanti. Ne rifuggiva quando sembravano divenire quasi fini a se stessi, mirati cioè esclusivamente a consolidare le fondazioni di quanto fino ad allora già fatto e non a percorrere nuovi terreni inesplorati. In un certo senso Castelnuovo guarda ancora più avanti di Zariski, alla fase successiva, quando in Geometria algebrica, sotto l'impulso di Serre e Grothendieck, furono elaborate le tecniche adeguate per riuscire ad aggredire i problemi più difficili lasciati insoluti dalla scuola italiana.

Zariski aveva espresso posizioni analoghe, ma aveva ritenuto il lavoro di fondazione ormai inevitabile per preparare nuove avanzate: "*I wouldn't underestimate the influence of algebra, but I wouldn't exagerate the influence of Emmy Noether. I'm a very faithful man [...] also in my mathematical tastes. I was always interested in the algebra which throws light on geometry, and I did never develop the sense for pure algebra. Never. I'm not mentally made for purely formal algebra, formal mathematics. I have too much contact with real life, and that's geometry. Geometry is the real life*".

La differenza tra le diverse posizioni "filosofiche" sta tutta qui. In linea di principio una differenza puramente evolutiva, un testimone che passa da una generazione all'altra. Ma le circostanze ne hanno fatto un fossato. Si sa che nell'ambito della scuola italiana Severi riteneva, a differenza di Castelnuovo, i metodi italiani perfettamente adeguati per superare con successo tutte le difficoltà, fondazionali o meno, che si presentavano. Non è quindi da stupirsi che anche con Zariski egli si sia trovato in posizione apertamente conflittuale.

Chiara espressione di questa posizione antagonista fu il Congresso Internazionale del 1950 svoltosi a Cambridge (Massachussets, U.S.A.), nell'Università di Harvard in cui Zariski si era trasferito a partire dal 1950.

In tale occasione Severi, sotto la doppia spinta concomitante dell'accusa scientifica di mancanza di rigore e di quella morale di condiscendenza nei confronti dell'antisemitismo del regime fascista, rimase del tutto isolato.

Non a caso nello stesso congresso Zariski teneva una famosa conferenza generale sulla Geometria algebrica assumendo il ruolo di *leader* della nuova comunità internazionale dei geometri algebrici. Da allora Severi sarebbe stato il simbolo del "vecchio" modo di lavorare in Geometria algebrica, mentre Zariski sarebbe stato il punto di riferimento della nuova generazione di ricercatori.

Aldo Brigaglia
Ciro Ciliberto

Note

[1] A Cremona si deve, tra l'altro, la formulazione rigorosa e generale del concetto di trasfomazione birazionale (le trasformazioni birazionali dello spazio proiettivo in sé verranno chiamate in seguito *trasformazioni cremoniane*) e la fondazione, assieme a G. Battaglini, E. Betti, E. Beltrami, F. Brioschi e F. Casorati, di una grande e vivace scuola matematica italiana, ricca di giovani talenti. Tra i suoi allievi diretti ricordiamo G. Veronese ed E. Bertini, nonché R. de Paolis, professore a Pisa, cui si deve la prima formazione geometrica di Enriques.

[2] Nella trattazione di Noether, tra le serie lineari su una curva algebrica particolare importanza riveste la *serie canonica* che, su un modello piano della curva, di grado d con soli nodi, è tagliata, fuori dai nodi, dalle curve aggiunte di grado $d - 3$. In accordo con la interpretazione di Clebsch, questa è la serie dei divisori ove si annullano i differenziali olomorfi sulla curva. Essa può essere pensata (salvo il caso di eccezione in cui la curva sia *iperellittica*, cioè un rivestimento doppio della retta proiettiva) come tagliata dal sistema degli iperpiani dello spazio su un opportuno modello liscio della curva, il cosidetto *modello canonico* o *curva canonica* che è una curva di grado $2g$-2 in uno spazio proiettivo di dimensione g-1, dove g è il genere della curva.

[3] Per esempio, Noether aveva dimostrato - nella sua tesi di abilitazione all'insegnamento del 1870 - che ogni superficie con un sistema lineare unidimensionale di curve razionali è razionale. Allo stesso ordine di idee si ricollegano alcuni importanti lavori del periodo 1878-1889 in cui vengono caratterizzate le superficie razionali che possono rappresentarsi come rivestimenti doppi del piano (i cosiddetti *piani doppi razionali*).