La successione di Fibonacci: una **colorata ghirlanda di numeri**

"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."

~ Galileo Galilei, Il Saggiatore ~

"L'attenzione che i matematici hanno per le qualità estetiche della loro disciplina (…) è notevole; da qui discende l'idea di molti matematici, anche contemporanei, che l'attività matematica e quella artistica siano in qualche misura molto simili, paragonabili. La creatività sarebbe il fattore che unisce Matematica e Arte, Arte e Scienza più in generale"

~ Michele Emmer, 1991 ~

"La più alta categoria dell'intelletto immaginativo è sempre eminentemente matematica"

~ Edgar Allan Poe ~

"La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento, bensì l'immaginazione"

~ A. De Morgan ~

La ricerca Matematica è resa possibile e verrebbe addirittura guidata dalla creatività e dall'immaginazione così come lo è la ricerca artistica. Non è possibile certamente escludere un importante nesso tra la scoperta, l'invenzione matematica e l'atto umano dell'immaginare, del creare; ma un tale legame, se isolatamente affermato, può risultare troppo vago: in questo senso, allora, ogni espressione del pensiero umano, ogni azione, ogni riflessione appare, in ultima analisi, inscindibilmente basata sulla creatività. Limitare il legame tra la Matematica e l'Arte a questo loro comune denominatore (peraltro evidente) equivarrebbe ad affermare (…) che entrambe sono attività umane: affermazione indubbiamente vera, ma troppo generica per apparire significativa.

Non manca di notare il matematico Michele Emmer che "la creatività, che dovrebbe spiegare tutto, rischia di non spiegare nulla. È più significativo (…) andare a esaminare delle situazioni ben precise e analizzare possibili connessioni, piuttosto che parlare in generale di legami tra Arte e Scienza".
Dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande, dalla piccola chiocciola che vive nel sottobosco fino alle immense galassie che contengono miliardi di stelle, tutto sembra essere regolato da precise leggi matematiche, da calcoli predefiniti.

Lo stesso Galilei, in questa celeberrima affermazione, intendeva dire che l'armonia del mondo si manifesta nella **forma** e nel **numero**.

Tralascerò volontariamente qualsiasi implicazione di natura filosofica o misticcheggiante che possa essere presunta nel rapporto tra Matematica e Natura e userò invece un approccio scientifico, basando quindi questo simposio sui dati puri e semplici.

Osservando la Natura si scoprono espressioni d'eleganza e d'armonia: il tratto comune che definisce gli oggetti attraenti è generato da leggi matematiche rigorose ed inequivocabili. Le forme sono il primo aspetto intuitivo della realtà che l'occhio umano percepisce. Fin dall'antichità, gli studiosi hanno cercato di ricondurre la bellezza e la perfezione della natura a rapporti armonici. Ogni oggetto che compone l'Universo, infatti, tende all'equilibrio, che si astrae in perfezione matematica, e tale tendenza contribuisce a delineare la bellezza di tutto ciò che ci circonda.

In particolare sembra che la Natura "gradisca" particolarmente alcuni concetti matematici:

- la **sezione aurea**, che pone le sue radici nell'età greca.
- la successione di Fibonacci, introdotta a partire da 1202 circa.

Negli ultimi decenni a cavallo tra il 20° e il 21° secolo, tuttavia, nuove branche della Matematica hanno iniziato ad emergere in risposta a stimoli sempre più urgenti di precisione e di capacità predittiva, come ad esempio il problema della fluidodinamica nata in risposta all'urgenza bellica di prevedere il clima e facendo nascere la scienza della Metereolgia e la teoria del caos e della matematica frattale che sono state indispensabili per lo sviluppo della Teoria dei Segnali e della loro trasmissione e per branche fondamentali della Biologia e della Botanica. Per cui, a questi due concetti è sensato aggiungere:

- **geometria frattale**, termine coniato nel 1975 da Benoît Mandelbrot nel libro *Les Objects Fractals: Forme, Hazard et Dimension* per descrivere alcuni comportamenti matematici che sembravano avere un comportamento "caotico".
- **sistemi dinamici**, ovvero modelli matematici che rappresentano oggetti con un numero finito di gradi di libertà che evolvono nel tempo secondo una legge deterministica.
- **teoria del caos**, è lo studio attraverso modelli della fisica matematica dei sistemi fisici che esibiscono una sensibilità esponenziale rispetto alle condizioni iniziali.

Questi sono concetti piuttosto complessi che richiedono una trattazione non adatta per questo incontro quindi non verranno approfonditi nella loro parte più scientifica; guarderemo invece a quello che abbiamo sotto gli occhi con uno sguardo nuovo, l'occhio della Scienza!

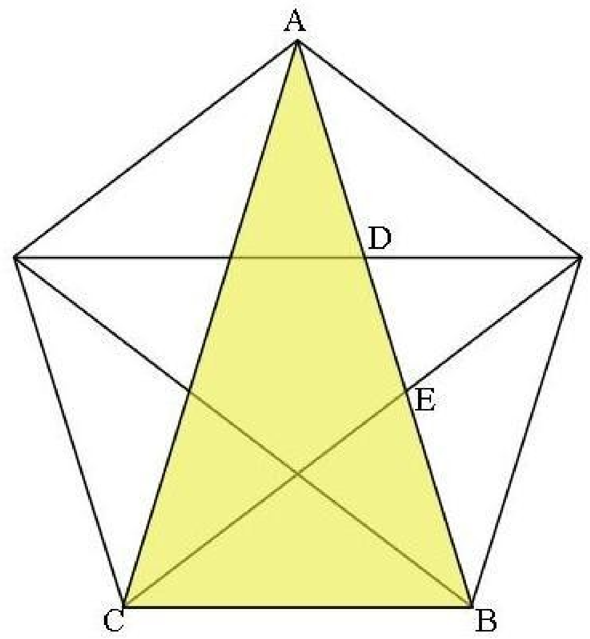
> There's real poetry in the real world. Science is the poetry of reality.
>
> ~ Richard Dawkins, The Enemies of Reason, "Slaves to Superstition" ~

SEZIONE AUREA

Definizione: dati due segmenti ***a*** e ***b*** con ***a* > *b*** essi si trovano in rapporto aureo se il segmento maggiore (***a***) è medio proporzionale tra la somma dei due segmenti e il segmento minore (***b***)

$$(a + b) : a = a : b$$

Esaminiamo ora la seguente figura: un pentagramma inscritto in un pentagono:



$$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{DB}:\overline{EB}=\Phi$$

La sezione aurea risulta connessa con la geometria del pentagramma: in particolare il rapporto aureo è pari al rapporto fra $\overline{AB}$ e $\overline{DB}$ o $\overline{AE}$, ma anche fra $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ o fra $\overline{DB}$ e $\overline{EB}$ e a sua volta tra $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$ e $\overline{DE}$ e in un'infinità di relazioni simili, se immaginiamo che nel pentagono centrale possiamo iscrivere un nuovo pentagramma, il quale produrrà a sua volta un nuovo pentagono centrale, in cui ripetere l'iscrizione della stella a cinque punte e così via, seguendo uno schema ricorsivo.

Il numero Φ rappresenta la costante dei rapporti sopracitati: è un numero **non naturale**, **irrazionale** ed equivale, in maniera approssimata a:

$$\Phi = 1{,}6180339887498948482045868343656381$$

In Matematica, definiamo i **numeri irrazionali** come i numeri reali che non possono essere scritti come una frazione a/b con *a* e *b* interi e *b* diverso da 0. I numeri irrazionali sono esattamente quei numeri la cui espansione in qualunque base (decimale, binaria, ottale, esadecimale, ecc.) non termina mai e non forma una sequenza periodica.

Per capire meglio questo concetto ricordiamo cosa sono i **numeri naturali**: è l'insieme {0, 1, 2, 3, 4, ...}. Esso viene fatto corrispondere biunivocamente all'insieme dei numeri interi non negativi {0, +1, +2, +3, +4, ...}. Talvolta viene usata anche per indicare l'insieme dei numeri interi positivi { 1, 2, 3, 4, …}

Φ gode della particolarità per la quale il reciproco e il quadrato mantengono le stesse cifre decimali

- $\Phi = 1,61803398\ldots$
- $\Phi^2 = 2,61803398\ldots$
- $1/\Phi = 0,61803398\ldots$

Da questo si deriva che

- $\Phi^2 = \Phi + 1$
- $1/\Phi = \Phi - 1$

> Mathematics is the highest form of art, because it is pure structure.
>
> ~ Anonimous ~

> Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas
>
> ~ Albert Einstein ~

SUCCESSIONE DI FIBONACCI

L'intento di **Leonardo Fibonacci**, detto Leonardo Pisano, fu quello di trovare una legge che descrivesse la crescita di una popolazione di conigli. Assumendo che:

- la prima coppia diventi fertile al compimento del primo mese e dia alla luce una nuova coppia al compimento del secondo mese;
- le nuove coppie nate si comportino in modo analogo;
- le coppie fertili, dal secondo mese di vita diano alla luce una coppia di figli al mese;

avremo che se partiamo da una singola coppia dopo un mese essa sarà fertile, e dopo due mesi avremo due coppie di cui una sola fertile. Nel mese seguente le coppie saranno 3 perché solo la coppia fertile ha partorito; di queste tre ora saranno due le coppie fertili quindi nel mese seguente ci saranno 3+2=5 coppie. In questo modo il numero di coppie di conigli di ogni mese descrive la successione dei numeri di Fibonacci.

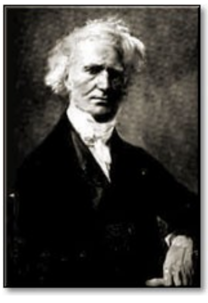
La definizione formale è una successione di interi definita a partire dalla coppia 1, 1 in cui l'elemento successivo è calcolato come somma degli ultimi due.

$$\mathbf{Fib_0 = 0}$$
$$\mathbf{Fib_1 = 1}$$
$$\mathbf{Fib_n = Fib_{n-1} + Fib_{n-2}}$$

Cosa hanno in comune questa successione numerica e Φ? Fu l'astronomo **Johannes Kepler** che nel 1611, oltre 400 anni dopo la pubblicazione del *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci, scoprì che il rapporto fra due consecutivi della successione di Fibonacci approssimava via via, sempre più precisamente, il numero aureo.

Keplero, quale astronomo, non era forse tanto interessato a dimostrare la fondatezza della sua scoperta, quanto piuttosto a ricercarla nell'architettura dell'universo che lui osservava nelle sue proprietà "divine".

La dimostrazione fu fornita un secolo dopo con la scoperta della formula generatrice della successione di Fibonacci ad opera di Jacques Binet, anche se era probabilmente già nota ad Eulero.



La formula di Binet permette di calcolare in modo generalizzato tutti i numeri della successione e ha come valore costante il numero Φ, tenendo conto dell'osservazione di Kepler:

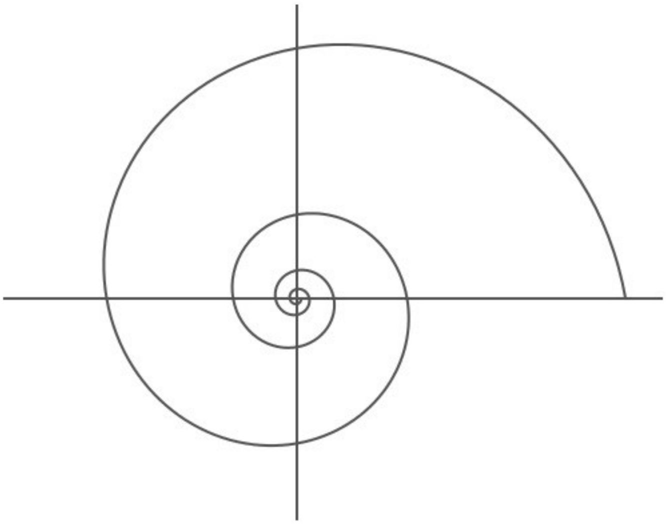
$$\mathbf{Fib_n = \frac{\Phi^n - (1 - \Phi)^n}{\sqrt{5}}}$$

I passaggi matematici di questa dimostrazione possono essere, a mio malincuore, saltati in questa sede. Quello che interessa è invece è l'applicazione del numero Φ come fattore di accrescimento delle spirali logaritmiche.

Ricordiamo a titolo ludico i primi 20 numeri della successione di Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765

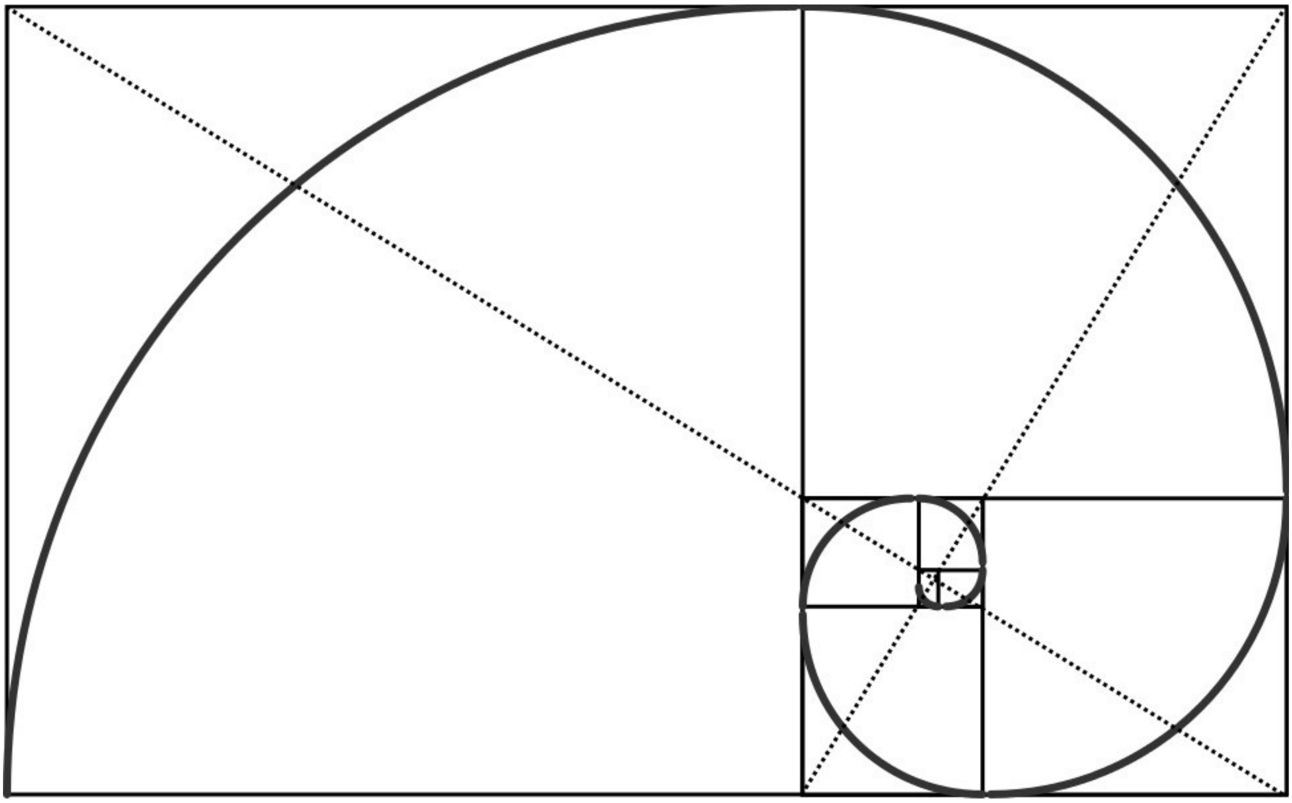
Una **spirale logaritmica** è un tipo particolare di spirale che si ritrova spesso in natura. La spirale logaritmica è stata descritta la prima volta da **René Descartes** e successivamente indagata estesamente da **Jakob Bernoulli**, che la definì *Spira mirabilis*, "la spirale meravigliosa".



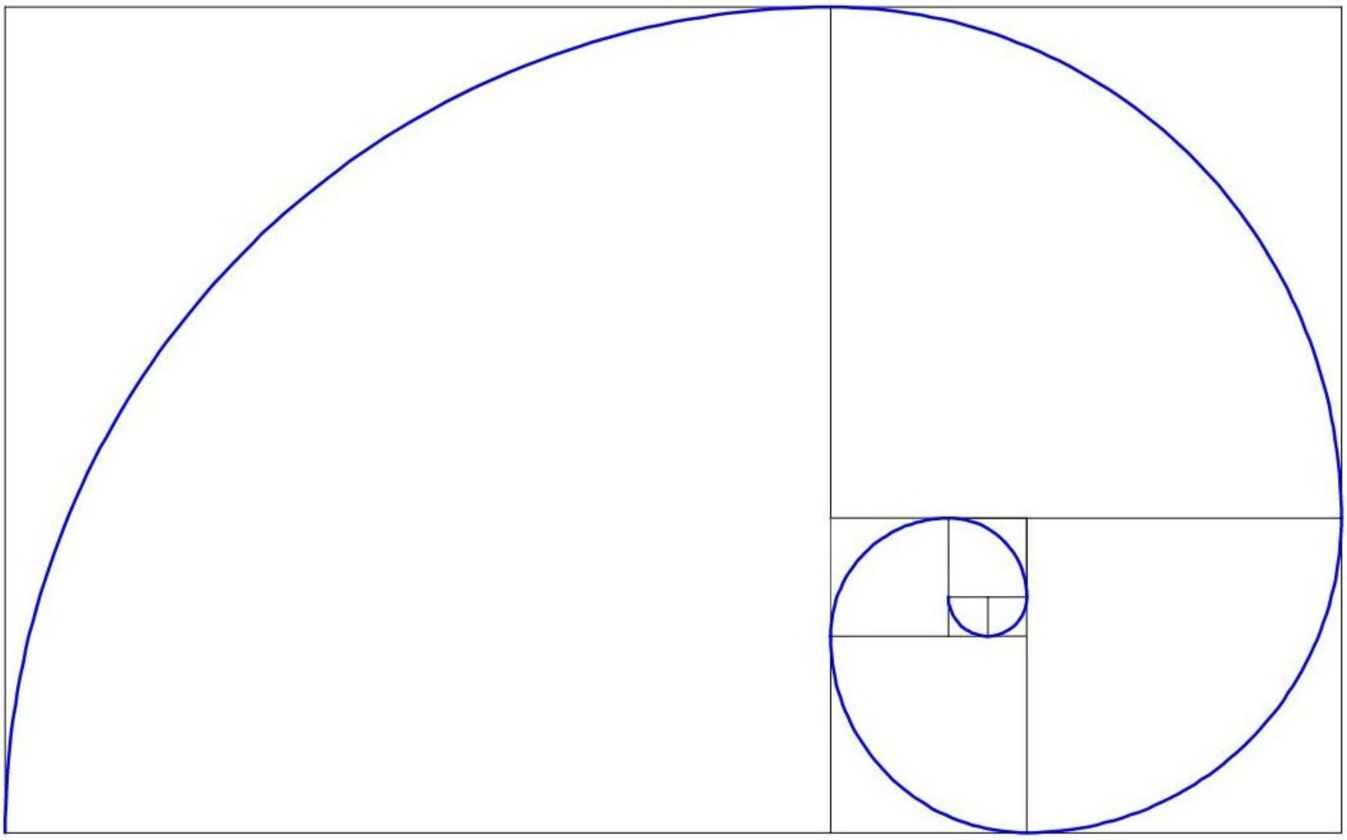
I falchi si avvicinano alla loro preda secondo una spirale logaritmica: il loro angolo di vista migliore forma un certo angolo con la loro direzione di volo, e questo angolo è l'inclinazione della spirale.

Si possono osservare spirali logaritmiche nella disposizione delle foglie di alcune piante. Un esempio sono l'ordinamento delle scaglie dell'ananas o la disposizione delle foglie dell'Aloe.

Queste curve accrescono il loro raggio di un fattore chiamato b (nel caso di $b = 0$ otteniamo una circonferenza)e a noi interessa particolarmente quando questo valore è proprio Φ. In questo caso parliamo di **spirale aurea** con fattore di accrescimenti b di crescita pari a Φ, la sezione aurea.



Si tende spesso a confondere la spirale aurea con la **spirale di Fibonacci** che è una approssimazione della spirale aurea; al contrario del diagramma con i rettangoli basato sulla sezione aurea, questa spirale si basa su quadrati di lato pari a numeri di Fibonacci



Perché questa struttura ci interessa particolarmente?

Il **numero aureo** è una delle costanti matematiche predilette dalla natura e, insieme alla successione di Fibonacci, regola l'armonia del mondo che ci circonda.

Sarà successo a tutti, spero, di rimanere incantati davanti alla bellezza di una rosa, o affascinati da un girasole. Il fascino della natura è frutto della proporzione intrinseca ad essa. Infatti la natura, seppure imperfetta, tende alla perfezione matematica. Ma perché proprio Φ?

Questo per il fatto che i sistemi complessi si evolvono secondo il "**principio di minima energia**", cercando di raggiungere l'equilibrio. E sembra che il numero aureo, in diversi ambiti della natura, permette questo. In particolare, esso è presente in molti esseri viventi, uomo compreso, ma anche nei vegetali, e contribuisce a creare l'armonia del mondo che ci circonda, dove il caos è solo un'apparenza, e tutto tende alla perfezione secondo principi matematici. Ecco alcuni esempi:

FILLOTASSI

Fillotassi è un termine che deriva dal greco *phyllon* = foglia e *taxis* = ordine. È una branca della botanica preposta allo studio ed alla determinazione dell'ordine con cui le varie entità botaniche (foglie, fiori, etc.) vengono distribuite nello spazio, conferendo una struttura geometrica alle piante.

Da semplici osservazioni botaniche che mirano ad individuare il numero di foglie presenti su ciascun nodo e l'orientamento di queste rispetto alle foglie del nodo superiore, la fillotassi si è potuta avvalere di studi incrociati di matematici e botanici, i quali hanno rivelato un sistema

assai semplice ma incredibilmente efficace, adottato dalle piante per generare non solo strutture semplici ma anche morfologie complesse a spirale.
Infatti, tra i vegetali, le foglie sui rami e lungo il tronco tendono ad occupare posizioni **che rendano massima l'esposizione delle foglie alla luce del sole**. Se la disposizione delle foglie seguisse schemi rettilinei, tuttavia, si privilegerebbero solamente le foglie più alte, dal momento che quelle esposte al sole nasconderebbero le altre.

La Natura ha introdotto quindi una componente rotatoria, attraverso cui le foglie successive si susseguono attorno al fusto secondo un'ideale spirale. Alcune piante come il **pero** e il **salice** hanno un quoziente di fillotassi di **3/8**: significa, cioè, che sul fusto, ogni 3 giri si susseguono 8 rami.

Altre, invece, come il **melo**, alcune **querce** e **l'albicocco** hanno coefficiente **2/5**: ogni 2 giri si susseguono 5 rami.

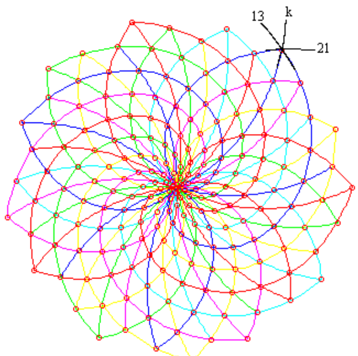
Si è constatato che utti questi rapporti hanno al numeratore e al denominatore soltanto numeri appartenenti alla successione di Fibonacci.

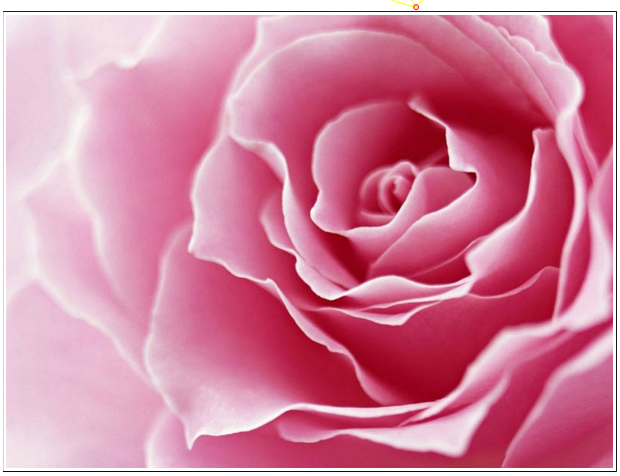
IL GIRASOLE

Il girasole è forse uno degli esempi più belli della "matematica naturale". Ammirando il girasole è facile notare, al centro dell'infiorescenza, che l'insieme di spirali orarie e antiorarie si intersecano con regolarità.

Infatti gli elementi dell'infiorescenza crescono in modo da occupare **nel modo più efficiente** lo spazio circolare all'interno del fiore. Il numero di spirali presenti dipende dalla grandezza e dal tipo di girasole. Nel caso più comune, ad esempio, ci sono **34** spirali avvolte in un senso, e **55** avvolte nel senso opposto.
Sono stati osservati, tuttavia, anche girasoli con rapporti diversi, ad esempio **89/55**, **144/89** e, il più grande, **233/144**.

Nell'immagine a destra è stata schematizzata la struttura spiraliforme della infiorescenza del girasole.





LA ROSA

Anche la rosa, uno dei fiori più armonici della che la natura ci offre, è collegata alla sezione aurea: gli angoli che definiscono le posizioni dei petali (in frazioni di angolo giro), sono infatti la parte decimale di semplici multipli di Φ. **Tale disposizione, infatti, permette una maggior densità di petali**.

Ricordiamo che I petali hanno una funzione vitale per un fiore: il loro insieme forma la **corolla** che è la struttura predisposta per l'impollinazione. Soprattutto per quelle specie di piante che utilizzano animali impollinatori per la riproduzione (insetti, uccelli e mammiferi) è vitale avere corolle abbondanti, appariscenti, profumate e che attirino l'attenzione.

La struttura dei fiori ad impollinazione zoogama ha la caratteristica di una “pista di atterraggio” ovvero di guidare gli animali verso gli stami e i pistilli; in alcuni casi si tratta di strisce vivacemente colorate che guidano verso il centro del fiore e in altri, come nella rosa, si tratta di spirali convergenti.

In quest’immagine è perfettamente osservabile la spirale che i rami formano durante l’accrescimento dell’albero (fillotassi).

I fiori più piccoli sono disposti, a partire dal centro, su dei bracci che a loro volta si evolvono seguendo una forma spiraliforme piuttosto evidente.

Anyone who cannot cope with mathematics is not fully human. At best he is a tolerable subhuman who has learned to wear shoes, bathe, and not make messes in the house.

~ Robert A. Heinlein, “Notebooks of Lazarus” ~

La maggior parte delle piante genera dei fiori che possiedono un numero di petali pari ad un numero appartenente alla successione di Fibonacci. La maggior parte possiede 5, 8, 13 e 21 petali.

Il broccolo romano ha una struttura ben organizzata che si evolve su delle spirali. Inoltre esso è come un **frattale**, infatti ogni protuberanza conica si ottiene dalla ripetizione di coni più piccoli, che aggregandosi danno origine a coni più grandi e così via.

I FRATTALI E LA NATURA: CENNI

Cos'è un frattale? Un frattale è un **oggetto geometrico che si ripete nella struttura allo stesso modo su scale diverse**, ovvero, in parole semplici, non cambia aspetto anche se visto con una lente di ingrandimento.

Oggetti con un tale comportamento potrebbero apparire costruzioni artificiali, sebbene siano frequenti in natura: la disposizione dei rami di un albero, la conformazione di un cavolfiore, la distribuzione degli alveoli polmonari, la superficie delle nuvole, il percorso di un fiume, la struttura delle galassie, il lampo di un fulmine, le ramificazioni del deposito di uno ione in un processo elettrolitico, eccetera.

In effetti i frattali sono un nuovo potente linguaggio matematico, grazie al quale è possibile descrivere fenomeni naturali e risolvere problemi della realtà che erano stati un tempo accantonati. Si tratta di una Matematica moderna che si avvale in modo determinante dell'Informatica, anche se la sua genesi è antica.

Per capire l'importanza delle figure frattali, occorre fare un passo indietro nel tempo. **Galileo Galilei**, uno dei più grandi scienziati di tutti i tempi, riteneva che la Matematica fosse una disciplina indispensabile per interpretare i fenomeni na turali e per rappresentare le forme della natura.

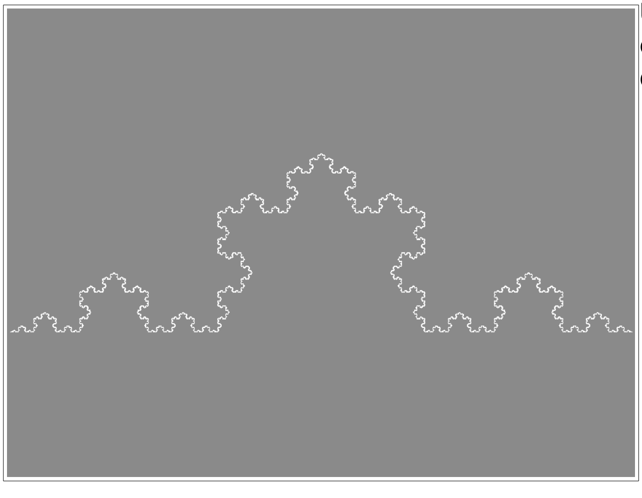
La nostra esperienza quotidiana ci induce tuttavia a ritenere che l**e figure geometriche più familiari nello studio (rette, cerchi, poligoni regolari, ...) in natura sono l'eccezione**.

Qual è la forma di sasso, una nuvola, un albero, una montagna?

È proprio questa l'obiezione di **Benoit Mandelbrot** che nel 1975 introduce i frattali come nuove figure geometriche più efficienti a rappresentare la complessità della natura.

Il termine frattale , da lui coniato, deriva dal latino *fractus* (rotto, frazionato). I frattali sono infatti figure strane, molto frastagliate, granulose, a volte ramificate ed intricate, con tentacoli o protuberanze, proprio come le forme naturali!

A dire il vero, i frattali hanno una radice più antica, che non è solo legata al loro nome. Agli inizi del XX secolo, alcuni matematici avevano creato (ideato e/o inventato) curve e figure molto strane che sovvertivano le regole della Geometria classica violavano le caratteristiche di armonia considerate naturali per gli oggetti in campo scientifico.



Una linea tutta spigoli (il **merletto di Koch**), una curva che dipanandosi un labirinto ricopre un quadrato (**curve di Peano-Hilbert**).

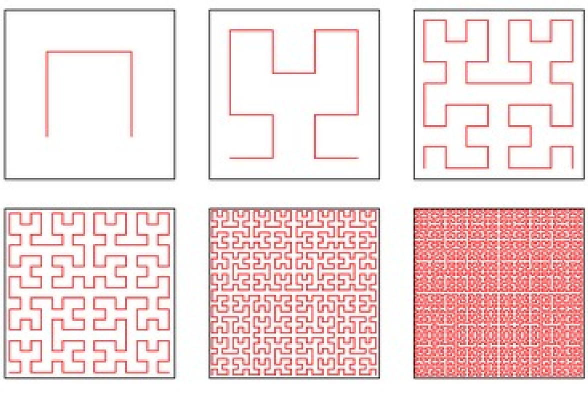
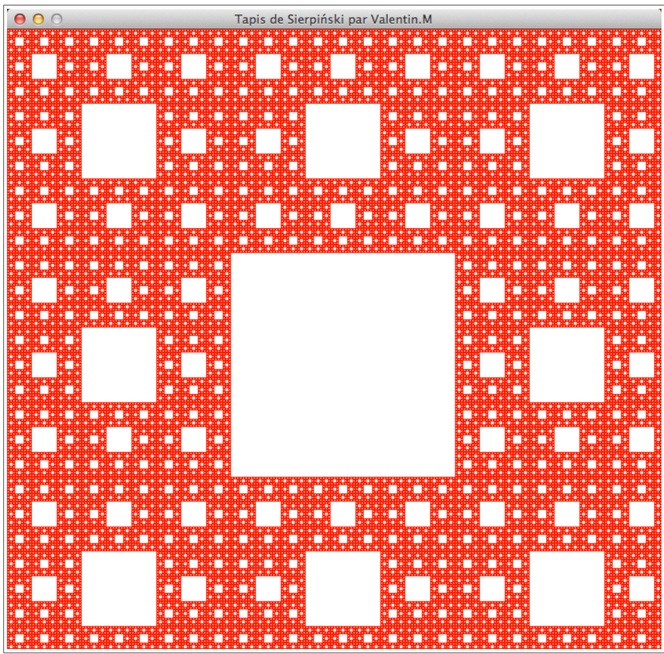
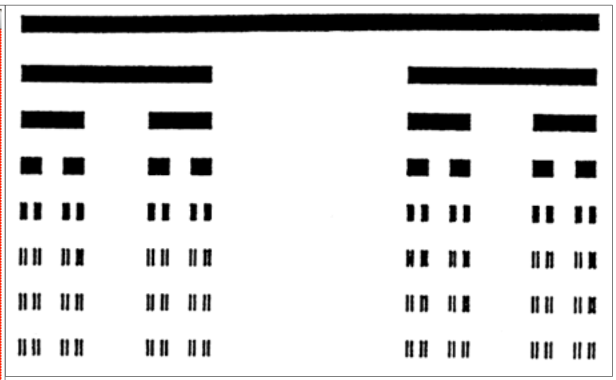


Figure bucherellate come il **tappeto di Sierpinski** o la **polvere di Canton**.





Queste strutture furono considerate alla stregua di mostri da relegare in una sorta di museo degli orrori o da esibire solo in un circo equestre.

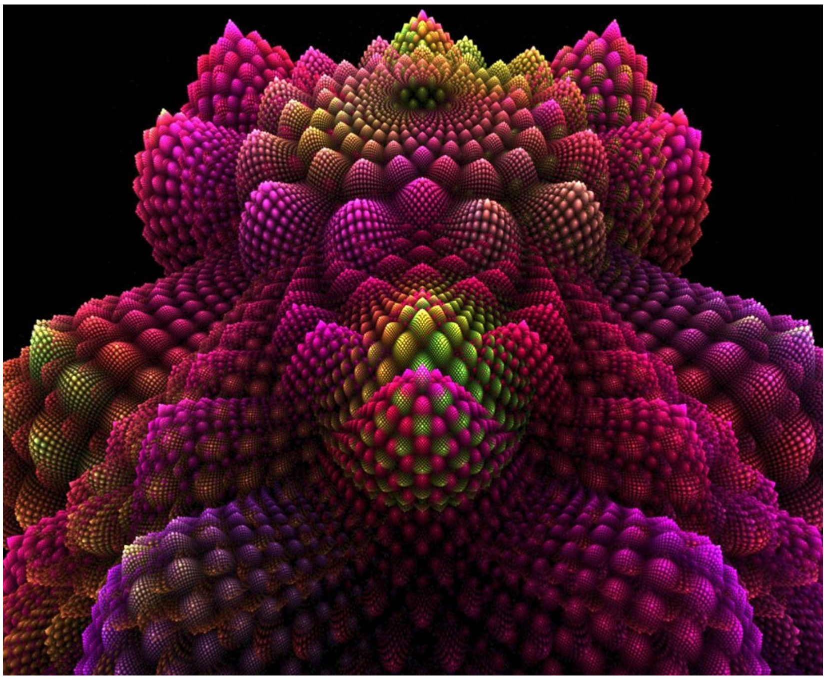
Contemporaneamente, nel mondo scientifico cresceva l'esigenza di trovare un nuovo linguaggio, più duttile e potente, che fosse adeguato a descrivere la complessità della natura.

Come afferma Edgar Allan Poe "***ciò che è nascosto po' essere trovato, purché vengo cercato con sufficiente attenzione e diligenza, mentre ci vuole un intelletto superiore per trovare ciò che si ha sotto gli occhi***" .

Cosi, solo grazie a Mandelbrot i mostri matematici, relegati negli armadi, furono spolverati e rimessi moto acquistando la nuova veste di antenati delle moderne figure frattali. Per dirla con le sue parole, i frattali sono nati recuperando pezzi separati pre-esistenti, ma concepiti in contesti limitati e distinti.

Dopo il rivoluzionario intervento di Mandebrot, i matematici furono sorpresi e compiaciuti nello scoprire che le loro figure patologiche fossero diventate la chiave di lettura della complessità tanto a lungo cercata.

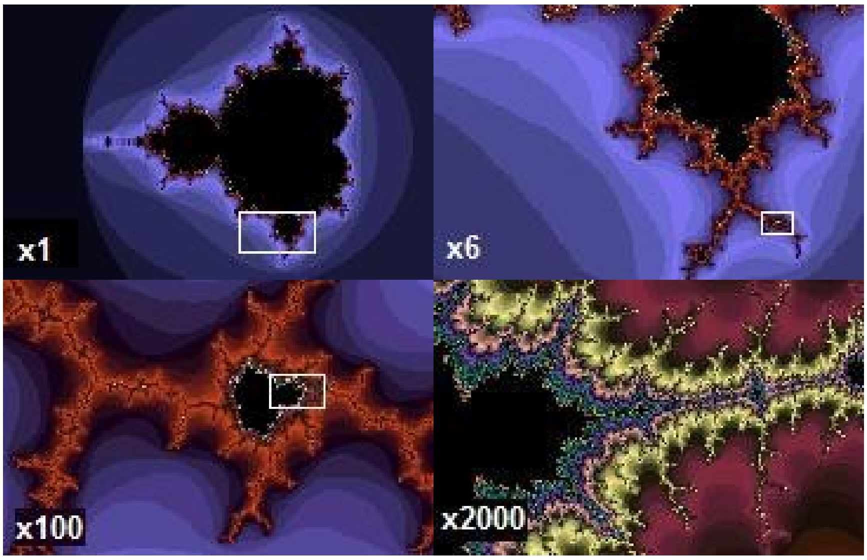
Negli ultimi venti anni, i modelli frattali sono usciti allo scoperto, acquistando il ruolo dl struttura chiave nella modellizzazione matematica in tutti i settori: dalle scienze naturali a quelle economi e sociali, dalla fisiologia alla tecnologia avanzata e il loro campo di applicazione è in costante crescita. La geometra frattale è inoltre strettamente collegata alla Teoria del Caos.



Finora abbiamo visto mirabili esempi di vegetali che presentano strutture tipicamente frattali. Per capire meglio come la Matematica sia in grado di descrivere queste strutture, esaminiamo scientificamente un frattale.

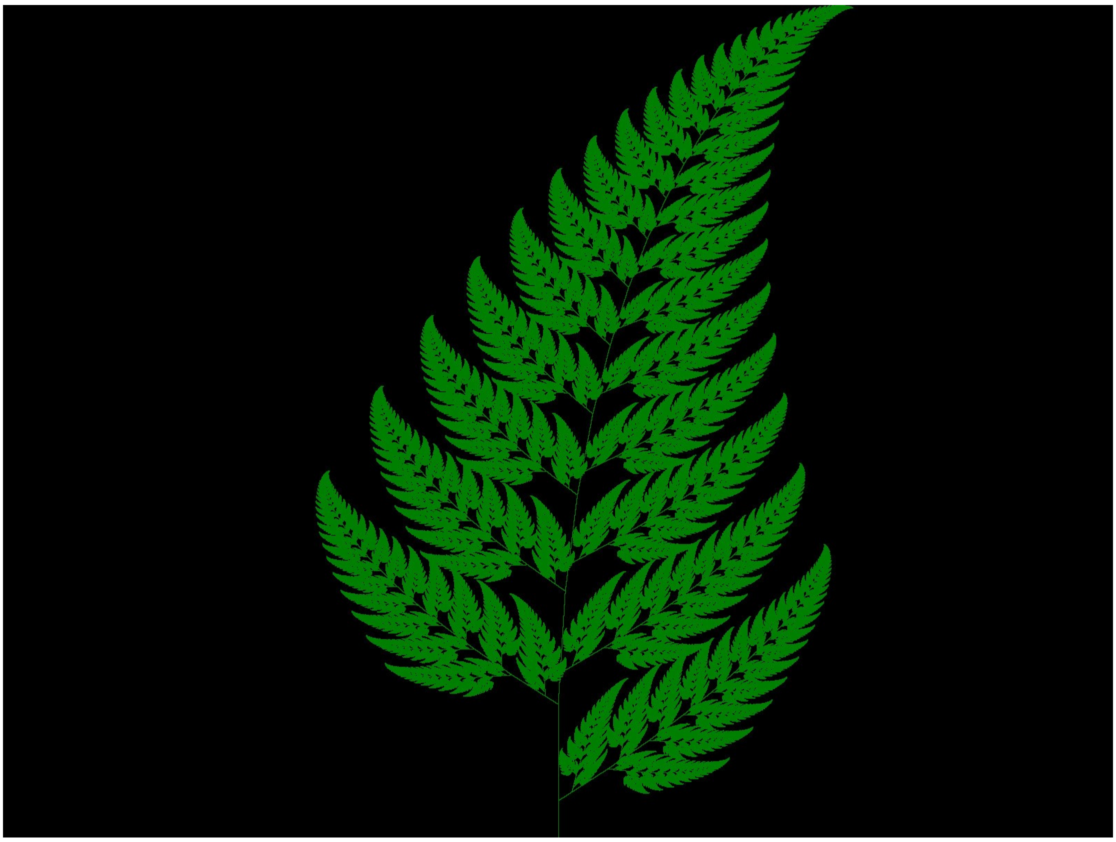
Un frattale è un oggetto geometrico dotato di **omotetia interna**: si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse, e dunque ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale.

Questa caratteristica è spesso chiamata **auto similarità** oppure **autosomiglianza**.

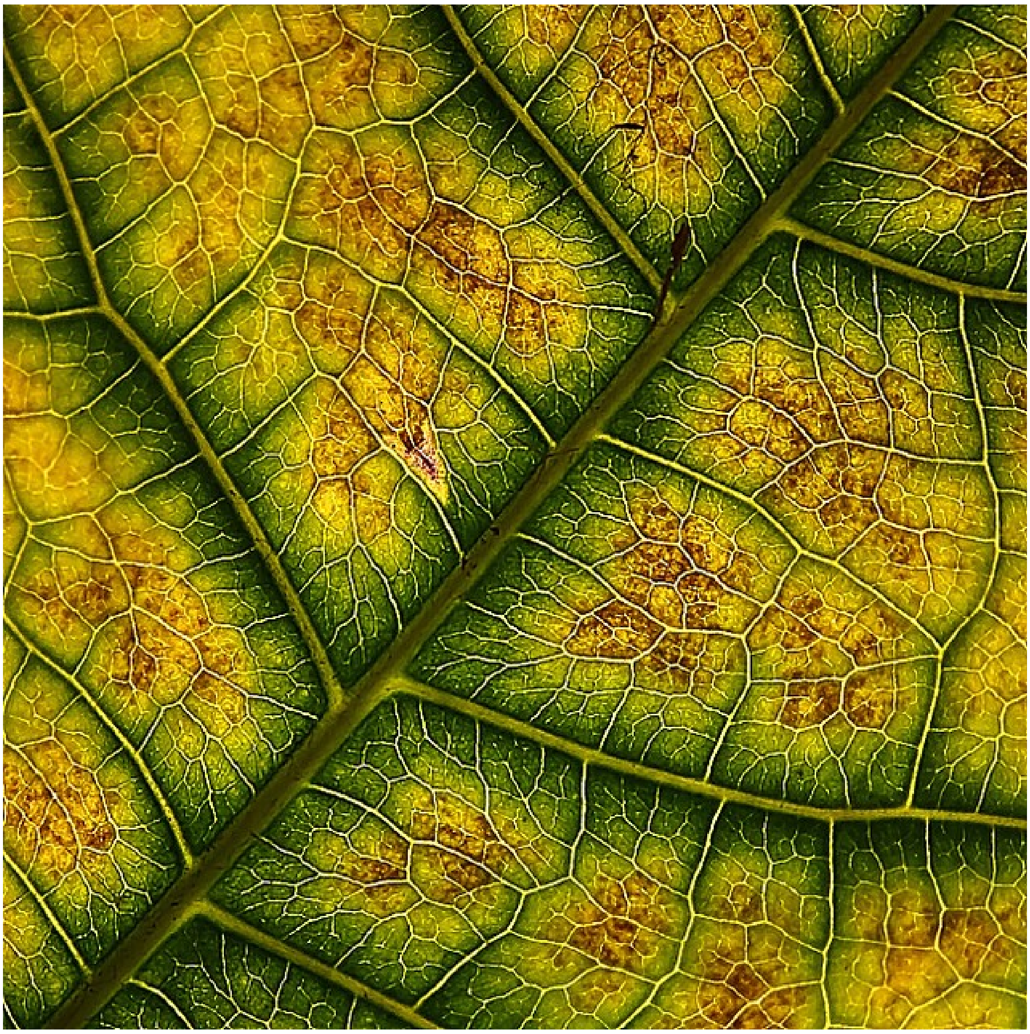


La Natura produce molti esempi di forme molto simili ai frattali. Ad esempio in un albero (soprattutto nell'abete) ogni ramo è approssimativamente simile all'intero albero e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo, e così via; è anche possibile notare fenomeni di auto-similarità nella forma di una costa: con immagini riprese da satellite man mano sempre più grandi si può notare che la struttura generale di golfi più o meno dentellati mostra molte componenti che, se non identiche all'originale, gli assomigliano comunque molto.

Frattali sono presenti anche nel profilo geomorfologico delle montagne, nelle nubi, nei cristalli di ghiaccio, in alcune foglie e fiori. Questa immagine è la **Felce di Barnsley**, un oggetto frattale

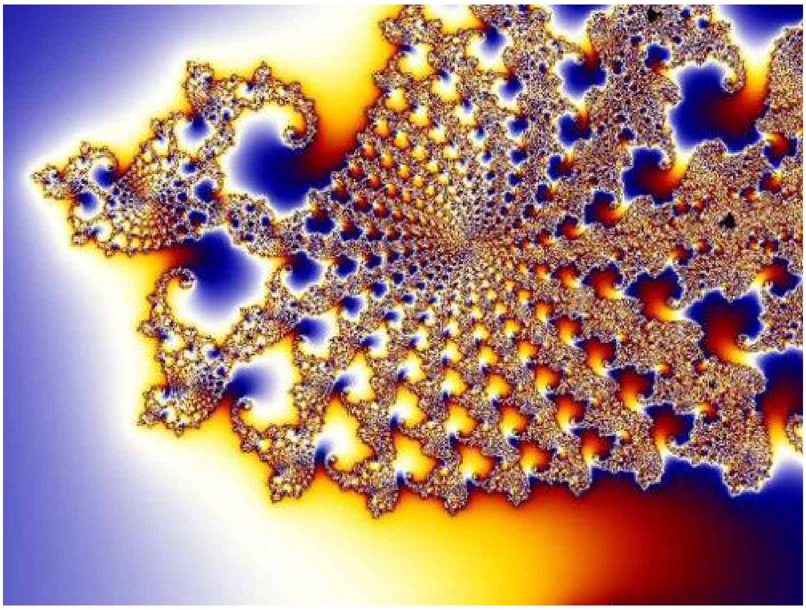


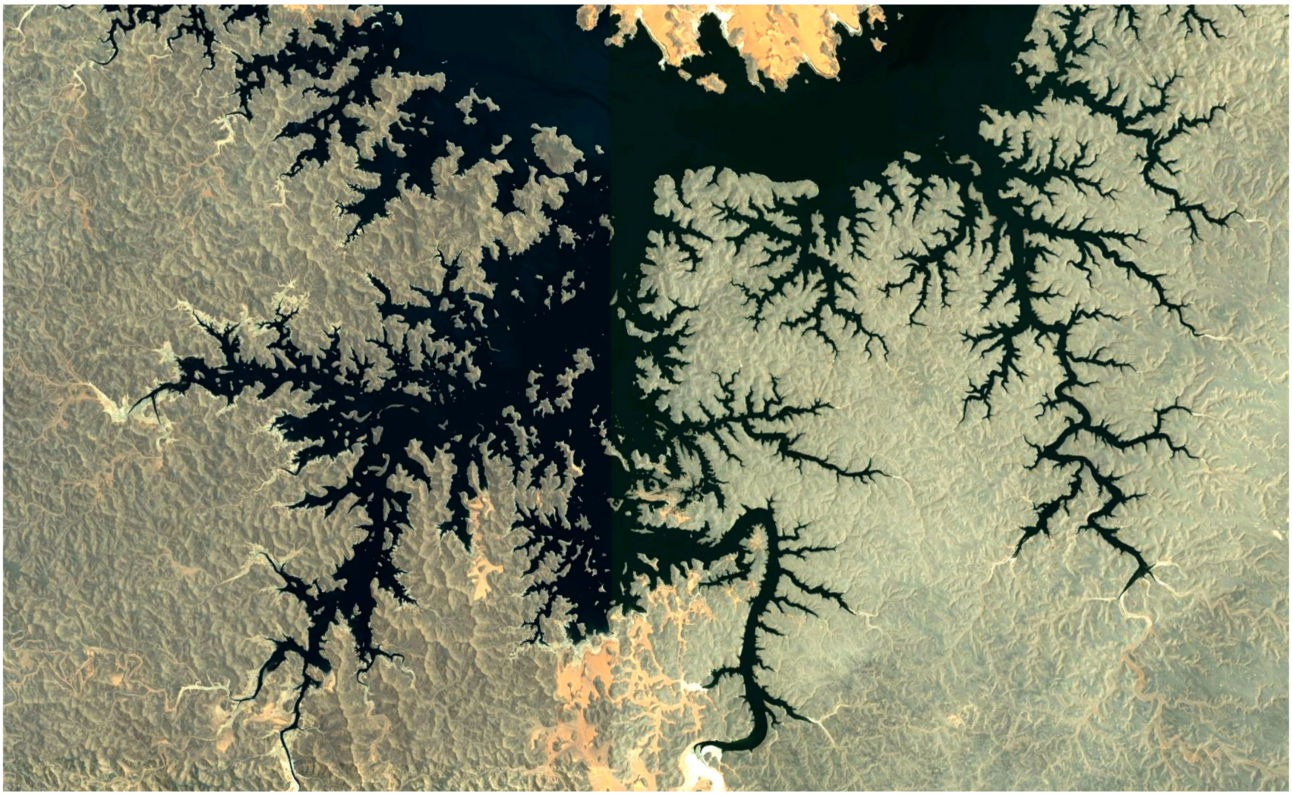
generato al computer.



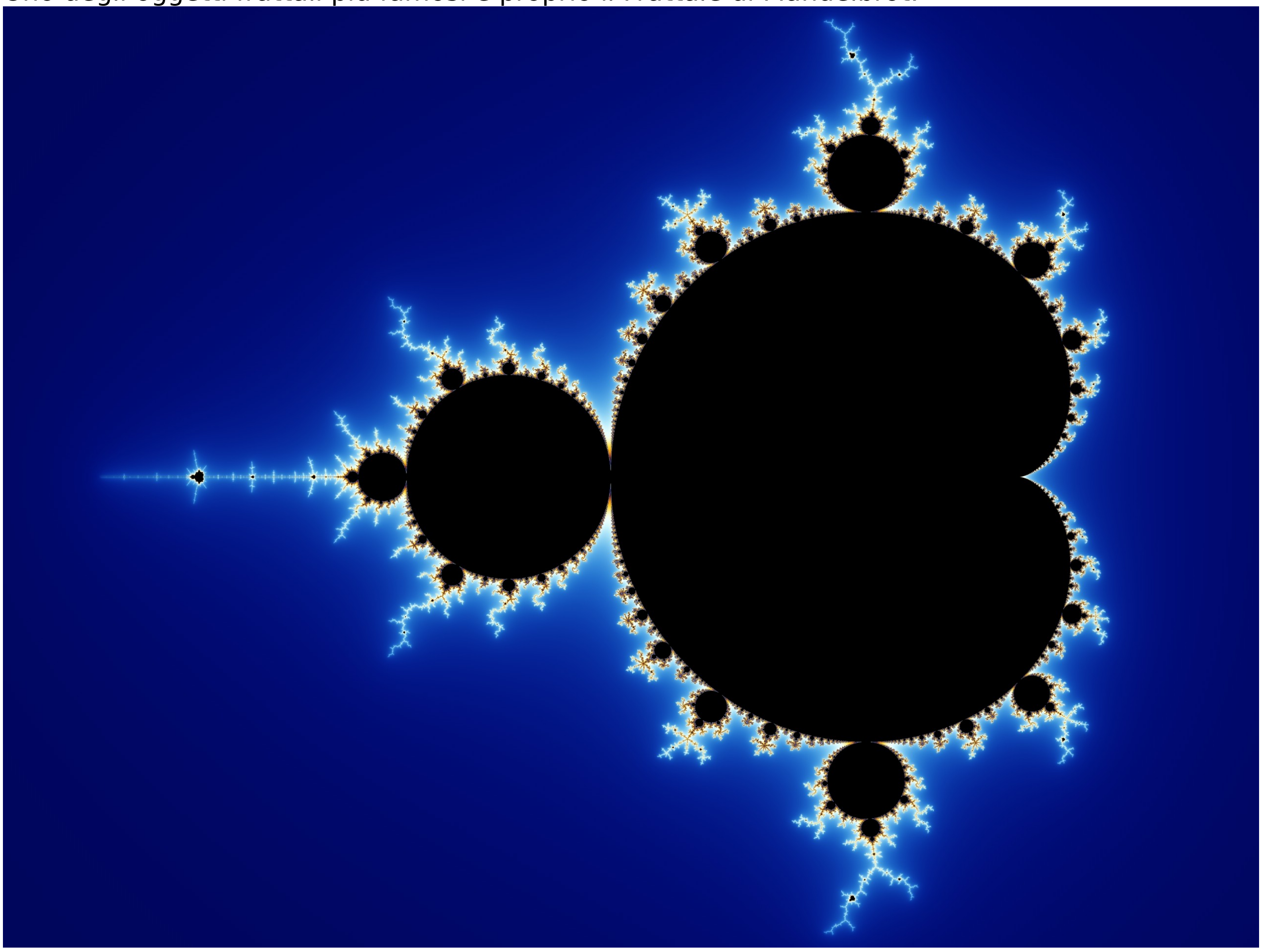
Secondo Mandelbrot, le relazioni fra frattali e natura sono più profonde di quanto si creda.

« ***Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano delle corrispondenze con la struttura della mente umana, è per questo che la gente li trova così familiari. Questa familiarità è ancora un mistero e più si approfondisce l'argomento più il mistero aumenta*** »
(Benoit Mandelbrot)





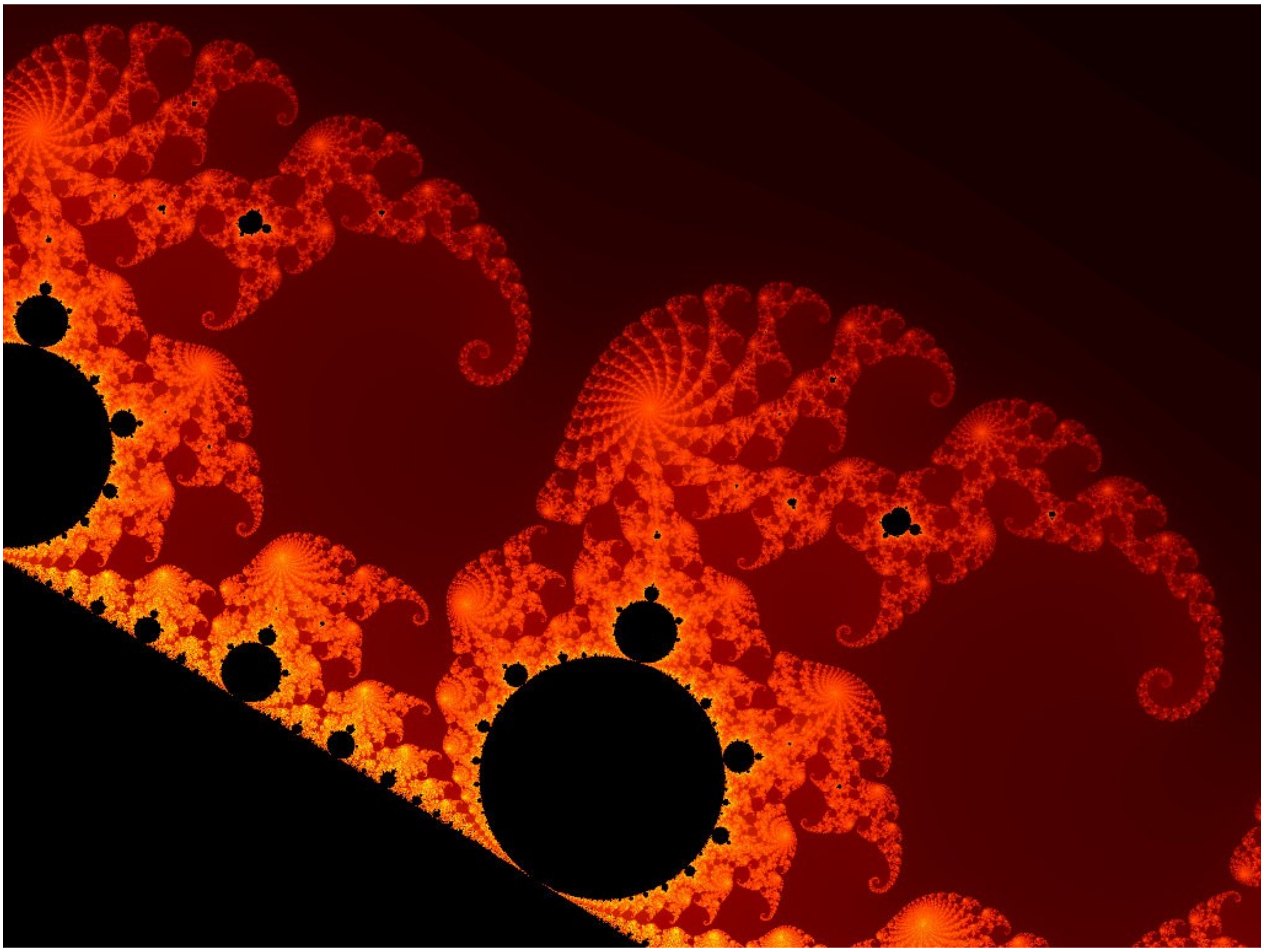
Uno degli oggetti frattali più famosi è proprio il Frattale di Mandelbrot:



I frattali compaiono spesso nello studio dei sistemi dinamici, nella definizione di curve o insiemi e nella teoria del caos, e sono spesso descritti in modo ricorsivo da algoritmi molto semplici, scritte con l'ausilio dei numeri complessi. Ad esempio l'equazione che descrive l'insieme di Mandelbrot qui rappresentato è la seguente:

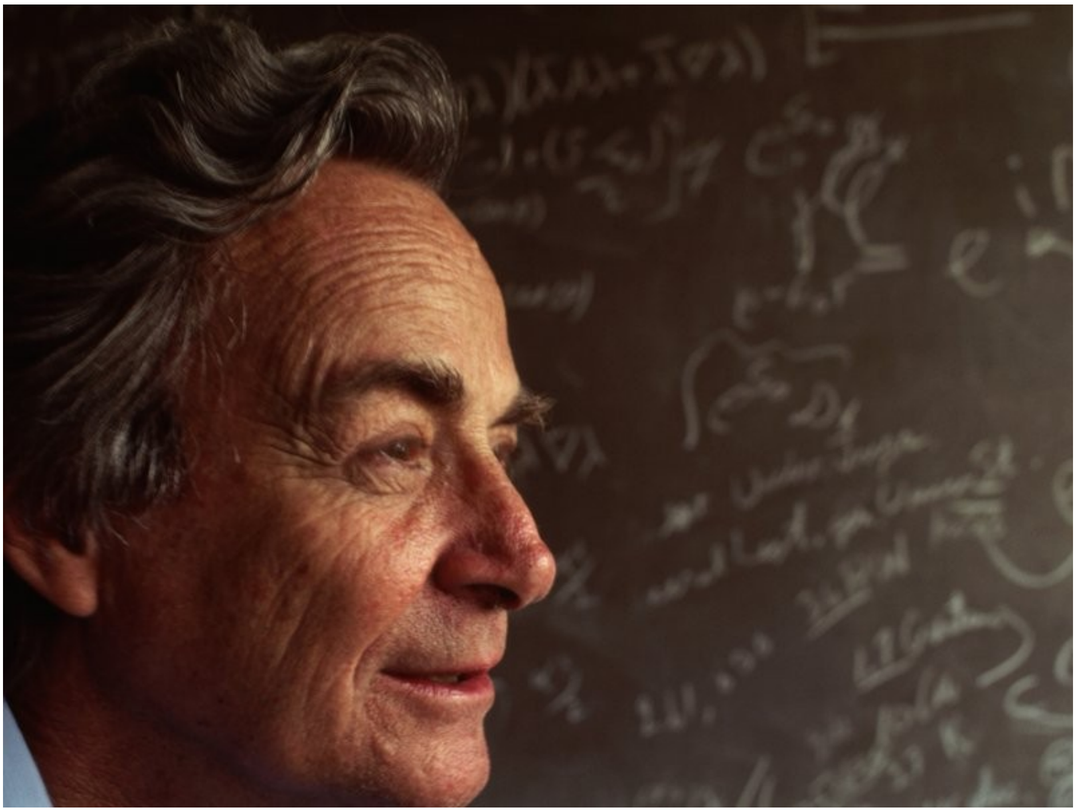
$$a_{n+1} = a^2_n + P_0$$

dove a_n e P_0 sono numeri complessi.



I numeri complessi sono usati in tutti i campi della matematica, in molti campi della fisica (e notoriamente in meccanica quantistica), nonché in ingegneria, specialmente in elettronica/telecomunicazioni o elettrotecnica, per la loro utilità nel rappresentare onde elettromagnetiche e correnti elettriche ad andamento temporale sinusoidale.

Somewhere, something incredible is waiting to be known.



Do not keep saying to yourself, if you can possibly avoid it, '*But how can it be like that?*' because you will get down the drain into a blind alley from which nobody has yet escaped.