

# LA SCIENZA SOSPESA

## Le vie della ricerca fra metodo ed euristica

Agnese Ilaria Telloni

Dipartimento di Scienze Matematiche e Ingegneria Industriale  
Università Politecnica delle Marche  
telloni@dipmat.univpm.it

### Introduzione

La ricerca scientifica, cammino arduo e miracoloso verso la verità per l'immaginario collettivo, stimola la curiosità di chi ne è avulso e l'amore incondizionato di chi la pratica. Ma come procede la ricerca? Cosa assicura a chi indaga la possibilità di conoscere? E cosa trasforma una buona idea in una teoria? La fiducia che la società ripone nelle possibilità gnoseologiche della scienza si fonda tradizionalmente su due elementi essenziali: l'oggettività dell'esperienza sensibile e l'efficacia del metodo con il quale vengono trattati i dati sperimentali. Un saldo punto di partenza e una strada sicura su cui procedere, si potrebbe dire, rendono la scienza quello che è nell'opinione comune.

Ma alla luce della riflessione epistemologica contemporanea, che sottolinea l'impossibilità di attingere direttamente alla realtà e riconosce il progressivo indebolimento del metodo, si rende necessario un ripensamento radicale delle possibilità e dei limiti della scienza, nonché della nozione stessa di verità scientifica.

Un'analisi specifica meritano le dinamiche di ricerca in ambito matematico, dove emergono peculiarità che non consentono un'assimilazione agli altri settori scientifici. La natura teoretica degli oggetti di indagine, il ruolo essenziale del linguaggio e il carattere della verità matematica fanno di questa disciplina un terreno fertile e al tempo stesso scivoloso per l'epistemologia. Regno incontrastato della mescolanza, crasi di rigore formale e fantasia, astrazione e concretezza, eleganza e fatica costruttiva, la Matematica, forse ancor più delle altre scienze, si nutre dello iato tra lo sguardo basso di chi diligentemente ricerca e la visione globale che a un tratto si apre e mostra l'insospettabile contiguità del tutto.

### I cardini dell'epistemologia tradizionale

Secondo l'epistemologia tradizionale, il metodo scientifico, anima della ricerca, è la via universale che muove dall'esperienza e conduce all'asserzione generale. La stessa radice etimologica del termine indica "via verso", percorso che conduce alla destinazione finale. Ma qual è il cammino che il metodo suggerisce? Quali sono gli estremi del percorso?

Il metodo è il sentiero che orienta l'attività scientifica nella rete confusa dei fenomeni, ciò che enuclea l'oggetto di interesse e scandisce i tempi e i modi della sua analisi. Al tempo stesso, però, proprio in questo processo di isolamento dell'unica via da seguire nella ricerca, esso induce a

trascurare lo sfondo e la molteplicità dei sentieri che si aprono, promuovendo una sorta di monoteismo intellettuale.

Emerge così un'insopprimibile ambiguità connaturata al metodo, faro imprescindibile e vincolo all'esplorazione, nella quale, con intenti, modelli ed esiti anche profondamente diversi, pensatori come Popper, Kuhn, Lakatos e Feyerabend leggono l'istanza urgente di una revisione dello statuto epistemologico della scienza.

Il fondamento filosofico di una scienza dimostrativa nell'accezione moderna dell'espressione, con la quale, passo dopo passo, si arrivi al possesso della conoscenza, si deve far risalire a Cartesio. Egli per primo intuisce che la garanzia della comprensione dell'uomo sulla natura risiede nella possibilità di un accesso diretto a essa mediante l'esperienza e nell'universalizzazione del metodo come unica forma veritativa del pensiero.

Quando, all'inizio del '900, il neopositivismo o neoempirismo emancipa l'epistemologia dalla filosofia, rendendola disciplina autonoma, la questione della struttura e dei metodi della scienza viene affrontata in funzione del problema del linguaggio e si persegue l'obiettivo di tracciare un confine netto fra proposizioni significanti e proposizioni prive di significato. Viene formulato così il principio di verifica, secondo cui il senso di ogni proposizione deve essere ricercato nel confronto con l'esperienza sensibile. Di riverbero, si afferma un ottimismo generalizzato a proposito della scienza, proprio sulla base dei due elementi fondamentali già individuati da Cartesio, uno epistemico e uno metodologico<sup>1</sup>: la possibilità di ricavare dall'esperienza dati certi e indubitabili, e la capacità della scienza di trattare tali dati, manipolandoli e analizzandoli attraverso procedure standardizzate.

## **Il metodo per congetture e confutazioni**

Il primo di questi assunti, già sostenuto anche dalla filosofia empirista e mai problematizzato fino al neopositivismo, viene messo in discussione nella speculazione di Popper, secondo cui l'esperienza sensibile non si identifica con l'ascolto neutro del dato. Ogni osservazione si inserisce piuttosto in un sistema di riferimento ed è orientata da un insieme di conoscenze ed aspettative. Essa è, per dirla con Hanson, "carica di teoria"<sup>2</sup>. La prescrizione metodologica dell'epistemologia cade dunque in un inevitabile paradosso: l'esperienza, tradizionalmente riconosciuta come fondamento ultimo della prassi scientifica, vede opacizzarsi progressivamente i propri caratteri di chiarezza e distinzione. Se, dunque, non esiste alcuna base empirica assoluta, se "persino la "pura osservazione" non è mai neutra – è il risultato necessario di un'interpretazione"<sup>3</sup>, non è legittimo individuare in essa l'atto che sancisce il cominciamento della ricerca.

Oltre a scardinare la componente epistemica della scienza, Popper interviene anche sulla metodologia professata dall'epistemologia classica. Sulla base del riscontro dell'asimmetria logica fra falso e vero (un enorme numero di casi positivi non permette di concludere la veridicità della legge generale, mentre un solo caso negativo permette di affermarne la falsità), Popper critica la

---

<sup>1</sup> cfr. Marcello Pera, *Scienza e retorica*, Laterza, Bari 1991, pp. 3-4

<sup>2</sup> Norwood R. Hanson, *I modelli della scoperta scientifica. Ricerca sui fondamenti concettuali della scienza*, trad. it. Feltrinelli, Milano 1978.

<sup>3</sup> Karl R. Popper, *Poscritto alla logica della scoperta scientifica*, trad. it. Il Saggiatore, Milano 1984, vol. I, pp. 181-82

legittimità logica e psicologica del principio di verifica formulato dal neoempirismo. In un rovesciamento totale di prospettiva, Popper cerca un criterio di demarcazione all'interno dell'ambito del senso, volto a distinguere fra scienza e non scienza, e individua nella falsificabilità la caratteristica peculiare delle teorie scientifiche. Inoltre, per non limitarsi a coniare una verifica all'inverso, i cui esiti sarebbero sterili quanto quelli proposti dal neopositivismo, il filosofo aggiunge un'interpretazione del tutto nuova dell'attività dello scienziato e del suo atteggiamento verso le teorie stesse.

La formulazione di una qualsiasi teoria richiede che venga colmata un'ineliminabile distanza fra l'esperienza - necessariamente finita - e l'asserzione generale. Ciò, lungi dal paralizzare l'attività scientifica verso l'alto, induce a formulare teorie riconoscendo come loro caratteri costitutivi la provvisorietà e la non-stabilità, e a proporre "congetture audacemente avanzate [...], da eliminarsi se contrastanti con le osservazioni"<sup>4</sup>. Ogni teoria deve dunque presentarsi come un'ipotesi di lavoro che si considererà accettabile fino a quando non verrà confutata dai "fatti".

Ma quali sono i "fatti", e come utilizzare nel metodo per congetture e confutazioni i dati osservativi, se l'evidenza e l'universalità non li caratterizzano più? Nonostante la scoperta del carattere relativo dell'esperienza, Popper suggerisce di accettare le indicazioni dei dati sperimentali, attribuendo a essi la funzione di controllo delle congetture.

Se l'inaccessibilità del dato determina la destrutturazione del sapere come verità stabile, immutabile ed eterna e, conseguentemente, l'accettazione del carattere fallibile e provvisorio della conoscenza, tutto ciò non deve indurre allo scetticismo. Spetta allo scienziato e al proprio atteggiamento critico stabilire il valore di verità dei "fatti" mediante decisioni metodologiche volte a colmare lo spazio di libertà che la limitatezza dell'esperienza apre. Tali decisioni orientano i sentieri della ricerca in un duplice senso: da un lato sottraggono alla critica una parte di conoscenza, che assume il ruolo di "conoscenza di sfondo", e d'altro canto accolgono come attendibili alcuni dati sperimentali. Ciò fornisce la base teorica contro cui si stagliano, pur su un piano logico differente, le teorie che devono essere poste sotto controllo attraverso un confronto con i "dati osservativi", a cui il falsificazionista *à la Popper* non dà spontaneamente assenso, ma che *decide* di accettare per "veri".

Il ruolo del ricercatore come soggetto diviene così preponderante rispetto all'oggettività presunta del metodo e alla intersoggettività della comunità scientifica. Lo scienziato, tutt'altro che mero compilatore di tabelle di dati sperimentali, riversa nel suo lavoro tutta la propria soggettività: decide l'orizzonte teorico in cui operare, propone congetture e seleziona esperienze in grado di corroborare o falsificare le sue tesi. Egli non può quindi essere espunto dal prodotto della sua ricerca, perché ne è parte integrante, dall'osservazione alla formulazione della legge generale.

## **Il pensiero di Thomas Kuhn**

Dagli stessi presupposti popperiani si sviluppa il pensiero di Thomas Kuhn, filosofo americano che nel celebre saggio "La struttura delle rivoluzioni scientifiche" del 1962, propone un modello di

---

<sup>4</sup> Karl R. Popper, *La scienza: congetture e confutazioni*, trad. it. "Congetture e confutazioni" di Popper e il dibattito epistemologico post-popperiano, a cura di Giorgio Brianese – Sentieri della filosofia, Paravia, Torino 2000, p. 78

scienza in cui confluiscono un'approfondita analisi storiografica della prassi scientifica e la filosofia del linguaggio di Wittgenstein.

La storia della scienza e la ricerca scientifica si configurano, secondo Kuhn, come una successione di "paradigmi", microcosmi logici e ontologici all'interno dei quali, in un preciso periodo storico e in una determinata contrada geografica, si articola il lavoro degli scienziati. I periodi in cui la comunità scientifica opera strettamente all'interno di un dato paradigma, senza riscontrare "anomalie", cioè discrasie fra teoria e risultati sperimentali, sono preponderanti e vengono detti periodi di "scienza normale". In queste fasi, gli scienziati sono accomunati da uno stesso sistema di conoscenze, obiettivi e metodologie e la loro attività è prevalentemente rivolta all'analisi di pseudo-problemi, che Kuhn chiama "rompicapo", la cui soluzione è già posta nelle assunzioni del paradigma.

Quando invece a più voci da parte degli scienziati si dichiara insoddisfazione e si propone un paradigma alternativo a quello corrente, nell'attuazione di una discussione sul confronto fra i paradigmi, si realizza la "scienza straordinaria".

Nella speculazione di Kuhn i paradigmi rappresentano le condizioni di possibilità dell'indagine scientifica e determinano di fatto ciò che gli scienziati vedono, quando eseguono un certo esperimento. Le osservazioni, la nozione di verità e quella di correttezza sono intraparadigmatiche, cioè hanno senso solo dentro un certo paradigma.

Tratto distintivo della scienza sembra essere, in quest'ottica, l'unanimità di giudizio della comunità scientifica nei periodi di "scienza normale", espressione di un tenace istinto di autoconservazione del paradigma corrente. La ricerca appare così un'attività ripiegata su se stessa, per lo più infeconda e realizzata in una sorta di ottenebramento intellettuale.

Solo quando il paradigma vigente viene messo in discussione da anomalie, la scienza recupera la problematicità e il senso critico che dovrebbero caratterizzarla, diventando "scienza straordinaria" e si realizzano le rivoluzioni scientifiche. Dopo il cambiamento di paradigma, gli scienziati pur guardando nelle direzioni consuete, vedono cose nuove, spesso incompatibili con quelle vecchie, quasi subiscano un cambiamento repentino di immagine, che Kuhn chiama "riorientamento gestaltico"<sup>5</sup>. In tal senso l'esperienza perde il carattere di ripetibilità che le scienze le richiedono: esperimenti dello stesso tipo eseguiti in uguali condizioni materiali possono fornire, se stagliati su paradigmi di sfondo diversi, risultati differenti.

### **Lakatos e la metodologia dei programmi di ricerca**

A promuovere l'estremo tentativo di salvare la razionalità della scienza è la metodologia dei programmi di ricerca di Lakatos, filosofo ungherese che, volgendosi come Kuhn alla storia della scienza, interviene a indirizzare il falsificazionismo popperiano verso una svolta pluralistica. Lo sviluppo non lineare del progresso scientifico mostra, secondo Lakatos, l'inadeguatezza del modello di Popper, per il quale la scienza deve sottoporre al vaglio una teoria alla volta, auspicarne la confutazione e solo successivamente proporre un'altra congettura. La prassi scientifica si basa

---

<sup>5</sup> Thomas Kuhn, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Einaudi, Torino, 1967, capitolo decimo, pp. 139-142

invece sulla proliferazione di teorie rivali non gerarchizzate ma concorrenti, che permette, sotto determinate condizioni, l'aumento di contenuto empirico e quindi l'evoluzione della ricerca. Allo scopo di non abbandonare l'idea di progresso e le potenzialità di metodo scientifico, Lakatos sostituisce al falsificazionismo "ingenuo" di Popper il falsificazionismo "sostanzioso", che differisce dal primo nel ruolo assegnato all'esperienza e nell'organizzazione delle teorie stesse in programmi di ricerca. La natura limitata e convenzionale dell'esperienza, già riconosciuta da Popper, impedisce che questa possa pronunciarsi in modo definitivo sul destino delle teorie scientifiche: non si parla più di "esperimenti cruciali" o di "evidenze contrarie" poiché essi possono essere riscontrati o interpretati come tali solo a posteriori rispetto all'insorgere di una nuova teoria. Scrive Lakatos:

[...] non è vero che proponiamo una teoria e che la natura possa gridarci il suo NO; noi proponiamo piuttosto un labirinto di teorie, e la natura può gridarci INCOMPATIBILI.<sup>6</sup>

La continuità fra le serie di teorie è garantita dal loro legame non semplicemente mediante aggregazione o congiunzione, ma in precisi programmi di ricerca. Questi consistono in regole metodologiche, che indicano le vie di ricerca da evitare (euristica negativa) e suggeriscono i sentieri da perseguire (euristica positiva). Ogni programma di ricerca è costituito da un "nucleo" in cui confluiscono assunti metafisici e tutti gli asserti da considerarsi non falsificabili "per un decreto metodologico" e da una "cintura protettiva" di ipotesi ausiliari e condizioni iniziali. L'euristica negativa devia le critiche dal "nucleo", mentre l'euristica positiva costruisce la "cintura protettiva", verso la quale debbono dirigersi i tentativi di falsificazione. La proliferazione di ipotesi, teorie e modelli più che il sostegno empirico costituisce il vero motore del progresso scientifico, e si sviluppa in modo autonomo rispetto ai risultati sperimentali. Le anomalie rimangono sospese in attesa di corroborazione e lo sviluppo teorico procede senza chiedere il sostegno né il controllo dell'osservazione.

La sperimentazione, dopo aver perso il carattere assoluto che l'empirismo classico le assegnava, nella speculazione di Lakatos perde anche la funzione di arbitro nella ricerca scientifica: ogni dato sperimentale deve essere illuminato e interpretato. I newtoniani, ad esempio, "trasformarono, con tenacia e abilità, un controesempio dopo l'altro in esempi corroboranti, rovesciando prima di tutto le teorie osservative originarie alla luce delle quali era stata stabilita questa evidenza contraria".<sup>7</sup>

## **L'anarchismo metodologico di Feyerabend**

Autentica dinamite per l'epistemologia è l'analisi di Paul K. Feyerabend, filosofo austriaco secondo il quale qualunque prescrizione metodologica nell'ambito della ricerca scientifica si rivela assolutamente inadeguata. Le regole, gli standard inevitabilmente presenti nella prassi scientifica, che Kuhn e Lakatos chiamano "paradigmi" e "programmi di ricerca", sono stati sempre violati dalla scienza. Di più: secondo Feyerabend è questa natura ribelle della ricerca scientifica che ha permesso di evitare il collasso, il blocco totale: Galileo stesso, fautore incondizionato del metodo scientifico, si impone come scienziato mediante metodi irrazionali. Scrive Feyerabend:

Dovunque la scienza si arricchisce con metodi non scientifici e con risultati non scientifici. Se desideriamo comprendere la natura, se vogliamo padroneggiare il nostro ambiente fisico, dobbiamo

---

<sup>6</sup> Imre Lakatos, *La falsificazione e la metodologia dei programmi di ricerca*, trad. it in *Critica e crescita della conoscenza*, a cura di I. Lakatos e A. Musgrave, Feltrinelli, Milano 1984, p. 206

<sup>7</sup> *Ibidem*, p. 209

usare *tutte* le idee, *tutti* i metodi e non soltanto una piccola scelta di essi. L'affermazione che non c'è conoscenza fuori della scienza – extra scientiam nulla salus – non è altro che una favola, molto conveniente.<sup>8</sup>

L'esito feyerabendiano mette in luce la doppia anima del metodo, limite e destino della ricerca. In tale ottica, il metodo assume anche il carattere di fondamentale prova iniziatica per la scienza: i grandi scienziati furono capaci di sospendere gli standard e di violare la rigidità del metodo per l'affermazione delle proprie teorie. E tale ricorso all'irrazionalismo non fu soltanto un evento accidentale del progresso della ricerca, ma piuttosto una sua fase fondamentale.

La proposta che emerge dalla speculazione di Feyerabend è quella di una scienza più umanitaria, che, come le scienze dello spirito, sia prodotto della creazione artistica oltre che del rigore, del genio oltre che del metodo. È chiaro quindi che:

l'idea di un metodo fisso, o di una teoria fissa della razionalità, poggia su una visione troppo ingenua dell'uomo e del suo ambiente sociale. Per coloro che non vogliono *ignorare* il ricco materiale fornito dalla storia, e che non si propongono di impoverirlo per compiacere ai loro istinti più bassi, alla loro *brama di sicurezza intellettuale nella forma della chiarezza, della precisione, dell' "obiettività", della "verità"*<sup>9</sup>, diventerà chiaro che c'è un solo principio che possa essere difeso [...]. E' il principio: *qualsiasi cosa può andar bene.*<sup>10</sup>

Si odono echi cartesiani in questo passo. Si parla di chiarezza, di obiettività, di verità. Si odora la "brama di sicurezza" che muove l'indagine del metodologo e anima le aspirazioni della scienza. Feyerabend ne smaschera l'illusorietà, dopo che Popper ne aveva denunciato la provvisorietà.

L'attività scientifica, allora, che assume il metodo come emblema della pluralità delle procedure e della molteplicità di intenti, appare così da esso stesso paralizzata: nel progetto di investigazione di un determinato piano fenomenologico, ogni scienziato imposta il proprio lavoro sulla base di un procedimento standard che puntualmente, se vorrà ottenere risultati originali, dovrà trasgredire. La fecondità della scienza può manifestarsi solo quando chi ricerca, in una sorta di delirio di onnipotenza, antepone se stesso e le proprie convinzioni alle prescrizioni del metodo.

E se il metodo è propriamente la strada sulla quale lo scienziato viaggia puntando dritto alla meta, la sua violazione è l'atto ribelle attraverso cui costui svia dal sentiero tracciato. Metodo e trasgressione, rigore e creatività: poli remoti e intimi, che negandosi si valorizzano vicendevolmente e in un ritmico contrappunto promuovono il progresso della ricerca.

## **Il metodo e la Matematica**

In Matematica il termine "metodo" è declinato in sensi e contesti diversi, e assunto talvolta come sinonimo di "procedura" o "tecnica" o ancora inteso nell'accezione di "metodo assiomatico". Qui la questione delle dinamiche di ricerca si macchia di contaminazioni ontologiche per la natura degli oggetti di studio, e si intreccia alla filosofia del linguaggio poiché le catene di senso formali sono il terreno in cui si rende maggiormente evidente l'applicazione delle regole metodologiche.

---

<sup>8</sup> Paul K. Feyerabend, *Contro il metodo. Abbozzo di una teoria anarchica della conoscenza*, trad. it. Feltrinelli, Milano 2002, p. 249

<sup>9</sup> *Ibidem*, p. 25 (corsivi miei)

<sup>10</sup> *Ibidem*, pag. 25 (corsivi dell'autore)

Agli occhi degli addetti ai lavori, come a quelli di coloro che ne prendono volutamente le distanze, la Matematica si presenta come differente dalle altre scienze, sia per l'ambito di indagine, sia per i problemi e le procedure tipiche di risoluzione. Di conseguenza l'analisi epistemologica richiede strumenti specifici, curvati sulle peculiarità della disciplina.

Le scienze si occupano di oggetti osservabili, presenti in natura. La legittimazione del loro indagare è il loro stesso oggetto, esistente e reale. La loro motivazione ancestrale è la curiosità dell'uomo nei confronti di ciò che ha di fronte. Per la Matematica questo non vale: la Matematica non ha oggetti propri, o se ce l'ha, non è semplice descriverli e non è chiaro il loro status logico e gnoseologico. Classicamente si dice che la Matematica si occupa di enti, "certi oggetti discreti extra-logici i quali preesistono a ogni pensiero come esperienze immediate"<sup>11</sup> oppure solo di "relazioni concettualmente stabilite fra elementi concepiti in modo arbitrario"<sup>12</sup>; si dice pure che il suo interesse trascende la specificità degli oggetti stessi, o ancora, che "la matematica è lo studio di tutti i possibili schemi"<sup>13</sup>. In ogni caso gli oggetti della Matematica e le asserzioni riguardo a essi presentano sfumature vaghe e mutevoli, sulle quali gli stessi matematici si scontrano. Basti pensare alla nozione di verità matematica, perennemente in bilico fra descrizione e costruzione, eternamente oscillante fra sapere trascendente e aderenza alla realtà. Concezioni filosofiche antitetiche ed eventi decisivi nello sviluppo del pensiero matematico tratteggiano un concetto multiforme, che raccoglie connotati metafisici nelle interpretazioni di Pitagora e Platone, si identifica con la stabilità immutabile dell'*epistème* nel sistema kantiano o nelle concezioni dei matematici idealisti, per divenire elemento logico, depotenziato e più accessibile nelle formulazioni che lo identificano con la correttezza, la coerenza o ancora la conformità col reale. Tarski, ad esempio, nel suo fondamentale *Wahrheitsbegriff* del 1935 e in successivi approfondimenti degli anni cinquanta, formula una definizione di verità secondo cui, detta  $p$  una certa proposizione, " $p$  è vera" se e solo se  $p$  è vera. Questa idea, per cui la verità di una proposizione è la sua corrispondenza con la realtà, si declina differentemente per le scienze empiriche e per la Matematica. Nel primo ambito, l'uso di "un linguaggio ristretto con un vocabolario limitato"<sup>14</sup>, che descrive solo oggetti fisici o chimici, ma non oggetti linguistici, mette al riparo da contraddizioni. In Matematica, invece, la doppia funzione del linguaggio, al tempo stesso strumento descrittivo e oggetto di indagine, espone ciò che è "vero" ad antinomie come il celeberrimo *paradosso del mentitore*. Al fine di evitare tali criticità, Tarski riconosce la necessità di distinguere livelli diversi di linguaggio e individua un *linguaggio oggetto*, nel quale sono formulate le proposizioni per le quali si vuole stabilire la verità, e un *metalinguaggio*, attraverso cui si definisce la verità di una proposizione. Per tutte le proposizioni del linguaggio oggetto, e solo per esse, si può definire la verità mediante l'uso del metalinguaggio.

Quanto osservato suggerisce un'intrinseca polisemia dell'ambito della Matematica e di concetti apparentemente monolitici, ma ciò non costituisce un limite al progresso della ricerca, poiché

---

<sup>11</sup> Erwin Papperitz, citato da G. Lolli, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna 2002, p. 20

<sup>12</sup> David Hilbert, citato da A. G. Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, Einaudi, Torino 1975, p. 42

<sup>13</sup> John Barrow, *Caso e determinismo*, in AA. VV., *Il caso e la libertà*, a cura di M. Ceruti, P. Fabbri, G. Girello e L. Preta, Laterza, Bari 1994, p. 24

<sup>14</sup> Alfred Tarski, *Verità e dimostrazione*, trad. it. in E. Casari, *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni Scuola Aperta, 1973, p. 81.

E' la natura di ciò che è considerato problema matematico che cambia, cambiano le domande che il matematico si pone, e quindi gli oggetti dell'indagine: i problemi stessi [...] diventano oggetti matematici, oltre che gli enti su cui i problemi vertono.<sup>15</sup>

e ancora

La matematica è simultaneamente dimostrazione e posizione di problemi, dimostrazione e definizione degli enti adeguati.<sup>16</sup>

## Il problema linguistico

Dalle questioni affrontate risulta evidente il valore del linguaggio in Matematica. Un esempio su tutti è l'algebra. Una formula algebrica è la traduzione fedele, in un particolare linguaggio, di asserzioni riguardo a un oggetto matematico; da essa, mediante trasformazioni canoniche condivise, è possibile ricavare formule equivalenti che permettono di scoprire proprietà dell'oggetto in questione.

L'algebra nasce storicamente come codifica di un'attività di tipo retorico, in cui i problemi venivano discussi quasi esclusivamente a voce. L'introduzione di un formalismo rigoroso e sintetico apporta l'evidente vantaggio di maggiore controllabilità e permette una visione generale delle proprietà degli enti che si studiano. Proprio come nel repentino cambiamento di visione nel passaggio da un paradigma all'altro che descrive Thomas Kuhn, una formalizzazione opportuna consente di guardare agli stessi problemi con occhi nuovi, e apre già la strada a possibili soluzioni. L'algebra simbolica, oggetto di indagine ma anche sorgente di pensiero e potente strumento euristico per la Matematica, è solo la punta visibile dell'iceberg: per una disciplina in cui la precisione e il rigore sono valori fondanti, molto spesso il progresso metodologico è assimilato con il perfezionamento linguistico. È paradigmatico, a questo proposito, lo studio sull'infinito matematico, nell'ambito del quale i veri progressi della conoscenza, lungi dal susseguirsi come tappe regolari, sono stati tumultuosi e improvvisi, generati ogni volta dall'apertura di una diversa prospettiva e di un linguaggio nuovo. Paradossi e incredulità, anomalie di matrice kuhniana, hanno indotto alla ricerca di strumenti originali o all'uso innovativo di nozioni note, come il concetto di applicazione biunivoca in relazione alla cardinalità degli insiemi, e dischiuso l'orizzonte a scenari mai prefigurati, e decisivi slittamenti di punto di vista<sup>17</sup>.

Se, come vuole Enriques, "l'educazione del senso logico dovrà sempre procedere per gradi, *dal concreto all'astratto*"<sup>18</sup>, la definizione, nell'atto di isolare l'universale presente in ogni particolare, si pone come elemento essenziale. L'attività di definizione degli oggetti di studio della Matematica e la dimostrazione delle loro proprietà richiedono il ricorso a un simbolismo preciso, che sia indipendente dal soggetto e condiviso intersoggettivamente. L'adesione a un modello linguistico specifico, infatti, offre una efficace soluzione alle difficoltà che deriverebbero dall'assunzione della lingua comune: dal punto di vista semantico-contenutistico un simbolismo stringato permette di evitare l'introduzione di ipotesi intuitivamente accettate ma non esplicitate; dal punto di vista logico-formale, la riduzione della ridondanza delle proposizioni ordinarie a brevi espressioni

---

<sup>15</sup> Gabriele Lolli, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna 1985, p. 32

<sup>16</sup> *Ibidem*, p. 34

<sup>17</sup> cfr. S. Leonesi - C. Toffalori - S. Tordini, *La matematica dell'infinito*, Lettera Matematica PRISTEM, 48, 2003, pp. 37-48

<sup>18</sup> F. Enriques, *Periodico di matematica*, 1921, (corsivo mio)



simboliche determina maggiore sintesi e dunque controllo sulle asserzioni. Si pensi alla ideografia di Peano e al suo duplice obiettivo di ridurre ai minimi termini l'alfabeto simbolico e rendere la Matematica perfettamente formalizzata. In questo progetto, Peano vedeva il miraggio della sicurezza, in quanto

la formalizzazione non può essere completata se ci sono contraddizioni, perché la riduzione delle dimostrazioni a derivazioni formali da una parte richiede che le idee della teoria siano ben definite nei loro reciproci rapporti, e dall'altra permette di controllare la correttezza delle dimostrazioni; *gli errori non sfuggono all'analisi formale*<sup>19</sup>.

D'altra parte, come il metodo, il linguaggio e il suo rigore sono un'arma a doppio taglio.

Lo riconosce ad esempio Vailati, che legge distintamente nel linguaggio l'opportunità euristica fornita dalla sintesi e dal controllo delle conoscenze, ma anche il vincolo dell'irrigidimento, la perdita di controllo delle assunzioni implicite in ogni definizione. Grazie a una solida formazione filologica e salde basi di filosofia del linguaggio, Vailati, come Peano, osserva che la logica matematica "è un mezzo per diminuire la probabilità [degli errori] nelle dimostrazioni."<sup>20</sup>

La storia della Matematica si sviluppa nell'alternanza di periodi di slanci euristici, molteplici e disordinati, e di fasi di canonizzazione e istituzionalizzazione dei risultati noti. Si dispone trasversalmente rispetto a questo schema l'analisi della definizione, che mira a individuare le peculiarità del processo mediante il quale si enucleano i concetti in ambito matematico.

### **La definizione: l'oggetto e il segno**

"Definire" significa in senso etimologico "circoscrivere, delimitare un ambito, tracciare dei confini". Lungo la storia della Matematica si assiste all'affermazione o alla decadenza di modelli teorici antitetici, che di volta in volta attribuiscono alla definizione un valore fondante o strumentale all'attività dimostrativa.

La natura degli oggetti della Matematica determina il carattere aperto a interpretazioni diverse a cui si presta la definizione: se gli oggetti propri della matematica sono enti astratti, la definizione può essere l'atto mediante il quale se ne tracciano i confini, secondo una decisione a priori, oppure può essere l'esibizione degli oggetti stessi, seppure intesa in senso ideale, attraverso un esperimento mentale.

### **Il modello oggettuale e le sue debolezze**

La teoria della definizione di Frege poggia sul principio di completezza (*Grundsatz der Vollständigkeit*) e richiede che per ogni oggetto preso in considerazione risulti noto se esso sia o meno compreso all'interno dell'ambito circoscritto dalla definizione stessa. In quest'ottica ogni definizione deve muovere dalla possibilità, almeno sul piano logico, dell'ostensione dell'oggetto a cui ci si riferisce.

---

<sup>19</sup> G. Lolli, *Logica ed enciclopedia in G. Peano*, in *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, op. cit., p. 78 (corsivo mio)

<sup>20</sup> G. Lolli, *Le forme della logica: G. Vailati*, in *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, op. cit., p. 118

Nel programma “logicista”, esposto nei *Grundgesetze der Arithmetik*<sup>21</sup>, Frege mira al duplice scopo di eliminare ogni lacuna dall’attività dimostrativa propria della Matematica e di marcare la distanza fra rappresentazione e concetto. La rappresentazione riguarda il soggetto, colui che si pone di fronte all’oggetto e lo elabora. Il concetto, invece, è un fatto oggettivo, pertiene all’ambito della logica, poiché predica la natura “satura” dell’oggetto. A ogni oggetto corrisponde un nome proprio, che Frege intende riempito, saturato, appunto, di significato.

Una concezione che ricade in senso proprio sotto il dominio del modello oggettuale, basato sulla dicotomia soggetto-oggetto, è la dottrina russelliana dei nomi propri, secondo la quale gli unici termini atti a designare sono i pronomi e gli aggettivi dimostrativi “questo” o “quello”; l’uso di tali termini presuppone intrinsecamente un rapporto con l’oggetto percepibile e, in definitiva, esprime un’esperienza diretta. Russell e Whitehead caratterizzano con gli attributi di semplicità, irriducibilità e immediatezza le percezioni sensibili, configurandole come atomi logici della propria teoria.

Se nelle assunzioni di fondo di sistemi teorici come quelli di Frege e Russell emerge in modo preponderante l’interconnessione fra la Matematica e il modello oggettuale, nelle teorie di tipo relazionale e formale si rende immediatamente trasparente il legame fra la Matematica e la filosofia del linguaggio.

## **Il formalismo hilbertiano**

Contro la Matematica satura di contenuto di Frege e Russell, Hilbert propone una Matematica le cui definizioni siano intese come contenitori, la cui essenza sia indipendente dal contenuto espresso. Non più unità compiute di senso, le asserzioni matematiche vengono lette da un punto di vista esclusivamente formale, come operazioni di tipo logico.

Con Frege e Russell si era compiuta la riduzione della Matematica all’aritmetica, ma l’antinomia che Russell aveva individuato all’interno della proposta fregeana annichiliva il programma “logicista” e, più in generale, la possibilità di una fondazione logica dell’aritmetica.

In definitiva, dunque, la Matematica vedeva vacillare i propri fondamenti.

In questo panorama, ancora con un preciso intento di tipo fondazionale, Hilbert accosta alla Matematica tradizionalmente intesa una *metamatematica*, “la quale serve alla sicurezza della prima, in quanto la protegge dal terrore delle proibizioni non necessarie così come dal pericolo dei paradossi”<sup>22</sup>. Una nuova interpretazione del metodo assiomatico, secondo Hilbert, può essere proposta come soluzione alla crisi aperta dall’antinomia di Russell.

Dopo il riconoscimento da parte di Frege della natura logica degli assiomi dell’aritmetica, Hilbert riguarda tutta la geometria, intesa fino a quel momento kantianamente come scienza dell’estensione, in senso puramente logico-formale. Sganciandosi dal contenuto reale delle definizioni e delle proposizioni della geometria, Hilbert concepisce quest’ultima come sistema ipotetico-deduttivo. Gli assiomi di Hilbert non esprimono, in linea di principio, alcun contenuto specifico, ma soltanto relazioni di tipo logico fra gli oggetti presi in esame e si configurano come definizioni implicite degli stessi oggetti. Ogni teoria è intesa come uno schema generale che si *può*, ma che *non si deve* necessariamente riempire di contenuto. I termini tradizionali della geometria possono essere

<sup>21</sup> *Grundgesetze der Arithmetik* = Principi dell’aritmetica. E’ il titolo originario dell’opera di Frege, che uscì nelle due edizioni del 1893 e del 1903.

<sup>22</sup> David Hilbert, *Neubegründung der Mathematik*, citato da Aldo G. Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, op. cit., p. 41

sostituiti nelle teorie da termini del linguaggio comune, o anche da fonemi del tutto privi di significato, poiché essi non sono altro che segni le cui caratteristiche, espresse negli assiomi, sono esclusivamente di tipo relazionale. Afferma Hilbert:

[...] l'operare astratto con ambiti concettuali e contenuti generali è risultato insufficiente e insicuro. Come condizione preliminare per l'applicazione delle inferenze logiche e l'impiego delle operazioni logiche qualcosa deve però esser già dato nell'immaginazione: certi oggetti discreti extra-logici i quali preesistono percettivamente ad ogni pensiero come esperienze immediate. [...] Assumendo questo come punto di vista, gli oggetti della teoria dei numeri sono per me – esattamente al contrario di Frege e di Dedekind – i segni stessi. In ciò consiste la salda posizione filosofica, che io giudico necessaria per la fondazione della matematica pura [...]: *in principio* – qui è il caso di dire – è *il segno*.<sup>23</sup>

In sistemi di questo tipo, evidentemente, la garanzia di legittimità dell'indagine è di tipo formale. Essa trova proprio fondamento non nell'ostensione degli oggetti studiati, o nell'analisi ontologica della loro natura, ma nella correttezza dal punto di vista logico del sistema costruito.

### **Definizioni ed esistenza**

La centralità dell'analisi della definizione matematica risulta chiara se si prendono in esame le implicazioni che una certa tipologia di definizione determina sulle dinamiche di ricerca. Ad esempio, l'orientamento esplorativo dell'indagine matematica, il procedere incerto su oggetti inizialmente non noti, corrisponde all'assunzione di definizioni blande, che si modificano e si precisano simultaneamente allo sviluppo della teoria. Viceversa, una ricerca che pretenda di muoversi su enti già perfettamente delineati non può che avere come punti di partenza definizioni complesse e non modificabili nell'articolazione dell'indagine.

In Matematica si assiste tradizionalmente alla contrapposizione fra definizioni reali e definizioni nominali. Le definizioni reali prevedono che un soggetto noto sia accostato a un enunciato controllabile. Le definizioni nominali, invece, hanno un grado maggiore di arbitrarietà e la loro stessa struttura le propone come congetturali ed essenzialmente provvisorie.

Non mancano nel panorama della storia della matematica prese di posizioni estreme, né tentativi di mediazione riguardo al concetto di definizione.

Peano, ad esempio, sostiene che le definizioni matematiche siano soltanto nominali e che istituiscano una sorta di gerarchia fra i concetti di una teoria. Ciò risulta consistente con la sua idea secondo cui il metodo assiomatico sia applicabile soltanto a teorie sviluppate e collaudate. Per Saccheri le definizioni sono “*filiae plurium demonstrationum*”, cioè si sviluppano con la teoria e con l'attività dimostrativa.

Il problema del linguaggio e delle definizioni è connesso da vicino al problema dell'esistenza degli oggetti matematici. Si è già osservato che la Matematica, come nessun'altra scienza, deve fronteggiare un'analisi di tipo filosofico sull'esistenza degli oggetti che indaga. Nella prima assiomatizzazione della Matematica, gli *Elementi* di Euclide, la questione dell'esistenza è sentita. La dimostrazione delle proprietà dell'ente matematico è preceduta logicamente e cronologicamente dalla costruzione, seppure teorica, puramente ipotetica, dell'ente matematico stesso. Ciò garantisce l'esistenza dell'oggetto di indagine e, dunque, la legittimità dello studio su di esso. La fondazione

---

<sup>23</sup> David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, citato da Aldo G. Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, op. cit., pag. 42

della ricerca matematica in Euclide è affidata alla possibilità di esistenza dell'oggetto; la definizione è correlata alla costruibilità.

Ma la Matematica cambia, producendo talvolta profonde fratture fra la teoria e l'intuizione sensibile. Oggi, secondo Lolli, le definizioni sono il prodotto della manipolazione di strutture astratte e vengono individuate in modo da orientare lo sviluppo teorico verso un'astrazione sempre maggiore. Esse perdono l'aggancio alla realtà fisica in una sorta di "oblio dell'ente"<sup>24</sup>, che si articola lungo tutta la storia della Matematica. Quando il fondamento non può più essere la realtà fenomenologica, subentrano motivazioni d'altro tipo, opportunistiche ad esempio, come la fecondità dei settori di ricerca, a far preferire determinate definizioni piuttosto che altre. Si perde l'oggetto, si ergono costruzioni. L'ente euclideo diviene elemento logico e nel processo di astrazione l'esistenza smette di essere un attributo di interesse matematico, viene dimenticata. A tal proposito è significativa la proliferazione, soprattutto dalla metà dell'Ottocento in poi, di oggetti matematici i cui nomi non evocano alcuna radice esperienziale: al triangolo "isoscele" euclideo, alla lettera "con le gambe uguali", si contrappongono espressioni come "spazio di Banach", che non suggeriscono la struttura, o le peculiarità concrete dell'oggetto che descrivono.

In questo contesto emerge il metodo assiomatico come soluzione innovativa al problema fondazionale.

### **Le teorie assiomatiche**

Come risposta alla ricerca di un *fundamentum inconcussum* dell'agire matematico, il metodo assiomatico permette la determinazione di una base stabile a partire dalla quale sia legittimo ricercare. Esso è, in altri termini, la risposta che i matematici forniscono al domandare incessante della filosofia. La curiosità critica dell'interrogazione filosofica, che non teme l'insolubilità, e anzi, continua a porre problemi e a non trovare risposte definitive, in ambito matematico viene sospesa dall'individuazione del primo anello della catena mediante un atto volontaristico a priori. Come per le così dette scienze sperimentali, anche per la Matematica il metodo si erge a garante della sicurezza della disciplina e s'impone come la protezione che tiene al riparo da errori e antinomie. Ma oltre a ciò, al metodo assiomatico spetta l'arduo compito di sancire il cominciamento della ricerca matematica. Fu Hilbert all'inizio del secolo scorso a trovare nella formulazione di nuovi assiomi una risposta all'esigenza fondazionale. Secondo Hilbert, infatti, insieme all'attività di dimostrazione dei teoremi, l'individuazione di assiomi promuove lo sviluppo della Matematica, muovendosi passo per passo verso le direzioni meno tortuose e più feconde.

L'assiomatizzazione della Matematica risponde alla crisi dei fondamenti permettendo il passaggio a un più elevato livello di astrazione e realizzando un controllo più diretto, di natura formale, sulle asserzioni; in questo panorama si avverte l'esigenza di definizioni matematiche che aderiscano alla struttura e all'interpretazione hilbertiana del metodo assiomatico.

La concezione tradizionale di definizione reale, come autoreferente e non bisognosa di alcun apparato interpretativo, male si concilia con il fascio di interpretazioni a cui ogni sistema assiomatico, hilbertianamente inteso, si presta. Di più: l'assiomatizzazione della Matematica in

---

<sup>24</sup> cfr. Agnese Ilaria Telloni, *Il metodo scientifico e la matematica. Teleologia dell'univoco o equivoco della teleologia?*, in corso di pubblicazione

questo senso nuovo, nel prefigurare l'“oblio dell'ente”, cioè la disgiunzione dalla realtà sensibile, svuota progressivamente di significato il linguaggio matematico.

Per Frege gli assiomi sono verità, che traggono garanzia dall'intuizione spaziale di kantiana memoria. Essi, dunque, in quanto veri, sono non contraddittori.

Per Hilbert, invece, gli assiomi sono proprietà arbitrariamente poste, che individuano un sistema se soddisfano alle proprietà formali di completezza, non contraddittorietà e indipendenza. A posteriori, una volta verificate tali proprietà, gli enti indagati restano definiti dalle relazioni postulate.

Le definizioni per Hilbert sono dunque poste negli assiomi e il sistema stesso risulta invariante rispetto alla sostituzione dei propri oggetti con altri che soggiacciono agli stessi vincoli logico-formali. Scrive Hilbert:

[...] ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie e [...] gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario. Se [...] voglio intendere un qualunque sistema di enti, per esempio il sistema: amore, legge, spazzacamino, [...], allora basterà che assuma tutti i miei assiomi come relazioni fra questi enti perché le mie proposizioni, ad esempio il teorema di Pitagora, valgano anche per essi. In altre parole: ogni teoria può essere sempre applicata a infiniti sistemi di enti fondamentali.<sup>25</sup>

Tale impostazione, nella decisa separazione fra forma logica e contenuto intuitivo, emancipa le deduzioni da qualsiasi dipendenza dai fatti, dilatando progressivamente lo spazio interstiziale fra Matematica e realtà sensibile. Se da un lato il metodo assiomatico conduce dalle premesse alle conseguenze in modo quasi meccanico, dall'altro separa dal reale in una dialettica emblematica fra contiguità e lontananza.

Come nella metodologia dei programmi di ricerca proposta da Lakatos, il modello hilbertiano promuove la concorrenza di teorie alternative, e nega alla realtà sensibile il diritto di falsificarle. La Matematica si alleggerisce della zavorra esperienziale, e nel perdere l'oggetto, ha maggior libertà per lo sviluppo teorico. Tutto sembra essere matematicamente trattabile, ogni teoria si può formulare e accettare, purché non contenga contraddizioni fra le basi fissate dagli assiomi e le conseguenze deducibili mediante le regole di inferenza, anch'esse individuate a priori. In questo contesto è chiaro che la nozione stessa di verità matematica viene scardinata e, mentre da un lato si depotenzia in concetti più deboli e almeno apparentemente di più semplice accertabilità, come la correttezza delle deduzioni, d'altro canto vede ampliarsi a dismisura il proprio ambito di applicabilità. Ma cosa dovrebbe garantire la coerenza e la completezza di una teoria? Certamente, nelle intenzioni di Hilbert, un teorema della teoria stessa.

## **I teoremi di Gödel**

Il matematico austriaco Kurt Gödel, ponendosi sulla scia dei progetti di Hilbert, e con l'iniziale intenzione di realizzarli, giunge a dimostrare negli anni trenta del '900 due risultati di enorme portata concettuale, sia in senso matematico che in senso filosofico. Il primo teorema di incompletezza di Gödel afferma che ogni teoria non contraddittoria, con un sistema di assiomi decidibile e nella quale possa essere trattata l'aritmetica, contiene proposizioni non decidibili, ovvero non dimostrabili né rifiutabili a partire dagli assiomi. Dunque nessun sistema formale può

---

<sup>25</sup> David Hilbert, citato da Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano 1977, vol. VI, pp. 423-24

essere completo, contro le aspettative di Hilbert. Oltre a ciò, il secondo teorema di incompletezza nega anche la possibilità della dimostrazione di coerenza, stabilendo che nessuna teoria “ragionevole” che includa l’aritmetica può dimostrare, a partire dai propri assiomi e attraverso le proprie regole di deduzione, di essere coerente. La Matematica come le scienze, allora, vede aprirsi una profondissima crisi dei principi su cui tradizionalmente si fondano il suo carisma, la sua affidabilità e la sua capacità di pronunciarsi sul reale. Dopo il sogno di un dominio senza ombra, e l’illusione della conquista della verità, perfettibile e ineluttabile al tempo stesso, si scorge il limite, e se ne ha la certezza. Si avverte il crollo delle categorie classiche di verità e sapere unitario tradizionalmente legate all’impresa scientifica. Cosa resta alla Matematica, allora? La rinuncia alla conoscenza, oppure una riesame in senso metamatematico dei propri elementi essenziali: i concetti di verità, di metodo, di fondamento. In altre parole, l’apertura ad una nuova ontologia del sapere scientifico.<sup>26</sup>

## Conclusione

Emblema scintillante del rigore e cuore pulsante dello statuto epistemologico di ogni scienza, il metodo si carica, nelle sue molteplici declinazioni, di valenze filosofiche insospettabili. Dietro una maschera severa e imperturbabile, cela la pluralità di intenti, la multiformità degli approcci e la divergenza di opinioni. A chi aspira alla conoscenza, lascia scorgere in anticipo il sentiero da percorrere e dà sicurezza, sottraendo all’*horror vacui*. Ma “ogni sentiero, in quanto cammino della ricerca umana, è ad un tempo via e sviamento, avanzamento e smarrimento”<sup>27</sup>. La questione della ricerca e la sua presunta assimilazione al metodo si fanno così provocazione, e gridano l’urgenza di un’indagine metascientifica, che eluda al tempo stesso il dogmatismo dei protocolli e lo scetticismo gnoseologico. Se non si dà accesso diretto alla realtà, se ogni metodologia orienta e vincola al tempo stesso, se ogni analisi non può spingersi oltre un certo livello di esattezza e non può dare garanzie assolute sulla propria affidabilità, se la soggettività del ricercatore non può essere eliminata dal prodotto del suo studio, la scienza può evitare l’afasia solo rendendosi consapevole delle opportunità che da ciò derivano, e accogliendo l’invito a problematizzare le proprie procedure, fluidificandone le prescrizioni in una dialettica che non sopprima, ma anzi valorizzi la personalità unica e ineliminabile di chi ricerca.

---

<sup>26</sup> cfr. Agnese Ilaria Telloni, *Il metodo scientifico e la matematica. Teleologia dell’univoco o equivoco della teleologia?*, op. cit., cap. 6: Per un’ontologia debole del sapere scientifico.

<sup>27</sup> Pietro Chiodi, presentazione di *Sentieri interrotti*, La Nuova Italia, Milano 1999, p. X

## Riferimenti bibliografici

- [1] AA. VV., *Il caso e la libertà*, a cura di M. Ceruti, P. Fabbri, G. Giorello e L. Preta, Laterza, Bari 1994
- [2] Ettore Casari, *La filosofia della matematica del'900*, Sansoni Scuola Aperta, 1973
- [3] Federico Enriques, *Periodico di matematica*, 1921
- [4] Paul K. Feyerabend, *Contro il metodo. Abbozzo di una teoria anarchica della conoscenza*, Feltrinelli, Milano 2002
- [5] Aldo Giorgio Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, Einaudi, Torino 1975
- [6] Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano 1977
- [7] Norwood R. Hanson, *I modelli della scoperta scientifica. Ricerca sui fondamenti concettuali della scienza*, trad. it. Feltrinelli, Milano 1978.
- [8] Martin Heidegger, *Sentieri interrotti*, trad. it. a cura di P. Chiodi, La Nuova Italia, Milano 1999
- [9] Thomas Kuhn, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, Einaudi, Torino 1969
- [10] Imre Lakatos, *La falsificazione e la metodologia dei programmi di ricerca scientifici*, in *Critica e crescita della conoscenza*, a cura di I. Lakatos e A. Musgrave, Feltrinelli, Milano 1984
- [11] S. Leonesi – C. Toffalori, *Matematica, miracoli e paradossi*, Bruno Mondadori, Milano, 2007
- [12] S. Leonesi – C. Toffalori – S. Tordini, *La matematica dell'infinito*, Lettera Matematica PRISTEM, 48, 2003
- [13] Gabriele Lolli, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna 2002
- [14] Gabriele Lolli, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna 1985
- [15] Marcello Pera, *Scienza e retorica*, Laterza, Bari 1991
- [16] Karl R. Popper, *La scienza: congetture e confutazioni*, in “*Congetture e confutazioni*” di Popper e il dibattito epistemologico post-popperiano, a cura di Giorgio Brianese – Sentieri della filosofia, Paravia, Torino 2000
- [17] Karl R. Popper, *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evolucionistico*, traduzione di A. Rossi, Armando, Roma 1983

- [18] Karl R. Popper, *Poscritto alla Logica della scoperta scientifica*, Il Saggiatore, Milano 1984
- [19] Karl R. Popper, *La società aperta e i suoi nemici*, traduzione a cura di D. Antiseri, Armando, Roma 1973-74
- [20] Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisiert Sprachen*, *Studia Philosophica* 1 (1935), pp. 261-405. Trad. it. *Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati, L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo da Peirce a Tarski* (a cura di F. Rivetti-Barbò), Vita e Pensiero, Milano, 1961, pp. 391-677
- [21] A. Tarski-R. Vaught, *A theoretical extension of relational systems*, *Compositio Mathematica* 13 (1957), pp. 81-102
- [22] A. I. Telsoni, *Il metodo scientifico e la matematica. Teleologia dell'univoco o equivoco della teleologia?*, in corso di pubblicazione