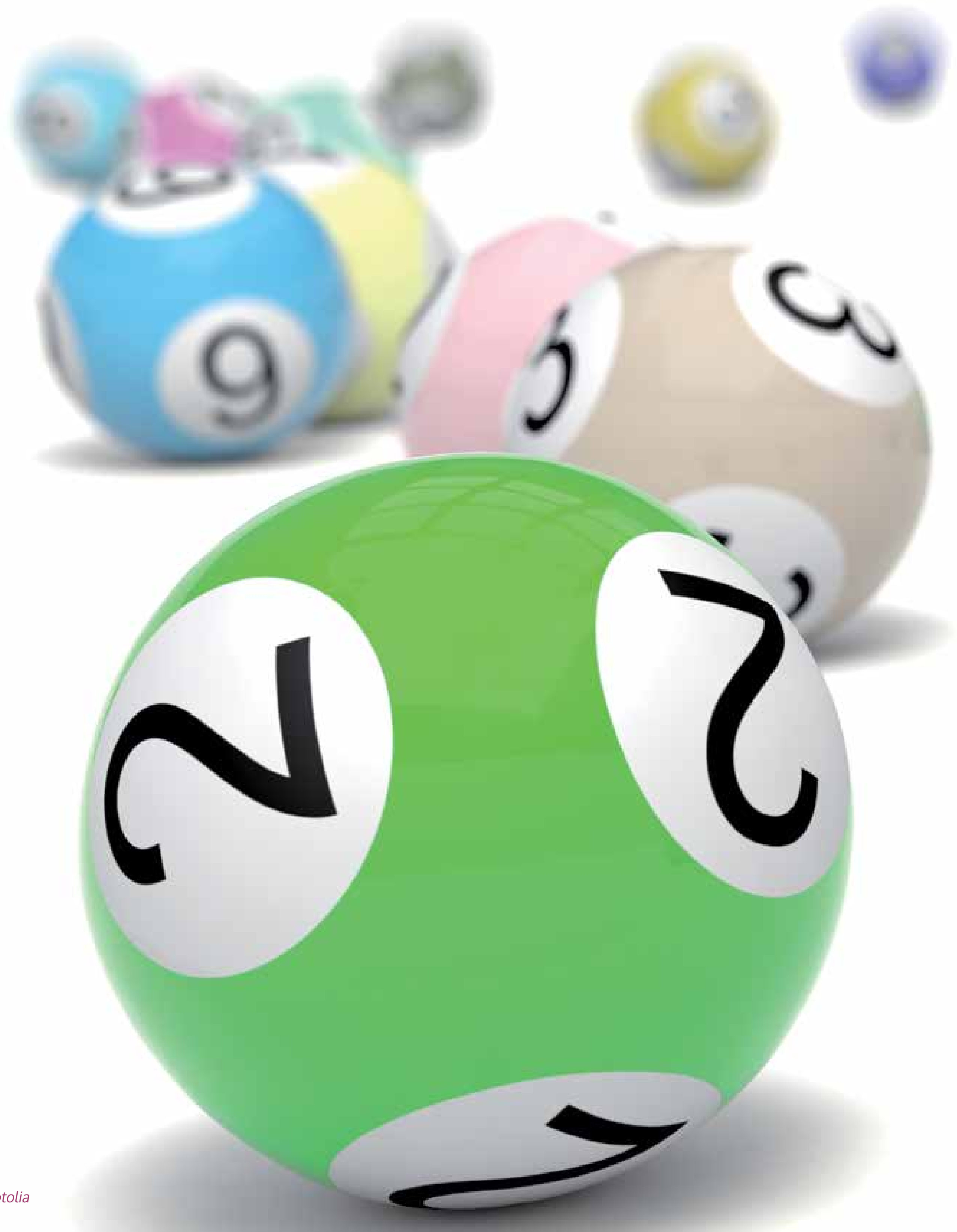


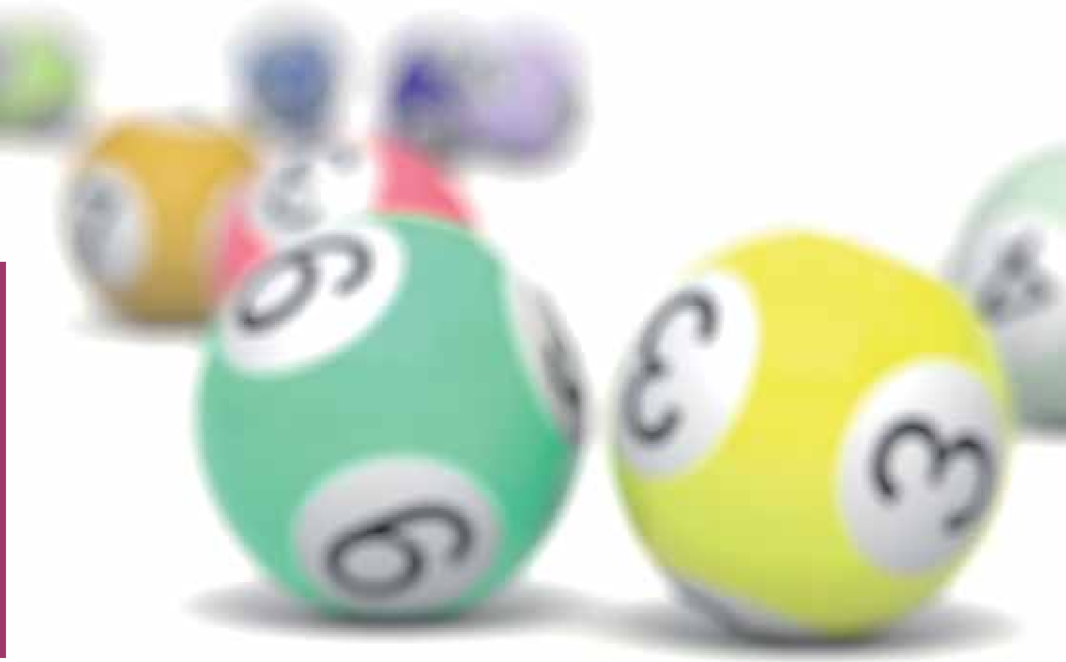
© Fotolia

Lettera Matematica (ottobre 2017) 102:32-38
DOI 10.1007/s10031-017-0040-8 © Egea 2017

La congettura DEI PRIMI GEMELLI

E ALTRE **curiosità** SUI **numeri primi**

di Renato Betti



Renato Betti ✉
renato.betti@polimi.it
Politecnico di Milano

È stato docente di Geometria al Politecnico di Milano. La sua attività scientifica riguarda la teoria delle categorie e le sue applicazioni all'Algebra e alla Geometria. È condirettore di Lettera Matematica PRISTEM e membro dell'Accademia Nazionale Virgiliana.

Fin dai primi anni di scuola si studiano le operazioni fondamentali dell'Aritmetica: somma e prodotto. Poi, quando si incontrano i numeri primi, si scopre la strana e magica sensazione di una successione di interi così facile da definire e così difficile da vedere nel suo sviluppo interno, dall'uno all'altro membro, almeno se si va a esaminare un po' più avanti la sequenza. Chi di noi non ha provato a trovare qualche regolarità, una legge, un criterio? Chi non è rimasto affascinato da una strana e imprevista proprietà? Forse perché i numeri primi sono specificati nei termini di ciò che non sono: fattorizzabili in interi più piccoli. Forse perché spesso presentano delicati caratteri additivi pur essendo definiti da una condizione moltiplicativa.

Elusivi e intriganti, i numeri primi ci mostrano numerose facce, molte delle quali si intuiscono ma... sono ancora da dimostrare. Sono solo congetture. Certo, ce ne sono di importanti e decisive, che gli specialisti inseguono da più di un secolo, come la famosa "ipotesi di Riemann", situata con apparente noncuranza all'interno dell'unico "articoletto" – così detto per la sua lunghezza limitata – "Sul numero di primi minori di una data grandezza" [1], dedicato alla Teoria dei numeri e presto diventato uno dei maggiori contributi alla materia: mi sembra che valga questa proprietà – scrive il grande matematico nel 1859 – ma ora non ho tempo di verificarla, e si dedica a proseguire l'argomento relativo a una descrizione accurata proprio della successione dei numeri primi, cosa che comporta notevoli implicazioni non solo per la Teoria dei numeri ma per tutta la Matematica e la Fisica. Da allora, generazioni di matematici si affrettano a cercarne la dimostrazione.

L'ipotesi di Riemann è ormai la chiave di volta della Teoria dei numeri e della sua storia, e il famoso elenco dei ventitre "problemi per il nuovo secolo" posti da Hilbert all'inizio del '900, con la sua accurata predizione, ne è la migliore prova. Oggi, dei problemi di Hilbert, pochi rimangono aperti, considerati troppo generali o di carattere più "retorico" che matematico, e l'ipotesi di Riemann resta incontrastata, tanto da aver avuto la promozione a "problema del nuovo millennio" da parte dell'Istituto Matematico Clay il quale, per di più – segno dei nuovi tempi anche per i matematici – ha disposto il premio di un milione di dollari per chi riuscirà a dimostrare che sia vera o – come gli esperti giudicano altamente improbabile – falsa.
Qui non voglio certamente affrontare questo tema, per il quale sono necessari altri strumenti ed altre competenze. Restiamo nell'ambito della tranquilla teoria elementare, dove si colgono i bagliori delle mirabolanti virtù dei numeri primi pur rimanendo al riparo del consueto linguaggio dell'Aritmetica. Dove le congetture proposte sembrano delle semplici curiosità che permettono di gettare uno sguardo sull'intricata struttura complessiva ma, nella loro apparente semplicità, riservano ugualmente notevoli sorprese.
Uno dei più noti problemi irrisolti sui numeri primi riguarda le coppie di "gemelli" [2], vale a dire di numeri primi p_n e p_{n+1} la cui differenza è minima: $p_{n+1} - p_n = 2$.
È facile dimostrare che tutti i primi gemelli, con l'eccezione della prima coppia (3,5), sono del tipo $6k \pm 1$. Infatti, un numero dispari p ha resto dispari quando viene diviso per 6 e, se è primo, il resto non può essere 3 perché altrimenti il numero sarebbe divisibile per 3. Dunque deve valere $p \equiv \pm 1 \ (mod\ 6)$ e, se p e $p+2$ sono primi, non possono che essere del tipo $6k - 1$ e $6k + 1$.
Questa è una prima proprietà molto semplice. Ma non basta per avere un'idea dell'andamento delle coppie di primi gemelli e allora, oggi che è possibile, si ricorre a metodi euristici: alla computazione automatica. Le prime coppie si trovano subito:

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19) .... (101, 103), (107, 109) ...

tanto da far ritenere a qualcuno che sia difficile pensare che gli antichi Greci, così attenti alle proprietà mistiche e magiche dei numeri, non le avessero messe in luce. Eppure nessuno ne parla e – a quanto sembra – nella letteratura scientifica, un esplicito riferimento iniziale ai primi gemelli appare soltanto, e in termini più generali, in un articolo del 1849 da parte di Alphonse de Polignac [3], matematico francese rimasto noto soprattutto per la congettura che porta il suo nome:

Congettura di de Polignac. *Per ogni numero $k > 0$, esistono infinite coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza è $2k$.*

Se $k = 1$, la congettura sostiene dunque che esistano infinite coppie di primi gemelli e, se fosse falsa, con essa cadrebbe tutto l'impianto avanzato da de Polignac. Il risultato che – in qualche senso – sembra più vicino all'enunciato della congettura è arrivato molto più tardi, da parte del matematico cinese Jing-Run Chen:

Teorema di Chen. *Se k è un numero positivo qualsiasi, esistono infiniti primi p tali che $p + 2k$ sia primo o semiprimo, vale dire prodotto di al più due numeri primi* [4].

Vale la pena di segnalare che, nello stesso articolo e con metodi simili, Chen si avvicina anche alla famosa "congettura di Goldbach", dimostrando che ogni numero pari "abbastanza grande" è la somma di due primi oppure di un primo e di un semiprimo. Il valore da cui decorre questa proprietà è solo stimato ad un numero incredibilmente alto.
Ma torniamo ai primi gemelli. Effettivamente, per gli antichi non doveva essere facile avere un'idea di ciò che avviene più avanti nella sequenza dei numeri e solo oggi, grazie alle potenzialità del calcolo automatico, siamo in grado di trovare coppie di primi gemelli molto alte. Ad esempio, quanto tempo occorre per riconoscere con carta e penna – e vi concedo anche una calcolatrice tascabile – le coppie superiori a 10^9 (un miliardo)? Eccone alcune:

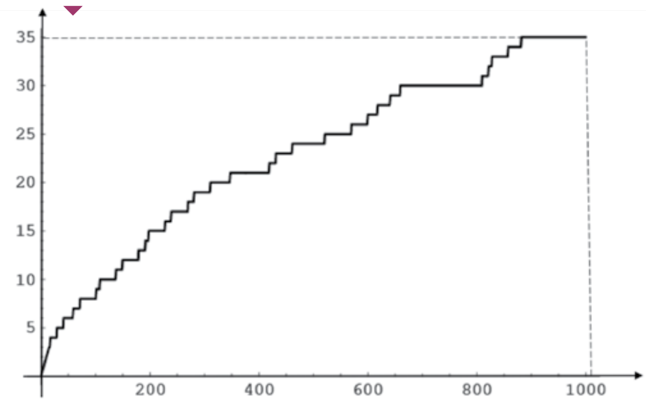
(1.000.000.007, 1.000.000.009)
(1.000.000.409, 1.000.000.411)
...
(1.000.001.801, 1.000.001.803)

Per non parlare del record da poco ottenuto (settembre 2016): la più grande coppia di primi gemelli, a tuttora, è data da:

$$2.996.863.034.895 \cdot 2^{129.000} \pm 1$$

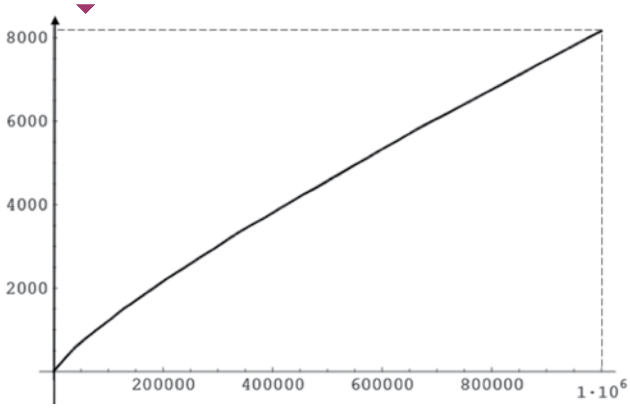
due numeri che hanno la bellezza di 388.342 cifre [5]!
Difficile, a questo punto, non credere che la congettura dei primi gemelli sia vera, come sembrano confermare non solo i valori trovati ma anche l'andamento della funzione $\pi_2(n)$ che ne tiene conto: $\pi_2(n)$ denota il numero di coppie di primi gemelli il cui termine minore è $\leq n$. Ecco il suo comportamento quando n è ancora piccolo ($1 \leq n \leq 1.000$):

Fig. 1. La funzione $\pi_2(n)$ per $0 < n < 1000$



Si ha $\pi_2(1.000) = 35$ e, a guardare il grafico, si può ancora avere la tentazione di pensare che, a un certo punto, la funzione diventi piatta. Ma poi, quando si considera come varia $\pi_2(n)$ su scala più ampia, i dubbi cominciano a vacillare:

Fig. 2. *La funzione $\pi_6(n)$ per $0 < n < 10^{16}$*



Qui $\pi_2(10^6) = 8169$, e la crescita è regolare, con questo andamento, fino al massimo calcolato finora (per quel che ne sappiamo) per $n = (10^{16})$. Per la precisione [6]:

$$\pi_2(10^{16}) = 10.304.195.697.298$$

A questo punto, si rafforza la convinzione empirica che la congettura dei primi gemelli sia valida. Ma la dimostrazione manca. E non si può mai sapere con numeri tanto grandi: basta ricordare qualche sorprendente caso storico, ad esempio il confronto fra la funzione $\pi(n)$, che conta il numero di primi minori di n, e la funzione

$$Li(n) = \int_2^n \frac{dt}{\ln t}$$

ipotizzata da Gauss come sua stima ottimale (fatto vero e dimostrato nel 1896, indipendentemente, da de la Vallée-Poussin e da Hadamard nel celebrato Teorema dei numeri primi).
Ebbene, l'evidenza numerica ha sempre suggerito la disuguaglianza $\pi(n) < Li(n)$ – lo stesso Gauss ne era convinto – finché, con la sorpresa di tutti, nel 1914 Littlewood dimostra che la disuguaglianza cambia segno infinite volte, e nel 1933 il suo allievo Skewes fissa per questo evento un limite superiore che in seguito è stato ridotto: grazie a una potente computazione numerica, nel 1966 Lehman ha dimostrato che il fenomeno avviene sicuramente per numeri che hanno 1166 cifre decimali [7]. Forse, nel frattempo, si è ottenuto un limite più preciso: in ogni caso non inferiore a 10^{19}, come ha dimostrato Jan Buthe [8] nel 2015. Il comportamento "ad alta quota" sfugge spesso alle considerazioni terrene.
Ma non solo il lavoro con numeri tanto grandi da eludere la computazione automatica lascia dei dubbi sulla congettura. C'è anche un fatto preciso che li alimenta in quanto esprime chiaramente che le coppie di primi gemelli si diradano velocemente: nel 1919, come conseguenza del teorema dei numeri primi, il matematico norvegese Viggo Brun dimostra che la somma, eventualmente infinita, degli inversi dei primi gemelli è finita:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots = B$$

Per la precisione, il valore B, che oggi giustamente chiamiamo "costante di Brun", è stato stimato euristicamente: $B = 1{,}9021605778\ldots$ [9] Che bellezza! Non sappiamo se la somma ha un numero finito o infinito di addendi, eppure riusciamo a dire che è un numero finito e – nell'ambito della precisione consentita dal computer – siamo perfino capaci di approssimarne dieci cifre decimali!
Si può pensare che, in fondo, le coppie di gemelli diventino sempre più rare e quindi è naturale che la serie dei loro inversi sia convergente. Sì, ma questo fatto induce a fare un confronto con la serie degli inversi di tutti i numeri primi, per i quali è noto che anch'essi diventano sempre più rari eppure fin dal tempo di Eulero sappiamo che si tratta di una serie divergente:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty$$

E il problema rimane. Recentemente, dopo tanto tempo di stasi per quanto riguarda la congettura dei primi gemelli, c'è un fatto nuovo e interessante, sia per il risultato in sé che per il metodo con il quale è stato ottenuto. Del metodo – collaborazione on line, aperta a tutti – parliamo nel box di p. 9, il risultato lo riserviamo a dopo, allo scopo di divagare un po' sulla congettura di de Polignac: i frutti hanno un sapore diverso quando si conosce l'albero da cui provengono. Innanzi tutto guardiamo a qualche altro valore della congettura. Cosa accade per $k = 2$? E per $k = 3$? In altri termini, quante coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza è 4 – detti banalmente "primi cugini" – come (7, 11), (13, 17) o (19, 23), esistono? E se la differenza è 6 – detti ancor più banalmente "primi sexy", con un gioco di parole poco originale su sex = 6 – ad esempio (23, 29), (31, 37)?

"SI PUÒ PENSARE CHE, IN FONDO, LE COPPIE DI GEMELLI DIVENTINO SEMPRE PIÙ RARE E QUINDI È NATURALE CHE LA SERIE DEI LORO INVERSI SIA CONVERGENTE"

Anche in questi casi la congettura di de Polignac resiste e gli sforzi si concentrano sui risultati che si possono ottenere a computer. Si calcolano dunque anche i valori di $\pi_4(n)$ = numero di coppie di primi cugini $\leq n$, e $\pi_6(n)$ = numero di coppie sexy $\leq n$, per scoprire che i gemelli e i cugini sembrano avere la stessa "densità asintotica" all'interno di tutti i numeri primi, nel senso che, per i calcoli che si riescono a fare, le due funzioni hanno lo stesso comportamento al crescere di n. Ma i sexy sono molti di più e si stima che crescano il doppio dei precedenti, come si vede direttamente, almeno per quanto riguarda i valori di n abbastanza piccoli. Ecco il confronto [10] fino a $n = 10^6$, dove la curva superiore indica le coppie sexy, mentre in quella inferiore, a questa scala, si confondono le coppie di gemelli e di cugini:

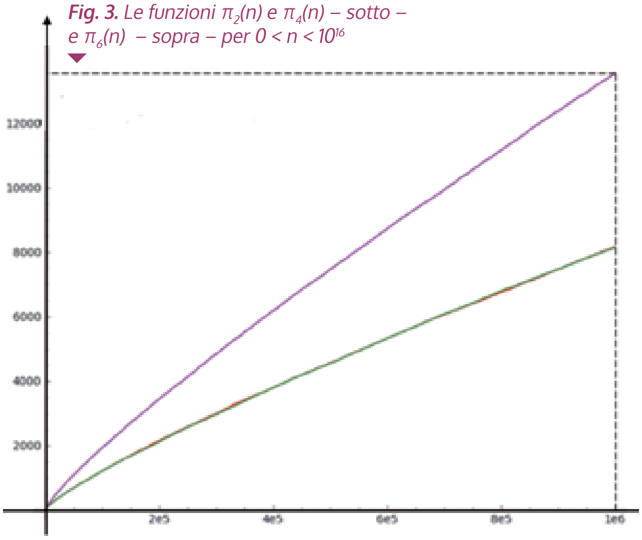


Fig. 3. *Le funzioni $\pi_2(n)$ e $\pi_4(n)$ – sotto – e $\pi_6(n)$ – sopra – per $0 < n < 10^{16}$*

Qualche ricercatore considera che due numeri primi siano cugini, oppure sexy, anche se non sono consecutivi. Ad esempio riguarda come cugini 3 e 7, che hanno il comune gemello 5, mettendo a grave repentaglio le strutture della parentela, o addirittura ritiene che la coppia (5,11) sia sexy, con imbarazzo di 7, gemello di 5 e cugino di 11. E i calcoli abbondano: si scopre che, a tutto il 2005, i primi cugini e i primi sexy più grandi, sono numeri con 10.154 cifre [11] e si definisce un analogo della costante di Brun per i primi cugini:

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{37}+\frac{1}{41}\right)+\cdots=B_4$$

il cui valore viene stimato, usando i termini fino a 2^{42}, in B_4 = 1,1970449 ....

Altri casi sono esaminati e si scoprono con una certa sorpresa. Le coppie (relative a $k = 5$) non sono poche quanto si potrebbe pensare:

(3, 13), (7, 17), (13, 23), (19, 29), (31, 41), (37, 47) ...

"Con le terne di primi sexy, cominciamo a entrare in un vasto ambiente"

Ce ne sono infinite? Ciascuno vada a cercare, se ne esistono maggiori di 1000 [12]. Ma la congettura di de Polignac si può anche generalizzare: è noto che i matematici sono molto sensibili a questo tipo di attività. Si ottiene in tal modo tutta una serie di ipotesi dovute ad Hardy e Littlewood e risalenti agli anni '20 del '900, che qui non è il caso di analizzare. Ma vale la pena di seguire – per un po' ancora – una semplice estensione della congettura di de Polignac: perché limitarsi a due primi alla volta? Che ne è delle terne di primi consecutivi a distanza $2k$ l'uno dall'altro? E delle quaterne? e così via. E perché non ammettere anche k-ple di numeri primi a distanza diversa fra due consecutivi, come ad esempio nel caso (11, 13, 17), (41, 43, 47) oppure (101, 103, 107) – che hanno tutte la stessa cifra terminale [13]?

Con le terne di primi sexy, cominciamo a entrare in un vasto ambiente, a partire da (31, 37, 43), per scoprire che due generazioni, all'inizio e alla fine del secolo scorso, sono incappate in terne sexy: (1901, 1907, 1913) e (1987, 1993, 1999) – non ce ne sono altre in quel secolo. Niente di paragonabile comunque a quanto è avvenuto nel '700 con una quaterna sexy di anni: (1741, 1747, 1753, 1759).

Ma procediamo con maggiore ordine. Quanto ai primi gemelli, si scopre subito la terna (3,5,7) e si capisce che non ce ne possono essere altre in quanto ogni tre numeri uno è divisibile per 3. La stessa considerazione vale per la terna di cugini (3,7,11) e per la quintupla di numeri sexy (5, 11, 17, 23, 29), giacché ogni cinque numeri se ne ha sempre uno divisibile per 5: come si vede dalla famiglia dei resti modulo 5 (che si trovano sulle righe della seguente tabella 1, per $p > 5$):

p	$p+6$	$p+12$	$p+18$	$p+24$
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Tabella 1

Si arriva così a una condizione necessaria per costruire le k-ple di numeri primi: la famiglia di interi pari $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1}$ (come 6, 12, 18 e 24 nell'esempio appena fatto) viene detta "ammissibile" se non contiene tutti i resti della divisione per p, quale che sia il numero primo p. In particolare, basta ve-

NUOVE FORME DI RICERCA MATEMATICA?

Negli ultimi tempi, grazie soprattutto agli strumenti del calcolo automatico, alla posta elettronica ecc., la ricerca matematica si svolge sempre più in collaborazione. È facile, e a volte anche piacevole, comunicare le proprie idee ai colleghi, chiedere un suggerimento e scoprire magari contributi imprevisti e inaspettati. Quanto si può estendere questa forma di collaborazione e quanto può essere pianificata?

Certamente, conosciamo tutti le vicende di Bourbaki, vale a dire di un gruppo di persone che decide di lavorare insieme alla rifondazione dei principi e degli strumenti della Matematica, oppure l'avventura che nel secolo scorso ha portato alla classificazione dei gruppi semplici finiti attraverso la collaborazione di numerosi matematici. Per non parlare delle ricerche che prevedono l'uso massiccio e ben coordinato di una cospicua rete di calcolatori, ad esempio relative ai numeri – primi, gemelli ecc. come quelli di cui si parla nell'articolo – oppure tese alla decrittazione di sistemi crittografici complessi.

Non si può non riconoscere che anche nei casi più sorprendenti il problema si può suddividere in maniera naturale in un certo numero di sottoproblemi, magari numeroso, ma che sottende una organizzazione "gerarchica" abbastanza precisa. Nel 2009, il matematico (Medaglia Fields nel 1998) Timothy Gowers ha proposto il nuovo modello di un *forum* aperto a tutti: non per fare utili e belle discussioni – sì anche per questo – ma soprattutto per affrontare definiti problemi di ricerca matematica privi di questo carattere strutturale [1]. E la proposta ha avuto un inaspettato successo.

Il primo progetto, consistente nella ricerca della dimostrazione elementare di un risultato combinatorio noto ma di difficile comprensione – il teorema di Hales e Jewett – ha dichiarato vittoria dopo poche settimane grazie alla collaborazione di dozzine di matematici, anche dottorandi. Successivi progetti hanno avuto vari gradi di riuscita, a volte con risultati parziali, ma talvolta eccellenti, come nel caso del progetto n. 8 relativo al tentativo di migliorare il risultato di Zhang sulla differenza fra numeri primi consecutivi [2]. L'idea è che chiunque abbia qualcosa da dire sul problema non si faccia scrupolo a partecipare. Naturalmente avendo cura di esprimere i propri commenti – qualunque sia la forma che assumono – in un tempo ragionevole ed in termini contenuti, perché lo scopo non è quello di compilare un articolo lungo e dettagliato ma di ottenere contributi effettivi. Il progetto stesso solleva numerose questioni, ad esempio relative all'attribuzione del risultato e degli articoli a cui dà luogo, al credito da assegnare a chi ha partecipato solo parzialmente e così via. Per ora, la soluzione provvisoria è quella di firmare gli articoli con lo pseudonimo D.H.J. Polymath e conservarne l'intera storia in modo che risulti chiaro il contributo di ciascuno (il "nome" D.H.J. deriva dal progetto iniziale, Polymath n. 1, relativo alla "densità" di cui parla il teorema di Hales e Jewett).

Ma la vera sfida – mi sembra – è quella dell'organizzazione del lavoro, a partire da un problema che "si presta" ad essere elaborato collettivamente, per comprendere l'azione di un moderatore e dei metodi utili a distinguere fin dall'inizio i contributi validi da quelli inutili o addirittura di intralcio intenzionale. Insomma, l'organizzazione di un'autentica ricerca collettiva [3].

Per ora sembra che non ci siano stati troppi problemi, anche grazie al fatto che il filtraggio dei diversi apporti è avvenuto da parte di matematici di grande prestigio. I vantaggi di questo approccio alla ricerca sono evidenti. Con le parole di chi l'ha proposto: "Se un gruppo di matematici è in grado di connettere le proprie intelligenze in maniera efficiente, sarà anche capace di risolvere i problemi in maniera efficiente".

Poche sono per ora le analisi di questo tentativo originale. Mi limito a segnalare l'articolo [4].

[1] Si veda l'articolo di W.T. Gowers e M. Nielsen, "Massively collaborative mathematics", su *Nature*, 15 ottobre 2009, disponibile on line all'indirizzo http://www.nature.com/nature/journal/v461/n7266/full/461879a.html.

[2] In D.H.J. Polymath, *The "bounded gaps between primes" Polymath project – a retrospective* (disponibile all'indirizzo: https://arxiv.org/pdf/1409.8361v1.pdf) sono raccolte le testimonianze di numerosi ricercatori che hanno partecipato al progetto.

[3] Il testo iniziale dell'avventura (https://gowers.wordpress.com/2009/01/27/is-massively-collaborative-mathematics-possible/) contiene una serie di raccomandazioni in questo senso, allo scopo di favorire la collaborazione e facilitare il lavoro di chi ne tira le fila.

[4] J. Cranshaw e A. Kittur, "The Polymath Project: Lessons from a Successful Online Collaboration in Mathematics", *Proc. SIGCHI Conf. on Human Factors in Computing Systems*, ACM (2011), pp. 1865-74, disponibile in rete all'indirizzo: http://www.cs.cmu.edu/~jcransh/papers/cranshaw_kittur.pdf.

NOTE

[1] *"Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse"*, Monatsberichte der Berliner Akademie, 671-680 (1859).

[2] Secondo H. Tietze, *Famous Problems of Mathematics: Solved and Unsolved Mathematics Problems from Antiquity to Modern Times*, Graylock Press (1965), il termine "primi gemelli" è stato coniato da Paul Stäckel nel 1916.

[3] *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, Comptes Rendus Paris 29, 400 e *Rectification*, 738-39 (1849). Vale la pena di segnalare che su https://books.google.fr/books?id=O6EKAAAAYAAJ&hl=it si trova un pamphlet di de Polignac con lo stesso titolo, *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, Bachelier 1851.

[4] J.R. Chen, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16 (1973), pp. 157-176.

[5] Si veda: http://www.primegrid.com/forum_thread.php?id=7021.

[6] X. Gourdon, P. Sebah, *Introduction to Twin Primes and Brun's constant* (2002), on line: numbers.computation.free.fr/Constants/Primes/twin.html.

[7] J.H. Coway, R.K. Guy, *The book of numbers*, Springer 1966, p. 145.

[8] J. Büthe, *An analytic method for bounding* $\psi(x)$, arXiv:1511.02032.

[9] T. Nicely, *Enumeration to* 10^{14} *of the twin primes and Brun's constant*, Virginia J. of Science, 46:3 (1996), pp. 195-204, on line: http://www.trnicely.net/twins/twins.html. Inoltre: T. Nicely, *A new error analysis of Brun's constant*, Virginia J. of Science 52:1 (2001), pp. 45-55, on line: http://www.trnicely.net/twins/twins4.html.

[10] Su questi argomenti vale la pena di segnalare gli articoli della serie *Des jumeaux dans la famille des nombres premiers* I, II e III, di Bruno Martin, rispettivamente del 20 marzo 2015, 21 giugno 2015 e 21 settembre 2015, disponibili a http://images.math.cnrs.fr/?lang=fr.

[11] Calcolo attribuito a T. Alm, M. Fleuren, and J. K. Andersen da http://mathworld.wolfram.com/CousinPrimes.html e da http://mathworld.wolfram.com/SexyPrimes.html.

[12] Risposta parziale: (1009,1019), (1021,1031), (1039,1049), (1051,1061), …

[13] C'è anche (1301, 1307, 1309). Ne esistono altri di tipo ($10n + 1$, $10n + 3$, $10n + 7$)?

[14] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics, 179, 3 (2014), 1121-1174. Si veda, on line: http://annals.math.princeton.edu/2014/179-3/p07.

[15] https://www.nature.com/news/first-proof-that-infinitely-many-prime-numbers-come-in-pairs-1.12989.

rificare che questo avvenga per tutti i primi $p \leq k$ in quanto i resti non possono essere più di $k - 1$ e bisogna tener conto del valore iniziale.

Gli esperti di teoria dei numeri, da buoni ottimisti, suppongono che, in assenza di simili ostruzioni banali, la condizione sia anche sufficiente e dunque esistano infinite k-ple di numeri primi:

Congettura. *Se* $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1}$ *è un insieme ammissibile di interi pari, esistono infiniti numeri primi p tali che* $p + a_1$, $p + a_2$, … , $p + a_{k-1}$ *siano tutti numeri primi.*

Di risultati precisi non se ne ha. Solo recentemente è stata dimostrata l'esistenza di un limite superiore N per il quale esistono infinite coppie p_n e p_{n+1} di numeri primi consecutivi tali che $p_{n+1} - p_n \leq N$. Ed è anche stato calcolato un possibile valore di N, precisamente N = 70.000.000. Una versione – per così dire – "debole" della congettura dei primi gemelli: esistono infinite coppie di primi consecutivi con la proprietà che la loro differenza sia 2, oppure 4, oppure 6 oppure … su, su fino a settanta milioni.

L'autore è il matematico cinese Yitang Zhang attivo negli Stati Uniti, in precedenza poco conosciuto per questo tipo di argomenti [14] e che ha lavorato nel più completo isolamento, innestando tecniche originali su lavori noti. Naturalmente, quando il risultato è stato annunciato, qualcuno ha sollevato dubbi sul fatto che fosse riuscito proprio là dove molti hanno fallito, ma il *referee* di *Annals of Mathematics*, la rivista a cui era stato chiesto di pubblicare l'articolo, è stato chiaro: "*Il risultato è eccezionale… e l'autore è riuscito a dimostrare un caposaldo nella distribuzione dei numeri primi*", riporta *Nature* nel 2013, ancor prima della pubblicazione [15].

Ne è seguito un grande fervore nel mondo degli specialisti. Certo, il limite N è molto alto, tuttavia il divario da 2 a 70.000.000 rappresenta un salto concettuale enorme rispetto alla differenza da 2 all'infinito conosciuta in precedenza. E poi l'esistenza di un limite superiore si potrà senz'altro migliorare, ha ammesso fin dall'inizio lo stesso Zhang, l'autore, magari grazie all'utilizzo del calcolo automatico. E così è stato, con l'aggiunta di un originale metodo di lavoro: una collaborazione intensiva per mezzo di un forum pubblico di discussione in Internet al quale hanno partecipato numerosi ricercatori.

L'avventura di questa pratica di collaborazione è relativamente nuova e apre tutta una serie di problemi e interrogativi: ne parliamo brevemente nel box a pagina precedente. Introdotta dal matematico Timothy Gowers nel 2009 sotto la sigla collettiva di Polymath per studiare altre problematiche, anche nel caso del limite superiore fra numeri primi consecutivi ha avuto presto eccellenti effetti: grazie a una serie di miglioramenti dei metodi originali e a nuove idee subentrate in seguito, questo progetto, definito Polymath n. 8, ha portato in pochi mesi ad abbassare il limite da 70.000.000 a 246.

Che numero strano! Difficile credere che sia la risposta definitiva: 246 non è certamente una specie di costante intera invalicabile, come il 4 per il grado delle equazioni algebriche risolvibili per radicali, come 17 per il numero dei gruppi di mosaici del piano o 26 per i gruppi semplici sporadici. Forse è il limite che si può ottenere con le tecniche attuali … aspettiamo. Per ora, in nessun modo si è riusciti a migliorarlo, anche se in fondo è passato poco tempo.

E dunque, ecco il risultato (a tuttora) conclusivo:

Esistono infiniti primi consecutivi la cui differenza non è maggiore di 246.