ARCHIMEDE E LA DOPPIA RIDUZIONE ALL'ASSURDO

di Ken Saito

Ken Saito e l'"unghia" di Archimede

Ha studiato Storia delle scienze presso l'Università di Tokyo e si è specializzato in Storia della Matematica greca. Dopo aver continuato i propri studi all'estero (anche presso "La Sapienza" di Roma dal 1986 al 1988) ha insegnato presso la Chiba University (Giappone) e attualmente è docente alla Osaka Prefecture University (Giappone). Ha pubblicato diversi articoli sulla Matematica greca e rinascimentale. Recentemente ha svolto approfondite ricerche sulle figure presenti nei manoscritti delle opere matematiche greche. È tra i fondatori della rivista *SCIAMVUS*, nata in Giappone nel 2000 e dedicata a testi inediti di Matematica e Astronomia nell'età pre-moderna.

La doppia riduzione all'assurdo

I risultati più importanti di Archimede in Geometria sono le determinazioni delle grandezze (aree e volumi) delle figure piane e solide comprese dalle linee e superfici curve quali segmento di parabola, sfera, paraboloide ecc. Per ottenere questi risultati, Archimede fa ricorso a un particolare modo di argomentazione che va sotto il nome di *metodo di esaustione*. In effetti sia il concetto di "metodo", sia quello di "esaustione", risalgono a molti secoli dopo Archimede (essenzialmente, al XVII secolo): per questo preferisco indicare il modello di argomentazione archimedea come *doppia riduzione all'assurdo*.

Schematicamente, il modello si può descrivere nei termini seguenti. Sia P la figura di cui vogliamo determinare la grandezza (per esempio una sfera) e sia X una figura "più nota" (per esempio un cilindro) a cui P è uguale (in Archimede e

> Ecco l'essenza dell'argomentazione per *doppia riduzione all'assurdo*, che spesso si pensa sia qualcosa di molto complicato.

nella Geometria greca sono assenti i concetti di *area* e di *volume*: la misura avviene sempre per confronto diretto fra due grandezze). Si costruiscano due serie di figure, I e C, inscritte e circoscritte a P che soddisfino le condizioni:

1. $I < X < C$;
2. La differenza $C - I$ può essere resa piccola a piacere: data una grandezza E, si può prendere una figura inscritta I e una circoscritta C in modo che sia $C - I < E$.

È in questo caso facile dimostrare che P è uguale a X. Infatti, se P è minore di X, $E = X - P$; per la condizione 2, si possono prendere C e I in modo che sia $C - I < E$. Allora si avrebbe $X - I < C - I < E = X - P$, cioè $P < I$, il che è impossibile perché I è inscritto a P. Dalla supposizione $P > X$, un argomento simile conduce all'esistenza di una C che soddisfi $P > C > X$, che contraddice il fatto che C è circoscritto a P.

Ecco l'essenza dell'argomentazione per *doppia riduzione all'assurdo*, che spesso si pensa sia qualcosa di molto complicato. Dobbiamo però sottolineare fin da subito che quanto abbiamo descritto è una schema generale che può essere ricavato – non senza forzature – dalle varie dimostrazioni messe in atto da Archimede. Ne esamineremo vari esempi, cominciando da quello che più si avvicina al modello astratto.

Esempi di doppia riduzione

Vediamo ora qualche esempio di argomentazione per doppia riduzione in Archimede e anche negli *Elementi* di Euclide.

Paraboloide o conoide rettangolo

Nell'opera *Conoidi e sferoidi* (uno dei suoi ultimi scritti, come vedremo), Archimede dimostra che un segmento di paraboloide (conoide rettangolo, secondo la terminologia del tempo di Archimede) è due terzi del cono inscritto, cioè la metà del cilindro che circonda il paraboloide (figura 1).

Sia ABC una parabola, BD il suo asse. Sia P il paraboloide generato dalla rotazione di ABC intorno all'asse BD. Si costruiscano nel modo seguente il solido inscritto I e circoscritto C in modo che differiscano per meno di un'assegnata grandezza E. Si divida l'asse BC a metà, continuando poi il processo di divisione, e per i punti di divisione si conducano piani paralleli alla base AC. Il cilindro che circonda il paraboloide venga diviso in cilindretti tutti uguali come QC e la divisione venga continuata fino a che un cilindretto non sia minore di E. Si costruisca ora il solido inscritto I, fatto dai cilindretti $I_1, \ldots, I_{n-1}$, e il solido circoscritto C che consiste dei cilindretti $C_1, \ldots, C_n$. La differenza $C - I$ è ovviamente uguale al cilindretto QC che si trova alla base del segmento e dunque minore della grandezza data.

Ora, dalle proprietà della parabola, risulta che i cilindretti che costituiscono il solido inscritto e circoscritto ($I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$; $C_1, C_2, \ldots, C_n$) formano una progressione aritmetica, il cui termine più piccolo è uguale alla differenza tra due termini adiacenti. Cioè, ponendo $a = I_1 = C_1$, si ha $I_2 = C_2 = 2a$, $I_3 = C_3 = 3a$, ecc. Sommando i termini di questa progres-

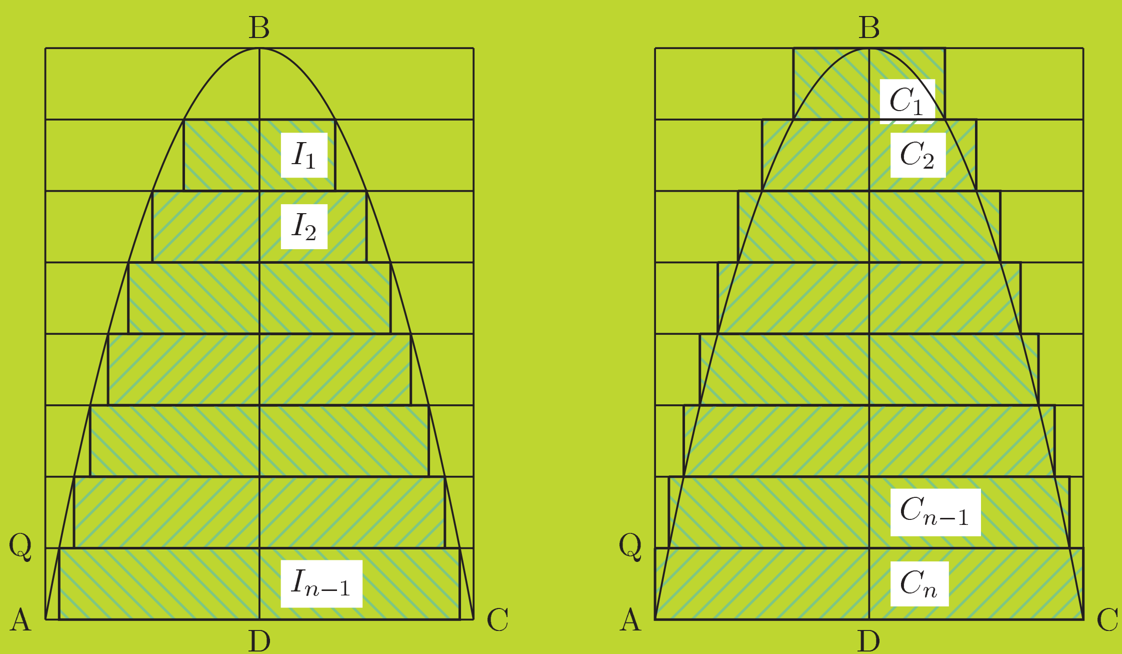


FIGURA 1

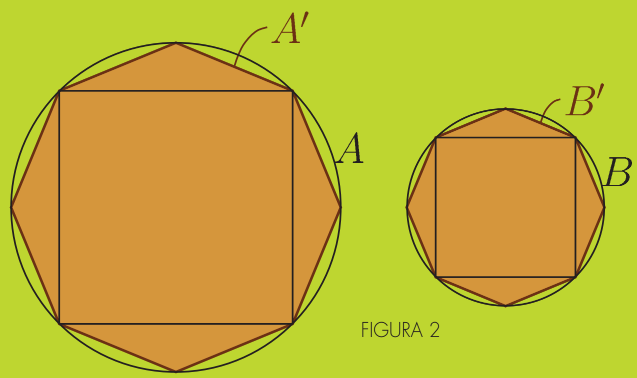


FIGURA 2

sione, si dimostra che il solido inscritto I (cioè $\Sigma_{k=1}^{n-1} I_k$) è minore della metà del cilindro intero che consiste di n cilindretti tutti uguali a QC. Similmente il solido circoscritto C, cioè $\Sigma_{k=1}^{n} C_k$, è più grande della metà del cilindro intero [1].
Il resto è una semplice applicazione dell'argomento per doppia riduzione all'assurdo e permette di dimostrare che il paraboloide è la metà del cilindro che lo circonda.

Rapporto di due cerchi (Eudosso)

L'argomentazione per doppia riduzione all'assurdo non fu un'invenzione di Archimede. Il libro XII degli *Elementi* di Euclide contiene alcuni teoremi, che sono attribuiti a Eudosso (matematico di qualche anno più anziano di Aristotele), dimostrati usando proprio questo tipo di ragionamento. Più precisamente, si dimostra che i cerchi stanno fra loro come i quadrati costruiti sui loro diametri (XII.2); che le piramidi a base triangolare aventi stessa altezza stanno tra loro come le basi (XII.5); che il cono è la terza parte del cilindro avente stessa base e stessa altezza (XII.10); che coni e cilindri di uguale altezza stanno tra loro come le basi (XII.11).
Qui diamo un riassunto della XII.2. Nella proposizione precedente è stato dimostrato che due poligoni regolari simili stanno fra loro come i quadrati dei diametri dei cerchi in cui sono inscritti (XII.1) (figura 2). Siano A e B due cerchi e $q(A)$ e $q(B)$ i quadrati sui loro diametri. Se la proporzione $q(A)$: $q(B)$= $A : B$ non fosse valida, ci sarebbe una grandezza X tale che $q(A)$: $q(B)$= $A : X$ e X dovrà essere o maggiore o minore di B.
Supponiamo (primo assurdo) che X sia minore di B. Inscriviamo un quadrato nel cerchio B: esso risulta maggiore della metà di B. Costruiamo ora l'ottagono inscritto dividendo a metà gli archi fra i vertici del quadrato. In questo modo si toglierà più della metà di ciò che resta del cerchio, dopo aver tolto il quadrato. Continuando così a dividere per metà gli archi e a congiungere le rette, la somma dei segmenti del cerchio B che rimangono fuori del poligono inscritto diventerà piccola quanto si vuole e dunque si potrà costruire un poligono B' in modo che $B - B'$ sia minore della differenza $B - X$ [2].
Quindi, B' è maggiore di X. Sia A' il poligono simile a B, inscritto nel cerchio A. Allora, dalla precedente proposizione XII.1, si ha $A : X = q(A)$: $q(B)$= $A' : B'$. *Permutando* i medi nella proporzione, si ha anche $A : A' = X : B$. Siccome il cerchio A è maggiore del poligono A' inscritto in esso, anche X dovrebbe essere maggiore di B' ma ciò è impossibile perché avevamo costruito B' maggiore di X.
L'altra ipotesi, che X sia maggiore di B (secondo assurdo), conduce facilmente a una contraddizione. *Invertendo*, si ha $X : A = q(B)$: $q(A)$ e $X > B$. Allora esiste un'area Y minore del cerchio A tale che $B : Y = q(B)$: $q(A)$ e l'argomento si riduce a quello del primo caso, in cui X era minore di B.
In questa proposizione si riconosce chiaramente il nucleo dell'argomentazione per doppia riduzione all'assurdo utilizzata in seguito da Archimede. Però mancano alcuni elementi importanti rispetto al procedimento utilizzato nei *Conoidi e sferoidi*. In particolare, non compare la somma di una progressione perché qui si paragonano due cerchi, figure dello stesso genere, e si deve fare solo il confronto di due poligoni simili. Non serve dunque tentare di ottenere la somma parziale di una serie per valutare la grandezza della figura inscritta. Altra differenza notevole è che non si usa la figura circoscritta perché la seconda ipotesi si riduce alla prima, scambiando i due cerchi in questione.

Segmento di parabola

Torniamo ad Archimede (figura 3). Nella *Quadratura della parabola* troviamo un'applicazione della doppia riduzione molto meno aderente al modello astratto o al

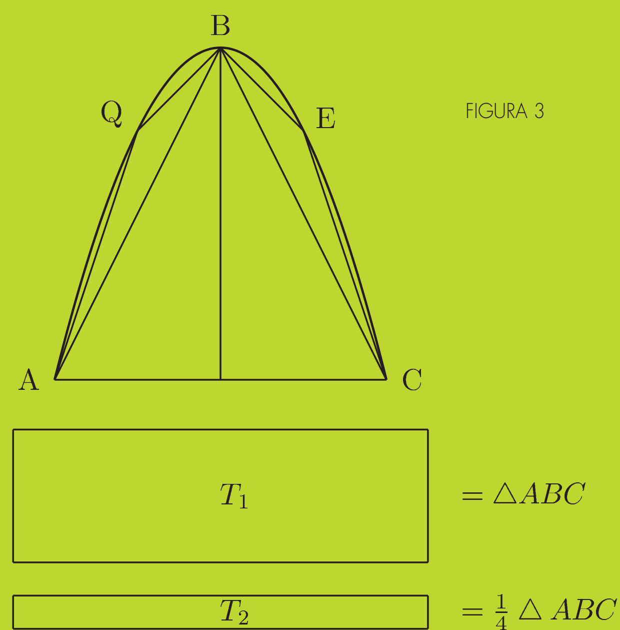


FIGURA 3

procedimento dei *Conoidi e sferoidi*. Nel segmento di parabola ABC sia inscritto il triangolo ABC avente stessa base e stessa altezza del segmento ("stessa altezza" significa che il punto B è il "vertice" del segmento parabolico, cioè il punto più lontano dalla base AC sulla curva parabolica tra A e C; in altre parole, la tangente alla parabola al punto B è parallela alla base AC). Archimede dimostra che il segmento di parabola ABC è quattro terzi del triangolo ABC.
Poniamo che la superficie T_1 sia uguale al triangolo ABC. Il segmento parabolico ABC risulta composto dal triangolo ABC e dai due segmenti di parabola residui, AQB e BEC. Siano Q e E i vertici di questi segmenti rispettivamente e si costruiscano i triangoli AQB e BEC. Si dimostra che i due triangoli AQB e BEC costruiti dentro i segmenti, presi insieme, sono uguali a un quarto di T_1. Consideriamo la superficie T_2 uguale a questi due triangoli: avremo che $T_2 = 1/4 T_1$. Nei quattro segmenti residui tra AQ, QB, BE, EC, si costruiscano quattro triangoli nello stesso modo. Si dimostra che questi quattro triangoli presi insieme sono un quarto di T_2; poniamoli uguali alla superficie T_3. Così si può continuare a costruire i triangoli nei segmenti residui. La figura inscritta I, costruita in questo modo, è la somma della serie geometrica di ragione 1/4:

$$I = T_1 + \frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4^2}T_1 + \cdots + \frac{1}{4^n}T_1 + \cdots$$

Noi concluderemmo subito che l'intero segmento parabolico è uguale a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}T_1 = \frac{4}{3}T_1.$$

Archimede, non disponendo né del concetto di limite né tantomeno di quello di somma di una serie infinita, fa ricorso alla doppia riduzione all'assurdo. Sia P il segmento di parabola e sia $K = 4/3T_1$. Constata:

1. che $P - I$ può essere minore di qualsiasi area data [3];
2. $K > I$;
3. $K - I$ può essere minore di qualsiasi area data.

Allora, se $P > K$, da (1) si può prendere una figura inscritta I in modo che $P > I > K$, il che è contro (2). Se invece fosse $P < K$, si potrebbe prendere I in modo che risulti $P < I < K$, il che contraddice il fatto che I è una figura inscritta a P. Quindi, $P = K$.

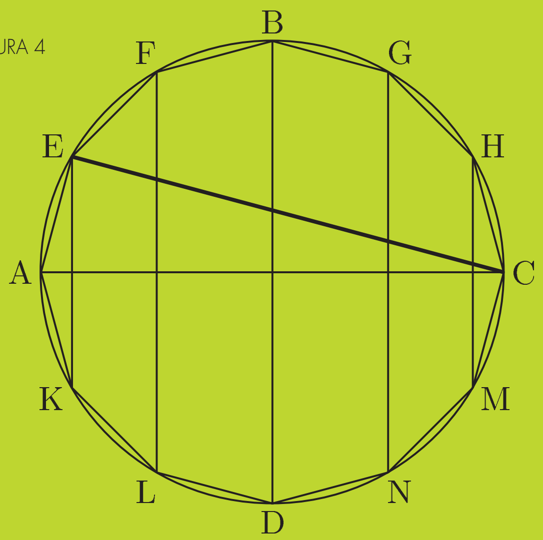
Varietà e novità nell'argomento archimedeo

Nella dimostrazione appena vista Archimede non costruisce la figura circoscritta. Infatti, le argomentazioni che adotta per arrivare alla doppia riduzione sono variabili e non sempre strettamente conformi alla forma paradigmatica che abbiamo esposto all'inizio. Come abbiamo già osservato, il modello è basato sui *Conoidi e sferoidi*, che è un'opera matura di Archimede. In altre opere – la *Quadratura della parabola* è solo uno dei possibili esempi – la via seguita si discosta da quel modello.

"La flessibilità con cui Archimede modifica varie parti di un supposto schema generale di dimostrazione, applicabile sempre in modo uniforme, e il suo aderire alle particolarità delle figure in questione ci suggeriscono che egli non disponesse di un metodo applicabile automaticamente a tutte le figure trattate."

Non è infatti indispensabile costruire la figura circoscritta C. Per dimostrare che la figura in questione P è uguale a X, basta costruire le figure inscritte I in modo che le differenze $P - I$ e $X - I$ siano piccole a piacere. Inoltre, in luogo di utilizzare il fatto che la differenza $C - I$ può essere resa minore di una grandezza data, in certe circostanze è più comodo sfruttare la possibilità di prendere C e I in modo che abbiano rapporto minore del rapporto di due grandezze a, b ($a > b$), cioè $a : b > C : I$. Ciò succede nella determinazione della superficie della sfera, in cui C e I sono figure simili ed è più facile considerare il loro rapporto.
La flessibilità con cui Archimede modifica varie parti di un supposto schema generale di dimostrazione, applicabile sempre in modo uniforme, e il suo aderire alle particolarità delle figure in questione ci suggeriscono che egli non disponesse di un metodo applicabile automaticamente a tutte le figure trattate.
Torneremo fra breve su questo punto. Quello che vorremmo qui rilevare è la novità più cospicua e importante che Archimede introduce nell'argomentazione per doppia riduzione all'assurdo rispetto alla forma che le aveva dato il suo inventore Eudosso. Tale novità consiste a nostro avviso nell'uso della somma di serie (finite) per la valutazione dei solidi inscritti e circoscritti. Se si guarda solo alla *Quadratura della parabola* e ai *Conoidi e sferoidi*, si potrebbe avere l'impressione che l'argomentazione di Archimede si possa dividere in due parti nettamente distinte: la costruzione delle figure inscritte (ed eventualmente anche circoscritte) e il calcolo della somma delle figure che costituiscono la figura in/circoscritta. E questa seconda parte ci fa inevitabilmente ricordare il calcolo integrale: per noi moderni, è piuttosto difficile non vedere la somma dell'integrale riemanniano nel procedimento archimedeo di calcolare la somma dei cilindretti I_k/C_k che costituiscono il solido in/circoscritto al solido di cui si cerca di determinare il volume. In realtà, Archimede non aveva una strategia di attacco così chiara e uniforme. Dopo aver usato la somma della serie geometrica

FIGURA 4



per il segmento di parabola, trattando la sfera nella *Sfera e Cilindro* (opera posteriore alla *Quadratura della parabola*), si trova di fronte al problema di ottenere la somma di un solido inscritto alla sfera fatto da coni e tronchi di cono: nella fig. 4, il cerchio e il poligono inscritto vengono ruotati attorno all'asse AC, generando così la sfera e il solido inscritto. Archimede riduce il problema del volume di questo solido a quello della sua superficie e dimostra poi che questa superficie è uguale a un cerchio. Il quadrato costruito sul raggio di tale cerchio è uguale a un rettangolo che ha come primo lato il lato AE del poligono, mentre come secondo lato la somma di tutte le corde perpendicolari, cioè EK+FL+BD+GN+HM! Avvalendosi poi della similitudine dei triangoli (figura 4), Archimede fa vedere che questo rettangolo è uguale al rettangolo compreso da AC e CE.
Con questo argomento ingegnosissimo – che non cessa di stupire i suoi lettori dopo 2300 anni – Archimede aggira la difficoltà del calcolo della somma delle parti del solido inscritto. Per lui, l'essenza della determinazione della grandezza delle figure curve per mezzo della doppia riduzione consisteva nel trovare un'opportuna figura inscritta (ed eventualmente anche una circoscritta). Non pare che gli stesse a cuore ciò che per noi è così importante e utile: separare il calcolo della somma della serie dalle altre parti della dimostrazione – separare cioè l'argomento quantitativo o algebrico da quello geometrico, argomento che costituisce il nucleo del calcolo integrale a cui si arriverà molti secoli dopo, ispirati anche dalle opere di Archimede.

Archimede in "imbarazzo"

Non è stato semplice utilizzare la somma di una serie per determinare la grandezza dei solidi inscritti e circoscritti. Si tratta di un punto da non trascurare.

Nella presentazione dell'argomento con cui Archimede dimostra che il paraboloide è metà del cilindro che lo circonda (§ *Paraboloide o conoide rettangolo*), abbiamo esposto la dimostrazione come se Archimede avesse direttamente sommato i cilindretti che formano una progressione aritmetica. L'impressione dei lettori sarà stata che si trattasse di un calcolo non più complicato del sommare $a + 2a + \ldots + na$.
In realtà non era così semplice. La proprietà della parabola che Archimede aveva a sua disposizione non era un'uguaglianza ma una proporzione, cioè una relazione fra quattro grandezze. Di conseguenza, la grandezza (il volume) di ogni cilindretto che costituisce il solido inscritto e circoscritto al paraboloide appare solo come un termine di una proporzione.
Vediamo il problema più da vicino. Si divida il cilindro totale T per mezzo di piani paralleli in n cilindretti T_1, T_2, …, T_n tutti uguali tra loro. Allora, per la proprietà della parabola per cui i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse (figura 5), abbiamo:

$I_1 : T_1 = P_1Q_1 : AD$
$I_2 : T_2 = P_2Q_2 : AD$
$I_3 : T_3 = P_3Q_3 : AD$
……………………..
……………………..

in cui P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, ecc. sono in progressione aritmetica come si vede dalla figura. Per avere la somma $I_1 + I_2 + \ldots I_{n-1}$, bisogna sommare i termini delle proporzioni. Ma quando ci sono più proporzioni, non è sempre possibile fare la somma dei termini corrispondenti (per esempio, è ve-

FIGURA 5

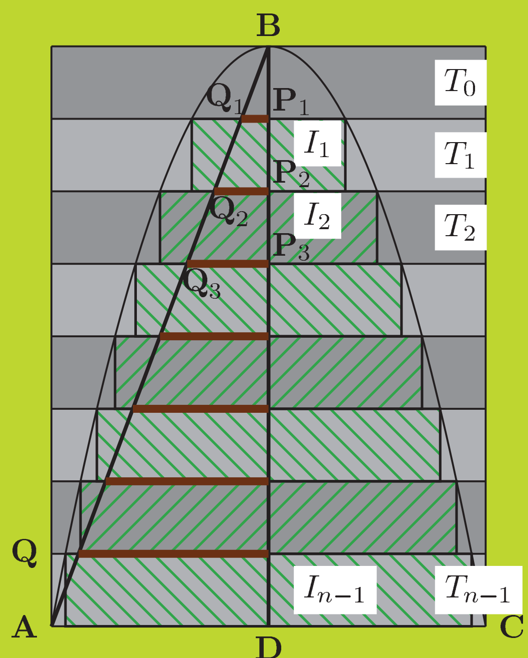
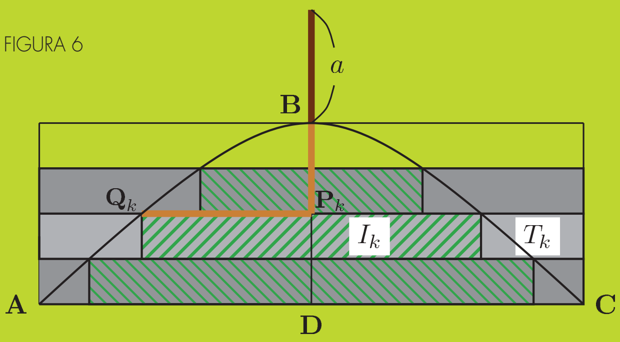


FIGURA 6



ro che 1 : 2 = 3 : 6 e 3 : 2 = 6 : 4 ma, se si fanno le somme dei termini corrispondenti, si ottiene 4 : 4 = 9 : 10, il che è ovviamente falso). Archimede ha così dovuto precisare la condizione che permette di fare la somma dei termini corrispondenti di più proporzioni (è la prima proposizione dei *Conoidi e sferoidi*).
Non si tratta di un problema banale, legato solo a differenze di linguaggio fra noi e Archimede. Ne è una prova il fatto che per Archimede i casi dell'ellissoide e dell'iperboloide risultano molto più complicati. Nel caso dell'iperboloide (figura 6), le proprietà dell'iperbole forniscono la proporzione seguente fra i cilindretti I_k e T_k ($1 \le k \le n-1$) [4]:

$$I_k : T_k = BP_k(a + BP_k) : BD(a + BD)$$

dove *a* è la retta che (ai tempi di Archimede) era detta *aggiunta all'asse* e che, in termini moderni, è il segmento dell'asse compreso fra i vertici dei due rami dell'iperbole. Sommando le proporzioni da $k = 1$ a $k = n - 1$, si ha il rapporto della somma:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(kab + (kb)^2)$$

alla somma $(n - 1)(nab + (nb)^2)$ dove $b = BP_1 = 1/nBD$.
Per Archimede, che non disponeva né delle espressioni algebriche né dei simboli in pedice, il trattamento di queste grandezze deve essere stato molto difficile e infatti la dimostrazione relativa risulta molto complessa. Proprio a questa difficoltà, sembra si debba riferire l'"imbarazzo" di cui parla il matematico siracusano nella prefazione di *Conoidi e sferoidi*: "*Ti mando,* (...)*, le dimostrazioni* (...) *di altri* [teoremi] *in seguito trovati, i quali, avendo io spesso indagato su di essi ed essendomi sembrato che essi contenessero una qualche difficoltà, mi avevano posto in imbarazzo*". (Archimede, 1974, p. 239)

Archimede precursore del calcolo integrale?

Abbiamo visto la difficoltà che Archimede doveva affrontare nella determinazione del volume dei solidi. Si potrebbe però anche pensare (e fino a tempi recenti si è spesso così pensato) che Archimede abbia superato questa difficoltà con i *Conoidi e sferoidi* e abbia stabilito un metodo assai generale per determinare l'area e il volume. Questa interpretazione dipende però pesantemente dal fatto che nei *Conoidi e sferoidi* gli argomenti per i tre solidi – paraboloide, ellissoide e iperboloide – sono praticamente uguali. Si può allora essere facilmente sedotti dall'interpretazione che nei *Conoidi e sferoidi* Archimede sia arrivato a stabilire un metodo generale per la determinazione del volume, superando la difficoltà del sommare i solidi che costituiscono il solido in/circoscritto. Quello che mancava ad Archimede sarebbero state "solo" le espressioni algebriche e un concetto di limite.

> Si potrebbe però anche pensare (e fino a tempi recenti si è spesso così pensato) che Archimede abbia superato questa difficoltà con i *Conoidi e sferoidi* e abbia stabilito un metodo assai generale per determinare l'area e il volume.

Non ci si deve però affrettare ad attribuirgli l'etichetta di precursore del calcolo integrale. Quantomeno, bisogna prima analizzare quello che Archimede ha fatto dopo i *Conoidi e sferoidi*.
Cominciamo con la cronologia delle opere di Archimede. Per fortuna, fra tutte le sue opere oggi conosciute, quelle che trattano la determinazione dell'area e del volume, sono accompagnate da una prefazione sotto forma di lettera. Cinque di queste sono indirizzate a un certo Dositeo e il loro ordine è determinato dalla prefazione. Solo il *Metodo* è dedicato a Eratostene (il famoso matematico direttore della biblioteca di Alessandria) e quest'opera è databile quasi sicuramente dopo le altre cinque. La prima tra queste – non necessariamente la prima in assoluto perché ci sono opere senza dedica (quindi di data incerta) e opere giovanili probabilmente perdute – è la *Quadratura della parabola*, in cui Archimede parla della morte di un suo amico, il matematico Conone, avvenuta poco prima (sappiamo che Conone era vivo nel 246 a.C.). La lettera dedicatoria delle *Spirali*, la quarta delle cinque opere spedite a Dositeo, parla ancora di Conone ma fa intendere che Conone era ormai morto da parecchio tempo. Posteriore alle *Spirali*, in cui Archimede prometteva l'invio a breve scadenza di teoremi relativi al paraboloide, sono i *Conoidi e sferoidi*, l'ultima opera dedicata a Dositeo, in cui il matematico siracusano

La proposizione 4 del *Metodo*: il paraboloide e il cilindro

Siano BAC un segmento di paraboloide e BEFC il cilindro circoscritto. Se i due solidi vengono tagliati dal piano MN perpendicolare all'asse AD, si ottengono rispettivamente come sezioni i cerchi di diametro PO e MN (li indicheremo come cer(PO) e cer(MN).
Sul prolungamento dell'asse DA si prenda il punto H in modo che DA = AH e si immagini una leva DH il cui fulcro sia A. Per le proprietà della parabola (i quadrati delle ordinate sono proporzionali alle ascisse) e dei cerchi (stanno fra loro come i quadrati dei raggi), si ha:

cer(PO) : cer(MN) = SA : AH.

Per la legge della leva (se le distanze fra due grandezze sono a queste inversamente proporzionali, allora le grandezze sono in equilibrio), la sezione del paraboloide (cer(PO)), trasportata nel punto H, fa equilibrio alla sezione del cilindro (cer(MN)) lasciata dov'è.

Tale relazione (e dunque l'equilibrio) vale per qualsiasi sezione MN e PO. Supponendo che valga anche per tutte le sezioni considerate insieme e che il cilindro e il segmento di paraboloide siano come riempiti da tali sezioni, il cilindro BF (che resta dov'è) fa equilibrio al segmento di paraboloide trasportato in modo che il suo baricentro sia il punto H.
Applicando di nuovo la legge della leva (siccome c'è equilibrio, le distanze saranno inversamente proporzionali alle grandezze) avremo, tenendo conto che il baricentro del cilindro è K (il punto medio di AD):

(paraboloide) : (cilindro) = KA : AH = 1 : 2.

Il paraboloide sarà dunque la metà del cilindro circoscritto (o una volta e mezzo il cono inscritto).

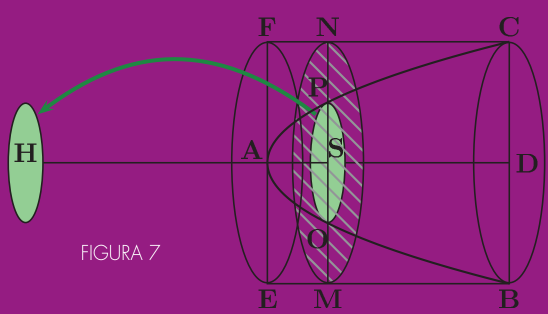
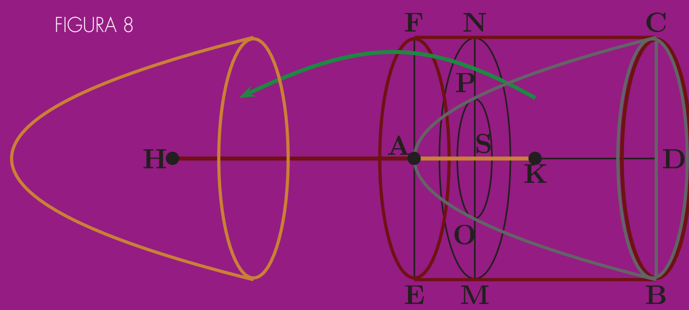


FIGURA 7

FIGURA 8



“Per stabilire in che misura Archimede possa essere considerato un precursore del calcolo integrale, bisognerebbe dunque ricercare se nel *Metodo* proponga un approccio sistematico per la determinazione del volume dei solidi.”

parla del suo “imbarazzo” (è ragionevole supporre un certo ritardo nel completamento di questo libro).
Quindi, fu già piuttosto tardi – probabilmente almeno dopo il 230 a.C. – che Archimede arrivò a completare i *Conoidi e sferoidi*. Nel *Metodo*, scritto ancora più tardi, Archimede espresse la speranza che i matematici futuri avrebbero sviluppato i suoi risultati e ne avrebbero trovati anche di nuovi: per questo motivo esponeva a Eratostene l'approccio che aveva utilizzato. In breve, il *Metodo* è il suo canto del cigno.
Per stabilire in che misura Archimede possa essere considerato un precursore del calcolo integrale, bisognerebbe dunque ricercare se nel *Metodo* proponga un approccio sistematico per la determinazione del volume dei solidi.
In questa opera si descrive l'approccio che Archimede ha utilizzato per scoprire i risultati dimostrati nelle opere spedite a Dositeo. Quindi, anche se il *Metodo* è stato scritto e mandato ad Eratostene posteriormente alle opere indirizzate a Dositeo, il suo contenuto è anteriore alle opere precedenti. Questo approccio ha due caratteristiche che lo rendono privo di validità dimostrativa: (1) l'uso di una bilancia ideale, cioè l'introduzione in Geometria di un principio di Meccanica; (2) la scomposizione del solido in sezioni piane senza altezza (nel caso di un'area piana, in sezioni lineari senza spessore) e la loro ricomposizione in solido (area). Ovvero, per usare il lin-

guaggio che Bonaventura Cavalieri introdurrà 19 secoli dopo: l'uso degli *indivisibili*.
Si deve inoltre aggiungere che questo approccio tramite una bilancia ideale fornisce solo il risultato (per esempio la sfera è due terzi del cilindro circoscritto) senza dare nessun suggerimento sulla dimostrazione geometrica. Il *Metodo* ha dato ad Archimede una sorta di tappeto magico che gli permetteva di vedere dove si trovava la cima della montagna che cercava di scalare: ma i sentieri da percorrere qui sulla terra per raggiungere la vetta, quelli avrebbe dovuto trovarli in tutt'altro modo.
Bisogna tuttavia osservare che la figura in questione è tagliata da piani o da linee paralleli (e spesso perpendicolari alla bilancia). Fino a questo punto, l'argomento è simile alle dimostrazioni geometriche dei *Conoidi e sferoidi*.

> "Il *Metodo* ha dato ad Archimede una sorta di tappeto magico che gli permetteva di vedere dove si trovava la cima della montagna che cercava di scalare: ma i sentieri da percorrere qui sulla terra per raggiungere la vetta, quelli avrebbe dovuto trovarli in tutt'altro modo."

Potrebbe allora sembrare ragionevole pensare che ad Archimede sia stato familiare l'approccio di tagliare la figura con piani (o con linee) paralleli e, quando si dedicò alla studio dei conoidi e degli sferoidi, questo approccio ottenne uno *status* privilegiato per l'indagine del volume e dell'area. Studi recenti sulla parte finale del *Metodo* suggeriscono però il contrario. L'opera conteneva, dopo l'esposizione dell'approccio per mezzo della bilancia, altri due risultati: gli ultimi che aveva scoperto. I due teoremi riguardano il volume dell'intersezione di due cilindri e quello di un solido oggi chiamato "unghia". Il cattivo stato del codice – il famoso palinsesto costantinopolitano, scoperto nel 1906, poi perduto e nuovamente ritrovato alla fine del secolo scorso – ci ha conservato solo parte dei fogli in cui questi risultati sono trattati ma in uno studio recente [5] sono arrivato, insieme a Pier Daniele Napolitani, alle seguenti conclusioni.
Già quasi subito dopo la scoperta del *Metodo*, nel 1906, si era trovato che l' "unghia" si può ottenere secando l'intersezione dei cilindri in otto parti. Studiando le argomentazioni messe in atto da Archimede e conservate nelle pagine superstiti e stimando il numero di pagine perdute, abbiamo concluso che Archimede cominciò con il porsi il problema dell'intersezione dei cilindri. Per ottenerne il volume, divise questo solido in otto parti trovando così l' "unghia". Questo solido non era semplice da trattare, ma con argomenti ingegnosi e laboriosi riuscì a venirne a capo determinandone il volume e di conseguenza anche quello dell'intersezione dei cilindri. Nel contesto della presente discussione, la cosa più importante da osservare è che, se Archimede avesse tentato l'approccio di tagliare l'intersezione dei cilindri con piani paralleli seguendo una direzione opportuna, avrebbe trovato assai facilmente che il problema si poteva ridurre a quello di trovare il volume di una sfera o di un ellissoide: problemi a lui ben noti e trattati nel *Metodo* stesso. Non avrebbe avuto necessità di ingolfarsi nelle complicate argomentazioni che propone per l' "unghia". Ciò suggerisce che anche dopo aver ultimato i *Conoidi e sferoidi* – e ancora quando scriveva il *Metodo*, la sua ultima opera – Archimede non pensava di avere stabilito un metodo per determinare il volume (o l'area) di una figura. Ogni nuova figura era una nuova sfida per cui inventare qualche nuova tecnica di misura. Leggendo Archimede, a noi saltano agli occhi gli elementi che sono stati sviluppati dopo e siamo inclini a sottolineare i suoi aspetti moderni. Le sue opere hanno dato spunti indispensabili per lo sviluppo della Matematica nei secoli XVI e XVII, spunti che sono fra le radici dell'invenzione del calcolo integrale. Ma la varietà di argomentazioni di Archimede testimonia anche la distanza tra lui e i moderni e porta a valutare come per nulla trascurabili i contributi dei matematici dei secoli XVI e XVII che aprirono la strada a qualcosa di essenzialmente nuovo. ■

Note

[1] Algebricamente:

$$a+2a+\cdots+(n-1)a<\frac{1}{2}(\overbrace{na+na+\cdots+na}^{n\text{ volte}})<a+2a+\cdots+na.$$

[2] Al momento di costruire l'ottagono, i quattro triangoli aggiunti al quadrato sono più della metà dei segmenti del cerchio fuori del quadrato, perché il triangolo è metà del rettangolo che circonda il segmento del cerchio. Quindi i segmenti del cerchio fuori dell'ottagono sono meno di metà del segmento. Lo stesso vale in ogni raddoppio dei lati del poligono inscritto e i segmenti del cerchio diventano più piccoli di qualsiasi grandezza data.

[3] Ogni triangolo costruito in un segmento di parabola è maggiore della metà del segmento. Il ragionamento fatto per un segmento di cerchio (nota 2) è valido anche per un segmento di parabola.

[4] T_k è un'ennesima parte dell'intero cilindro che circonda l'iperboloide. Ovviamente si ha $T_1=T_2=\ldots T_n$.

[5] Saito K. e Napolitani P.D., "Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: the Last Proposition of the Method", in corso di pubblicazione in *Handbook of the Ancient and Medieval Mathematical Sciences. Studies in Honour of John Lennart Berggren*.