Lettera Matematica (giugno 2018) 105:17-21
DOI 10.1007/s10031-018-0012-7 © Egea 2018

Roberto Lucchetti ✉
roberto.lucchetti@polimi.it
Politecnico di Milano

Insegna Analisi matematica al Politecnico di Milano. È stato *visiting professor* in Francia, in Spagna, in Germania e in Olanda, negli Stati Uniti e in Canada, in Bulgaria, in Israele. È autore di una settantina di pubblicazioni scientifiche su riviste internazionali. Cura, quando gli capita, il blog *www.robertolucchetti.com*. Si occupa intensamente di divulgazione e fa parte della redazione di *Lettera Matematica PRISTEM*. I suoi ultimi libri sono: *Matematica al bar* (con G. Rosolini), Franco Angeli (2012), *Scacchi e Scimpanzé*, Bruno Mondadori (2012), e *Teoria dei giochi*, Bruno Mondadori (2013, solo in ebook) e È tutto un gioco (con G. Bernardi), Francesco Brioschi (2018).

TEORIA DEI GIOCHI: istruzioni per l'uso

(DAL MIO **punto di vista**, S'INTENDE)

di Roberto Lucchetti

La vita esiste perché esiste interazione. Ogni essere vivente è in contatto e interagisce con la realtà esterna per tutto il suo ciclo di vita; spesso in maniera totalmente inconsapevole dal punto di vista intellettivo, a volte invece con la consapevolezza delle conseguenze delle sue azioni. La teoria matematica che si occupa di interazioni è chiamata comunemente, con nome molto efficace, Teoria dei giochi: efficace in particolare perché il gioco è un bellissimo modello di interazione. La Teoria dei giochi ha applicazioni in ogni campo ed è anche un test molto prezioso per misurare l'efficacia di tanti metodi risolutivi per problemi complessi. La ragione è semplicissima. Un gioco ha spesso regole chiare, facili da capire, ma poi è terribilmente difficile da analizzare: in un corso anche avanzato di Teoria dei giochi se lo studente non ha a disposizione software specifici non può far conti che per giochi assolutamente banali, e magari questi conti non sono nemmeno troppo semplici. Calcolare le strategie miste per un gioco a due giocatori che hanno 3 strategie pure a disposizione ciascuno, ad esempio, è un calcolo lungo e noioso, nonostante il numero enormemente limitato delle azioni a disposizione dei giocatori. E se date un'occhiata al box di pagina 20 ci trovate una storia interessante sul gioco della dama. Al di là di questo aspetto, una domanda assolutamente importante da porsi di fronte a questa teoria tutto sommato dalle origini molto recenti è la seguente: che affidabilità ha una teoria matematica del genere? La domanda è importante perché se siamo tutti consapevoli che la Matematica nei suoi modelli ovviamente introduce molte semplificazioni, almeno in teorie non particolarmente sofisticate, siamo anche abituati al fatto che queste semplificazioni, se i modelli sono ben fatti, non portano a risultati impreve-

© Fotolia

dibili e magari disastrosi: errori di approssimazione e di semplificazione non impediscono di ottenere risultati straordinari; probabilmente nel modello che porta una sonda in giro per l'universo si introducono, per rendere trattabile il problema, varie approssimazioni, ma poi alla fine i risultati si ottengono. In Teoria dei giochi che cosa accade?
Stiamo parlando di una teoria che, almeno agli inizi, aveva soprattutto l'ambizione di descrivere scientificamente il comportamento dell'*uomo razionale*. Ora, si capisce subito che già la partenza è difficile, perché si tratta di dare una definizione, anche se non necessariamente formale, del concetto di razionalità. Ma questo non è che il primo, piccolissimo passo. Ce ne aspetta subito un altro, ben più arduo: una volta che abbiamo questa definizione, o almeno ce ne siamo fatti un'idea, quanto possiamo applicare i risultati ottenuti al mondo reale? Detto in altro modo: quando facciamo poi "giocare" le persone, queste si comportano nel modo prescritto dalla teoria oppure no, sono razionali oppure no? Almeno se si fanno esperimenti con giochi semplici, ci si può immaginare che fare le opportune verifiche non sia difficile... ma non è così.
Facciamo, o meglio immaginiamo, un esperimento immediato. Prendiamo due persone e diciamo, pubblicamente, a ciascuna di loro: "*Preferisci che dia 1 euro a te o 20 euro all'altro giocatore*"? Ora possiamo osservare diverse combinazioni: per esempio, entrambi potrebbero dire, "*dai 1 Euro a me*", oppure, al contrario, "*dai 20 euro all'altro*". Non è ovviamente escluso nemmeno il caso in cui uno dica "*voglio 1 euro per me*" e l'altro "*dai pure 20 euro all'altro*". La teoria, si presume, suggerisce quale sia l'esito razionale di un gioco come questo e quindi, se un esito è quello giusto, gli altri sono necessariamente sbagliati! Non è così semplice, purtroppo, o forse per fortuna.
Come potrebbe fare ad essere razionale una risposta che la teoria indica come sbagliata? Il problema, sottile e complicato, è di essere sicuri di quali siano davvero gli scopi dei giocatori, messi davanti a un gioco come quello descritto. In altri termini, che cosa davvero vogliono i due giocatori? La teoria, in maniera abbastanza naturale, presuppone che per ogni giocatore avere di più, in termini monetari, sia sempre meglio che avere meno. Ma posso essere certo che chi invece dice "*dai 20 euro all'altro*" stia facendo qualcosa di irrazionale? Per essere certo delle mie conclusioni, ottenute tramite la teoria, dovrei esserlo di come valutano le varie situazioni i giocatori.
In un gioco come questo, all'apparenza così semplice ma in realtà così interessante e sfidante (è una variante del più famoso tra tutti gli esempi della Teoria dei giochi, il dilemma del prigioniero), ci sono anche altri i fattori che possono condizionare le risposte di giocatori razionali: ad esempio, se essi sono intimamente convinti, anche in maniera non completamente conscia, che quel gioco sarà da loro giocato ripetutamente, ebbene risposte che non sono razionali nel gioco giocato una sola volta, lo possono diventare se il gioco è ripetuto.
Un altro esempio famoso e interessante va sotto il nome di *ultimatum game* e si può descrivere brevemente così: si dice al primo giocatore che ci sono 100 euro a disposizione e che lui ne deve offrire una quantità $x \geq 1$ al secondo giocatore: se questi accetta sarà dato x al secondo e il rimanente al primo, se il secondo non accetta nessuno dei due ottiene qualcosa.

"QUANTO È UTILE QUESTA MATEMATICA DI CUI NON È CHIARO QUANTO POSSIAMO FIDARCI?"

Questo gioco è stato testato su individui (pagati per giocare), che dovevano accettare o rifiutare l'offerta x e ai quali veniva fatta, durante il gioco, una risonanza magnetica al cervello, per vedere quali aree si attivavano. Ancora una volta, se avere più denaro è meglio che averne meno, l'offerta di x=1 dovrebbe essere accettata. Eppure questo non accade nella pratica, e forse non è un caso che, quando al secondo giocatore veniva detto che l'offerta era stata generata da un computer, allora la media delle offerte accettate diminuiva notevolmente. Che cosa determina il rifiuto di un x che sembra troppo basso? Evidentemente nella valutazione della persona entrano altri fattori, molto più imponderabili che non la mera valutazione economica e che rendono assai arbitrario concludere che il giocatore si comporta irrazionalmente.
Per riassumere tutto questo, e trascurando altri aspetti pur importanti, mi diverto spesso a dire che un conto è predire i movimenti di Giove, inteso come pianeta, un altro è fare previsioni su Giove, inteso come il dio dei romani: non possiamo aspettarci risultati della stessa affidabilità nei due casi.
Sorge allora spontanea una domanda davvero cruciale: quanto è utile questa Matematica di cui non è chiaro quanto possiamo fidarci? La questione è di non poco conto e non riguarda solo la Teoria dei giochi, perché anche altre discipline umane recentemente si sono messe a utilizzare Matematica in maniera massiccia, pensiamo alla Teoria delle scelte sociali o all'Economia, per non parlare di Medicina e Psicologia. Dunque, quanto affidabili sono queste teorie?
La Teoria dei giochi – questa è la mia idea – non è Matematica molto bella ma dalla limitata utilità pratica. È, al contrario, uno strumento potente, che però va utilizzato con estremo senso critico. Avrei orrore se in qualche crisi internazionale le decisioni venissero prese sulla base di modellini preconfezionati da esperti di Teoria dei giochi: le situazioni in ballo sono sempre molto complesse, hanno specificità che le rendono uniche, è facilissimo sbagliare qualche parametro incerto del problema per ottenere risposte che potrebbero a posteriori dimostrarsi sciagurate.
Però ci sono anche situazioni ben più standard, in cui le risposte potrebbe-

ro essere accettabili. Se devo stabilire come ripartire certe spese per la costruzione di un cosiddetto bene comune, utilizzare il valore Shapley è un'ottima idea. Inoltre, ci sono situazioni in cui un esperto di Teoria dei giochi può sicuramente aiutare a prendere decisioni sensate, per esempio nel caso di un'azienda che vuol partecipare a un'asta importante. *Aiutare* a prendere decisioni sensate, sottolineo, nessuno può garantire di vincere l'asta, anche se mi è successo che un'azienda mi abbia chiesto se fossi disposto ad aiutarli in una situazione simile – e fin qui se ne può discutere – finendo però poi inevitabilmente a un "*quindi con la sua consulenza è sicuro che vinciamo l'asta*"? A quel punto la mia risposta è stata che non mi risulta che i dieci uomini più ricchi al mondo siano esperti di Teoria dei giochi e la cosa è finita lì.
Ma il punto è un altro. Questa teoria non serve solo, se usata con giudizio, in particolari situazioni. Insegnando Teoria dei giochi, parlandone in tante occasioni, insomma continuando a rifletterci, mi sono convinto che questa Matematica ha un inestimabile valore, meno pratico di quello di risolvere qualche problema, ma certamente non meno prezioso: *porta chi la conosce a vedere le cose in maniera diversa dall'usuale*, e questo modo differente di guardare ai problemi può essere davvero prezioso.
Ecco un paio di esempi illuminanti.

"CI SONO SITUAZIONI IN CUI UN ESPERTO DI TEORIA DEI GIOCHI PUÒ SICURAMENTE AIUTARE A PRENDERE DECISIONI SENSATE, PER ESEMPIO NEL CASO DI UN'AZIENDA CHE VUOL PARTECIPARE A UN'ASTA IMPORTANTE. *AIUTARE*, SOTTOLINEO"

Quando un decisore razionale è di fronte a delle alternative, avere molte possibilità di scelta è una cosa ovviamente positiva. Se devo scegliere un paio di scarpe ed entro in un negozio in cui vado abitualmente, scoprire che il negozio ha acquisito una stanza contigua e quindi oltre alle scarpe che trovavo abitualmente ce ne sono altre di marche diverse, è una piacevole sorpresa: ho più possibilità di scelta, quindi alla fine sarò più soddisfatto (sto parlando di giocatori razionali). Matematicamente, sto dicendo molto banalmente che, data una funzione u, che rappresenta l'utilità che associo a ciascun tipo di scarpe, e dati due insiemi A e B, che rappresentano gli insiemi di scarpe da cui posso scegliere il mio paio, allora

GIULIA BERNARDI, ROBERTO LUCCHETTI

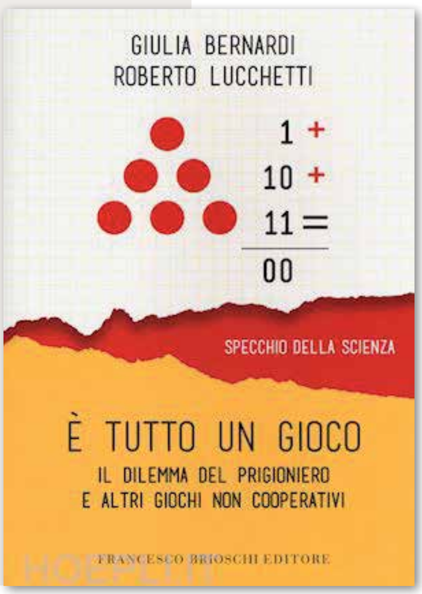
È TUTTO UN GIOCO

INTRODUZIONE AI GIOCHI NON COOPERATIVI

FRANCESCO BRIOSCHI EDITORE, MILANO, 2018

di Giulia Bernardi

Discutere con un amico su come passare la serata, decidere insieme al proprio compagno dove andare in vacanza, stabilire in quale punto della città aprire una nuova attività, collaborare con i colleghi o lavorare per conto proprio, sfidarsi a tris... Cos'hanno in comune queste situazioni? E cosa c'entrano con la Matematica?
Utilizzando il *gioco* come modello per le interazioni della vita quotidiana possiamo descrivere queste e molte altre situazioni, in cui la Matematica ci può aiutare a dare una spiegazione alle nostre scelte e a cercare quali siano le decisioni migliori che possiamo prendere.
In questo libro, in particolare, raccontiamo cos'è e di cosa si occupa la Teoria dei giochi non cooperativa, che si concentra sulle situazioni in cui i giocatori agiscono da soli, senza poter prendere accordi vincolanti tra di loro. Raccontiamo i risultati principali in questo ambito, partendo dal famoso dilemma del prigioniero, fino ad arrivare alle soluzioni di equilibrio di Nash e di equilibrio correlato che hanno portato Nash e Aumann a vincere un premio Nobel per l'Economia.
Attraverso numerosi esempi, il più possibile vicini alla nostra esperienza quotidiana, vogliamo guidare il lettore alla scoperta di questa giovane disciplina matematica, per iniziare ad affrontare la vita con occhi diversi, trasformando ogni problema in... gioco!



IL GIOCO È UN TEST?

Checkers is solved è il titolo di un lavoro apparso su *Science* (317, pp. 1518-1522) nell'anno 2007. Un calcolo fatto da chissà chi stima nel gioco della dama un numero approssimativo di 5×10^{20} posizioni possibili. È evidente che un gioco del genere non può essere analizzato nella sua interezza. Eppure si sa che giocatori razionali *otterrebbero sempre lo stesso risultato. In termini tecnici, si dice che il gioco ha* equilibrio in strategie pure e si sa anche che in caso di multipli equilibri (cosa che il teorema non esclude a priori) il risultato sarebbe comunque sempre lo stesso: questo dipende dal fatto che il gioco è a somma zero, supponendo di dare +1 a chi vince, -1 a chi perde e zero per il pareggio. La domanda però allora diventa: quale dei tre risultati possibili è quello vero? Il lavoro citato dimostra che il risultato corretto è il pareggio. Esattamente come nel tris, due giocatori razionali otterrebbero sempre il pareggio. Come si è arrivati a dimostrare questo risultato? La dimostrazione è davvero figlia dei nostri tempi, perché usa una tecnica mista: il problema viene matematicamente semplificato, poi viene affrontato con algoritmi potenti di calcolo, a loro volta basati su metodi tipici della teoria, in particolare il metodo di induzione a ritroso, che comunque può essere applicato a situazioni molto semplificate (per esempio una scacchiera con sopra un numero molto limitato di pedine). Il lavoro è il risultato di sforzi che duravano da almeno 20 anni: il gioco è stato un formidabile test per rendere sempre più sofisticati gli strumenti dell'intelligenza artificiale.

se $B \supset A$, si ha che il massimo di u su B è certamente non minore di quello su A, il che vuol dire che dal negozio non esco certo meno felice quando ho maggiori possibilità di scelta.
Consideriamo ora un gruppo di decisori razionali. Succederà la stessa cosa? La nostra intuizione, credo, sia quella di pensare: se sono razionali, sapranno comunque scegliere le alternative corrette, come può una maggiore possibilità di scelta portare a risultati peggiori? Vediamo un esempio interessante, che tratta il problema di traffico esemplificato in figura 1.

Ogni mattino alle 7 un certo numero di persone deve recarsi da Torino a Milano ed ha due strade alternative: passare dal paese Casate Nord oppure dal paese Casate Sud. Entrambi i percorsi prevedono una strada urbana, nella quale il tempo di percorrenza dipende dal traffico presente, e in minuti è N/100, dove N è il numero di persone che si trovano sulla strada, e un'autostrada, in cui il tempo di percorrenza è fisso, 50 minuti, perché regolato da un tutor. Supponiamo ora che le persone che viaggiano siano 4000. Quanto ci metteranno ad andare da Torino a Milano? Non c'è bisogno di sapere che cosa sia un equilibrio di Nash per convincersi che quel che succederà è che, data la perfetta simmetria dei due percorsi, una metà di automobilisti passerà da Casate Nord, l'altra da Casate Sud, con il risultato che ognuno impiegherà 20+50=70 minuti per il viaggio.
Ora supponiamo che gli efficientissimi sindaci di Casate decidano di rendere praticabile una strada larghissima che collega i due paesi, che sono molto vicini, per cui in cinque minuti si arrivi da un paese all'altro. Che succede ora? Un qualunque guidatore razionale si renderebbe conto che se prendesse l'autostrada per Casate Sud, ci impiegherebbe 50 minuti, mentre se passasse prima da Casate Nord per arrivare a Casate Sud ci metterebbe al più 45 minuti. Dunque per lui l'unica azione razionale sarebbe passare da Nord. Ovviamente tutti farebbero questo ragionamento, per cui alla fine il tempo di percorrenza delle persone diventerebbe di 85 minuti!
Che cosa è successo? Non è un caso che l'esempio precedente prenda il nome di *paradosso di Braess*: il paradosso sta nella difficoltà che ha la nostra mente ad accettare che in situazioni interattive, pur con agenti razionali, l'esistenza di alternative che alla fine portano a risultati negativi per tutti non può essere ignorata: i sindaci devono fare bene i loro conti prima di costruire una nuova strada!
Ecco un primo insegnamento importante della teoria: dare ai giocatori

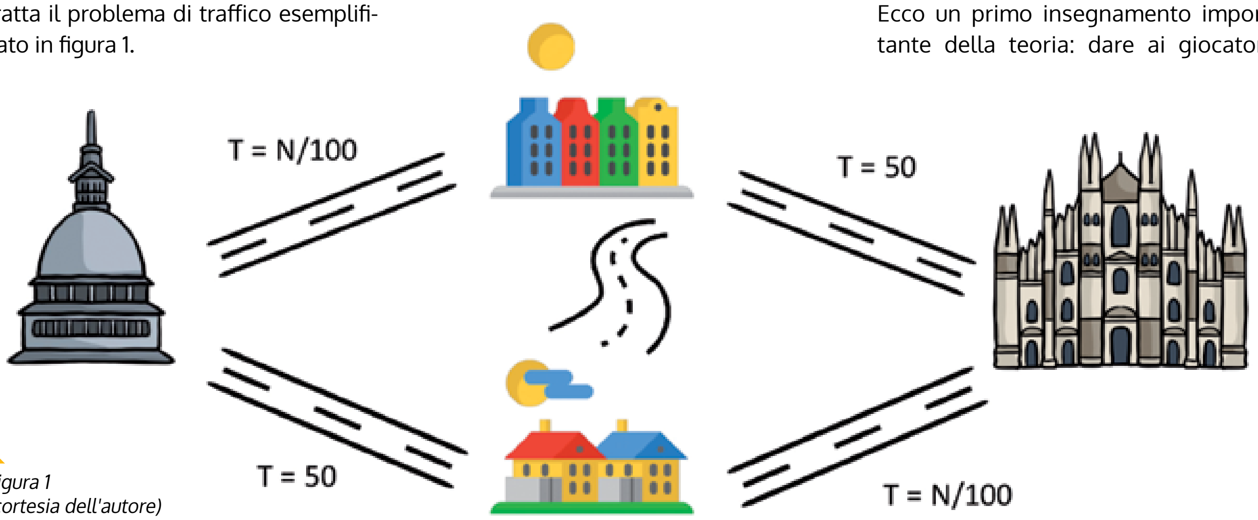


Figura 1
(cortesia dell'autore)

più possibilità di scelta può essere un danno per loro, anche se sono giocatori intelligenti!
C'è un altro esempio, secondo me bellissimo, di riflessione non ortodossa che un teorico dei giochi può fare e cercare di spiegare. Rimando per i dettagli al box successivo, qui dico solo che si tratta dell'idea di equilibrio *correlato*: i giocatori, che ricordiamo sono egoisti e razionali, decidono di accordarsi su una distribuzione di probabilità sugli esiti del gioco (questo ha senso farlo quando gli equilibri puri o non ci sono o sono poco interessanti). Poi fanno implementare un meccanismo casuale che seleziona un esito. C'è poi un mediatore, che può essere un computer programmato per l'occasione, che, sulla base dell'esito selezionato dall'evento casuale, dice a ciascun giocatore che cosa deve fare. Se la distribuzione di probabilità viene scelta saggiamente, i giocatori non hanno interesse a deviare dalla raccomandazione ricevuta (qualunque sia stata questa raccomandazione) e in più ottengono una utilità superiore rispetto all'equilibrio di Nash! Dove sta la bellezza del messaggio che questa idea porta con sé? Ci sono almeno due aspetti straordinari. Il primo: *anche in un mondo egoista una collaborazione limitata, razionale e conveniente per tutti, può essere possibile*; il secondo: *questa collaborazione è possibile soltanto a certe condizioni*. In questo caso i giocatori devono rinunciare ad avere delle informazioni: il meccanismo sta in piedi solo perché a ognuno viene detto quel che deve fare ma viene nascosto quel che sarà detto all'altro. Attenzione però: la scelta dei giocatori è consapevole, sono loro a scegliere la distribuzione di probabilità sugli esiti, sono loro che accettano il meccanismo.
Per concludere quindi, un'analisi lucida della situazione, pur partendo dall'assunto (assai ragionevole) che le persone fanno sostanzialmente gli interessi propri, mostra che si possono creare le basi di una collaborazione che possa portare vantaggi a tutti.

L'EQUILIBRIO CORRELATO

Consideriamo il gioco descritto dalla seguente tabella:

	Sinistra	Destra
Alto	(7,2)	(0,0)
Basso	(6,6)	(2,7)

Ci sono due giocatori, ciascuno con due strategie. Per semplicità, diciamo che il primo giocatore può scegliere tra alto e basso e il secondo tra destra e sinistra. Questo gioco ha tre equilibri di Nash: due in strategie pure e uno in strategie miste. Gli equilibri in strategie pure sono giocare alto, sinistra e avere come utilità (7,2) o giocare basso, destra con utilità (2,7). L'equilibrio in strategie miste invece è dato dalla strategia (1/3,2/3) giocata dal primo giocatore e (2/3,1/3) dal secondo. In questo caso l'utilità attesa, per entrambi i giocatori, è 14/3. Per certi versi questo equilibrio è il più interessante, in quanto porta la stessa utilità ai giocatori; d'altra parte, come si vede osservando la tabella, i due giocatori sono in una situazione simmetrica e, per un senso di giustizia, sembrano migliori gli equilibri in cui il risultato è lo stesso per entrambi. Se viene giocato l'equilibrio in strategie miste, la distribuzione di probabilità che si ha sugli esiti del gioco è la seguente

2/9	1/9
4/9	2/9

Cioè con probabilità 2/9 si giocherà "alto, sinistra" oppure "basso, destra" che corrispondono agli esiti (7,2) e (2,7); con probabilità 1/9 i due giocatori sceglieranno "alto, destra" con esito (0,0) e con probabilità 4/9 si giocherà "basso, sinistra" con esito (6,6).
Proviamo allora a cambiare distribuzione di probabilità sugli esiti. Consideriamo per esempio questa distribuzione di probabilità:

1/3	0
1/3	1/3

in cui ogni esito non nullo viene giocato con uguale probabilità. Con questa distribuzione di probabilità i giocatori starebbero meglio che all'equilibrio in strategie miste, perché così otterrebbero 15/3 invece di 14/3!
Ma come convincerli a accettare quel tipo di probabilità, visto che non è una situazione di equilibrio di Nash? L'idea è di *inventare un meccanismo*, il seguente: ci si accorda che un dado venga lanciato da una terza persona, che osserva l'esito e poi suggerisce *privatamente a ciascun giocatore* che cosa deve fare. Questa informazione privata costringe giocatori razionali ad aggiornare le loro probabilità sugli esiti (per esempio, se al giocatore che sceglie la riga si dice di giocare la seconda riga lui sa che l'esito "basso, sinistra" e "basso, destra" hanno la stessa probabilità). Con questo aggiornamento adesso il giocatore che sceglie la riga si chiede: mi conviene allora deviare dalla raccomandazione oppure no? Con calcoli semplici ci si accorge che per i giocatori non è conveniente deviare, qualunque sia il suggerimento ricevuto privatamente. È l'idea, geniale, di *equilibrio correlato*.