



**Giochi di sponda tra aspetti semantici e  
sintattici: l'azione didattica di  
Emma Castelnuovo in classe**

Lucilla Cannizzaro –Università Roma 1

[lucilla.cannizzaro@gmail.com](mailto:lucilla.cannizzaro@gmail.com)

Bari, 5 - 7 ottobre 2018

Centro PRISTEM - Mateinitaly –

Seminario di Storia della Scienza e Dipartimento di  
Matematica Università di Bari



**Sullo sfondo:** la consapevolezza della complessità e non unidirezionalità dei fenomeni dei quali ci occuperemo

- 0. considerazioni Generali
- 1. Lente di ingrandimento su Emma
- 2. Algebra e Aritmetica (pochi cenni)
- 3. Sintassi e semantica in Geometria



Il percorso professionale e umano di E. C. è stato ricostruito ufficialmente e testimoniato dal volume che l'Unione Matematica Italiana (Giacardi e Zan, 2013) ha voluto dedicareLe per i suoi cento anni.

- **testimonianza** di osservazione attenta (se non proprio di un coinvolgimento attivo)
- **omaggio** a Giovanni Prodi e alla fondatezza della sua preoccupazione espressa in *'Una scuola senza memoria'* su Lettera Matematica Pristem nel 1997:



*“...E’ difficile, nella scuola italiana, costruire mettendo pietra su pietra:*

*le diverse generazioni ignorano i tentativi, per lo più vani, compiuti da quelle precedenti, e tutto ricomincia sempre daccapo. ....*

*la scuola italiana, non avendo un’anima, non ha memoria.*

*Malgrado la preparazione e la tensione ideale di molte persone che vi operano ....”*

L'UMI nella stessa linea di azione ha curato (Anichini G., Giacardi L., Luciano E.) il volume:

Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà

*La Matematica nella Società e nella Cultura, dicembre 2015, Serie I, vol. VIII, n. 3*



Michele Pellerrey, 1983,  
bene tratteggia il processo che portò  
alla riforma della Scuola Media (1963)  
ed alla revisione dei suoi programmi  
(1979)

e  
l'influenza di E. C. (capitoli 7 e 9) su  
questi passaggi importanti



Arzarello e Bartolini Bussi (1998)  
riconoscono la traccia dell'esempio della  
Castelnuovo come

- richiamo alla scuola viva,
- richiamo ai problemi curricolari,
- richiamo al coinvolgimento degli insegnanti

nel 'lievito' che ha fatto maturare una '*via italiana alla didattica della matematica*'.

*‘nel mio piccolo’*

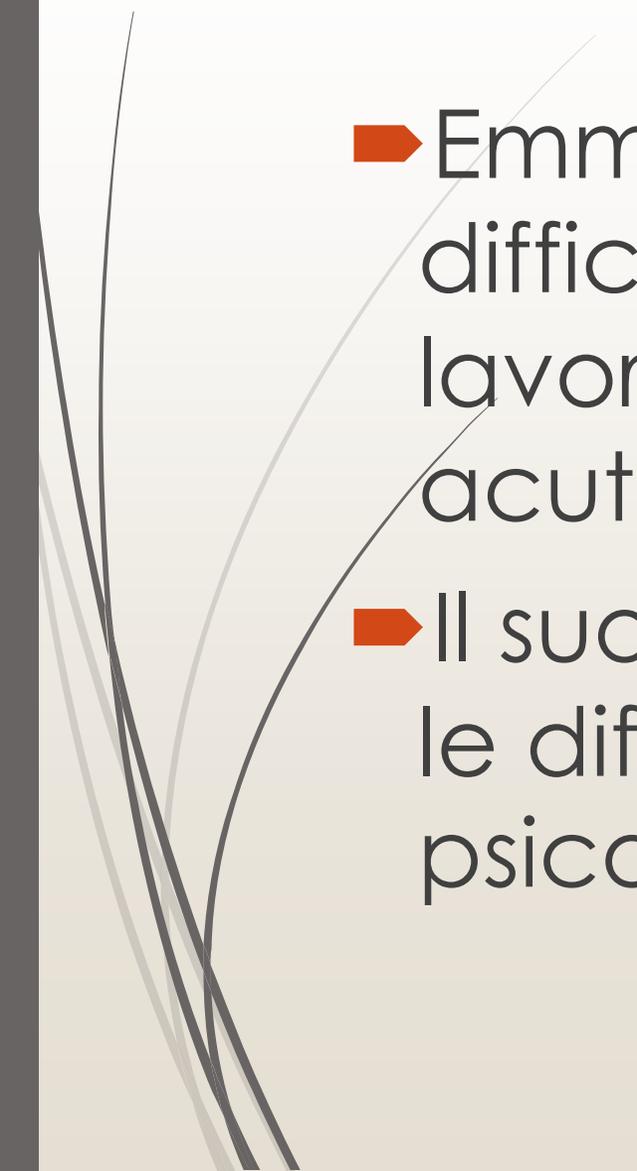
per non favorire la cancellazione della memoria:

alcune delle considerazioni e esempi che sottoporro alla vostra attenzione sono in sintonia con l'intervento di G. Spirito:

*Quale Algebra?*

al recente convegno Pristem di Venezia

<http://matematica.unibocconi.it/relazioni-convegno-di-venezias-2018>

- 
- 
- Emma Castelnuovo conosceva bene le difficoltà intrinseche alla matematica e lavorava per spianarle e renderle meno acute
  - Il suo lavoro era massimo nell'abbattere le difficoltà estrinseche legate a fattori psicologici e emotivi



Sua affermazione ricorrente era:

**Tutti commettono errori:**

- i ragazzi meno bravi, i bravi,
  - i matematici,
  - gli insegnati
- 
- I primi (in generale) rimangono bloccati
  - non esplicitano il loro processo di pensiero
  - non se ne assumono la responsabilità
  - non hanno spinta emotiva e curiosità per analizzare il modo in cui ragionano
- 



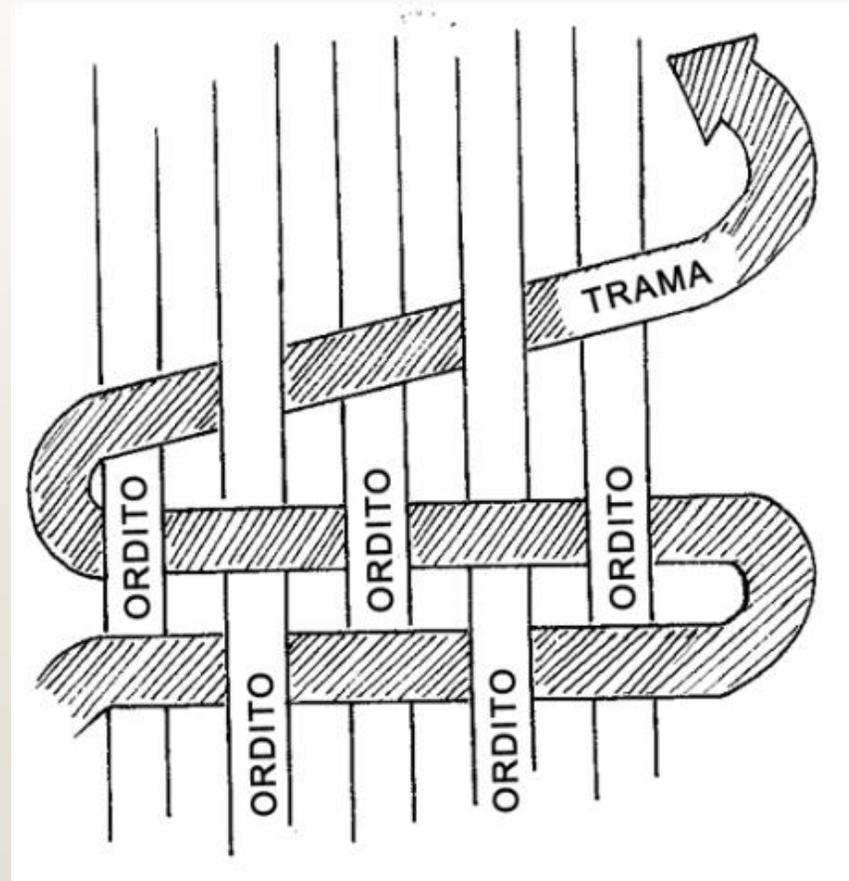
E. C. era anche in perfetto accordo con quanto Lucio Lombardo Radice ha scritto in 'L'educazione della mente', 1972, pag. 68:

**In ogni lavoro ...vi è la necessità di dedicare tempo alle acquisizioni di nozioni, di conoscenze sistematiche .....(omissis).**

**La scoperta scientifica è il risultato di un paziente impianto di apparecchiature, di infaticabile tenacia intellettuale .... (omissis).**

**Il genio-mago è un mito romantico menzogniero e diseducativo: 'il genio', poeta o scienziato, Leopardi o Fermi, è innanzi tutto un infaticabile lavoratore.**

# Instancabile tessitrice di Trama e Ordito





Cercava, ovunque possibile, di **evitare la settorializzazione** di temi e concetti: area e perimetro affrontati insieme per **rendere evidente la loro differenza, la loro co-variazione** con le tappe specifiche diverse e dissonanti

► un 'grimaldello':

i problemi duali per consentire la costruzione separata di idee e concetti che spesso sono confusi dai ragazzi

come per area di figure isoperimetriche e perimetro di figure equivalenti

## la separazione dei concetti

viene fissata, resa stabile,  
così da potere essere 'evocata', dalla  
rappresentazione nel piano cartesiano  
delle due 'situazioni':

- perimetro con area costante
- area con perimetro costante



*e introduce tacitamente esempi di funzione mediati da*

- immagini geometriche,
- materiali concreti,
- tabelle,
- linguaggio verbale spontaneo,
- lingua sincopata
- simboli ancora ancorati alla semantica particolare e geometrico-visiva e numerica



*(da «Connoisseur», aprile 1981)*

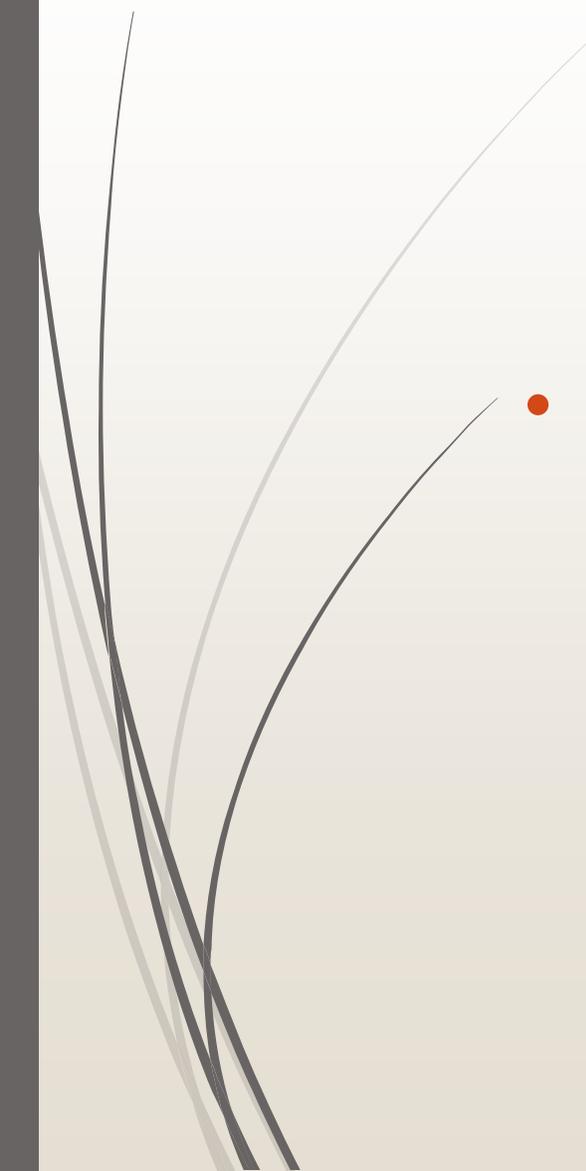


# Edelman

(Nobel per la medicina nel 1980)

nel 1978

- usa il modello della teoria darwiniana della selezione tra gli individui di una popolazione che competono tra loro
- **come metafora per descrivere aspetti evolutivi del cervello, per il suo sviluppo, per aspetti del suo funzionamento**

- 
- 
- gli stimoli generati dall'esperienza favoriscono il rafforzamento o l'indebolimento dei circuiti neuronali
  - nella fase del rientro, l'enorme quantità di connessioni nervose vengono coordinate nello spazio e nel tempo dallo scambio di segnali rientranti che, in modo dinamico, connettono le diverse aree delle mappe neuronali



## ***Una grande responsabilità***

- tremendo dire:

**‘ Maria già è chiaro che non ce la può fare ’**

non posso più dire:

- ‘io ho appreso così.....’

- ‘mi ricordo che .....



I nostri percorsi sono 'marchiati'  
dalle nostre esperienze,  
generalizzabili ma non  
semplicemente trasferibili

Con Emma:  
cerchiamo di farci dire  
come pensano i ragazzi  
per 'agganciare' i loro percorsi

# Giochi di sponda tra sintassi e semantica

- 
1. Lente di ingrandimento su Emma
  2. Algebra e Aritmetica (pochi cenni)
  3. Sintassi e semantica in Geometria



# I libri per la scuola superiore (v. bibliografia)

- Saranno disponibili in Bacheca Drive 'Biblioteca di E. C.' curata dalle persone che si stanno occupando del riordino della Biblioteca donata da E. C. all'MCE
  - parte teorica x lo studente
  - schede applicative,
    - .. in fisica,
    - ... in economia,
  - Attività
  - schede storiche
  - cosa bisogna sapere
  - cosa bisogna sapere fare
  - Poi sezione esercizi per la 'pratica'

## Calcolo baricentrico

propongo una analisi didattica di una attività proposta da E. C. così come ci è arrivata attraverso il lavoro iniziale con le terze classi (Le Scienze 1970) e per l'Esposizione di Matematica del 1971 (Boringhieri, 1972)

- per grandi linee ..... ma
- con qualche dettaglio interessante per i 'giochi di sponda tra sintassi e semantica'



E. C. per tutta la sua attività di insegnamento *ha limato* quanto già introdotto ma era, anche, sempre alla ricerca di qualche *argomento 'fuori rotta'* per portare luce al corso di matematica spesso pesante e noioso

- riconosceva a Luigi Campedelli il merito di averla spronata in questa direzione (p. 35 di E.C., 1988a dell'elenco in sito MCE:

[www.mce-fimem.it](http://www.mce-fimem.it)

<http://www.mce-fimem.it/publicazioni/la-biblioteca-di-emma-castelnuovo>



un ex-allievo in occasione della consegna del Premio Nesi alla Castelnuovo, 2013, interviene esplicitando:

”..... i ragazzi avevano bisogno della Castelnuovo, ma anche che E. C. aveva bisogno dei ragazzi. “

- la didattica di E. C. si attivava nel rapporto con la classe e con gli allievi



nei *Documenti di una Esposizione, 1972*, un allievo scrive:

‘E’ molto bello perché ognuno di noi fa parte dell’insegnamento’.

Il lavoro sul concreto era:

- lavoro tacito con allievi
- sollecitazione a parlare e scambiare idee dubbi, domande, critiche
- e poi riassumere il lavoro in testo chiaro condiviso



## Calcolo baricentrico e alcune applicazioni;

- 1968-1969 per la prima volta in classe terza media, constatata 'la forza didattica' e il 'valore formativo'
- No attraverso la geometria proiettiva (Moebius), ma attraverso applicazioni concrete economiche/fisiche
- Sgombra il campo da questioni importanti, per se stesse, ma di 'intralcio' per il pensiero dei 13.nni:

**precisa** che baricentro non è centro dei pesi, è indipendente da campo gravitazionale, è centro delle masse e quindi valido anche sulla Luna

**lascia** che la comunicazione avvenga con un linguaggio familiare, si parla di 'pesi' pur sapendo che la connotazione perfetta sarebbe la massa

**usa e fa usare** la denotazione 'perfetta',  $m_i$  come un'ancora per non dimenticare

**richiama** la condizione di equilibrio della leva a proposito della proporzionalità inversa  
 $m_1 b_1 = m_2 b_2$

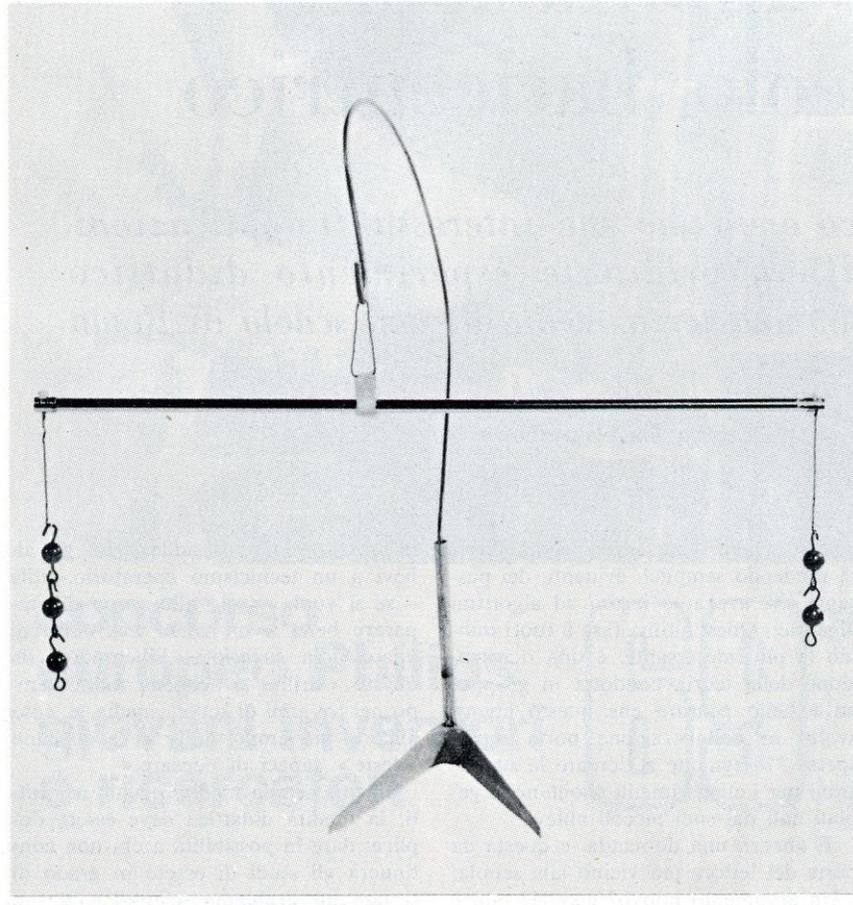
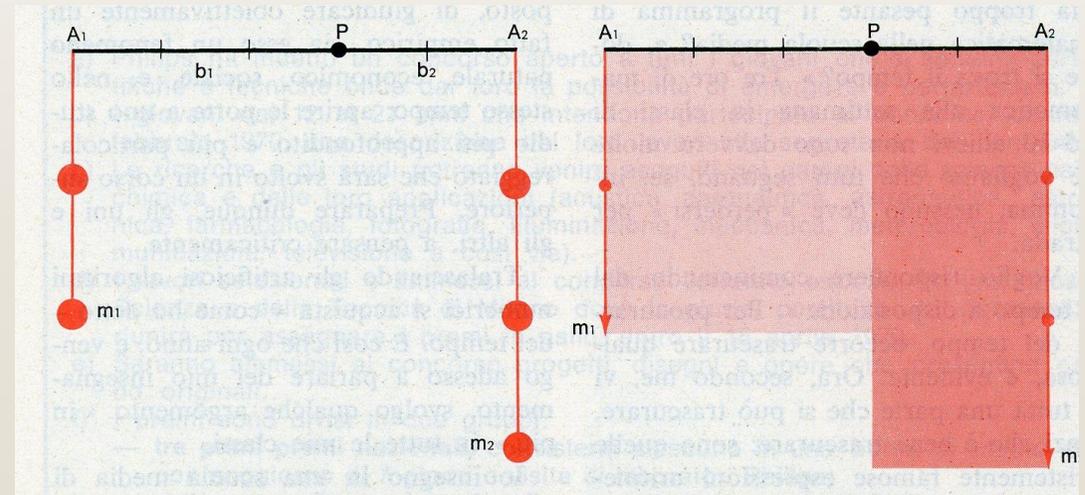


Foto da  
*Documenti di una  
esposizione di matematica  
e  
da Emmamatematica  
(Liceo Agnoletti, Sesto  
Fiorentino)*

**Focalizzazione su  
alcune tappe:**





coppia di pesi,  
infinite coppie di pesi,  
scelta di  $m_1$  e  $m_2$  in modo che  $m_1 + m_2 = 1$

baricentro può trovarsi fuori?  
Problema anticipatore per sgombrare il  
campo per dopo .....

significato geometrico dell' "equilibrio fisico"

$$2A_1 + 3A_2 = 5P$$

$$\frac{2}{5} A_1 + \frac{3}{5} A_2 = P$$



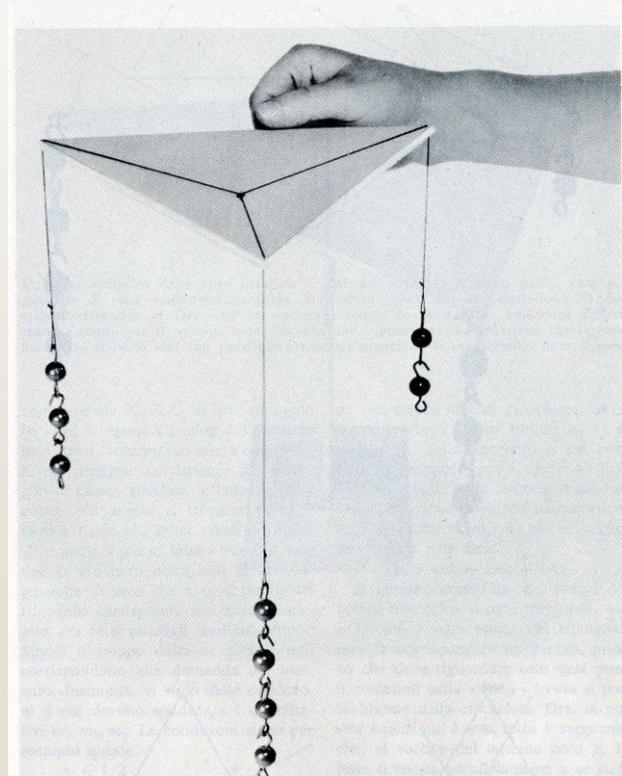
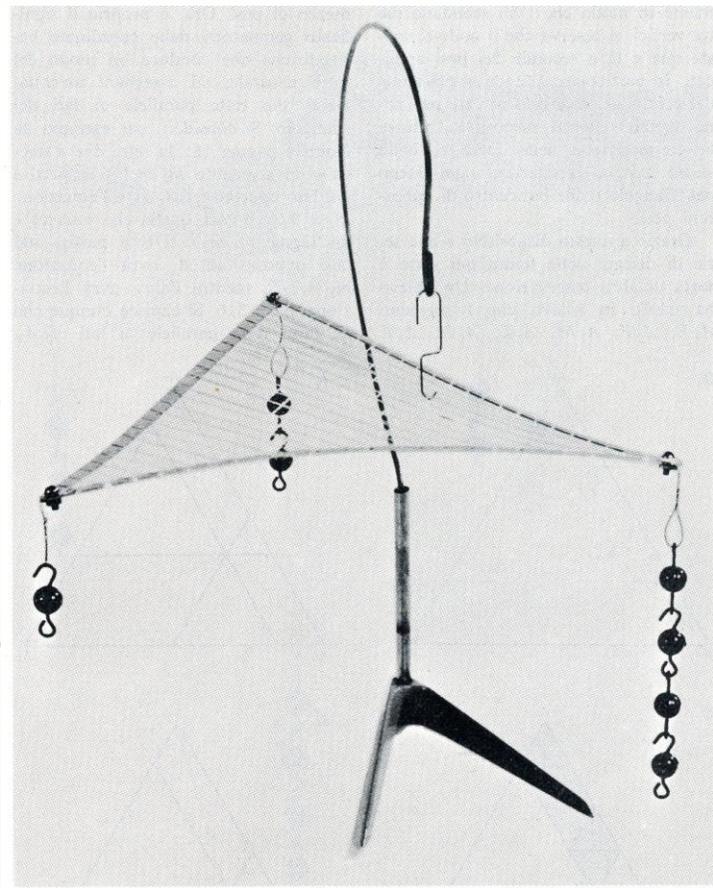
da due pesi a tre pesi  $m_1, m_2, m_3$

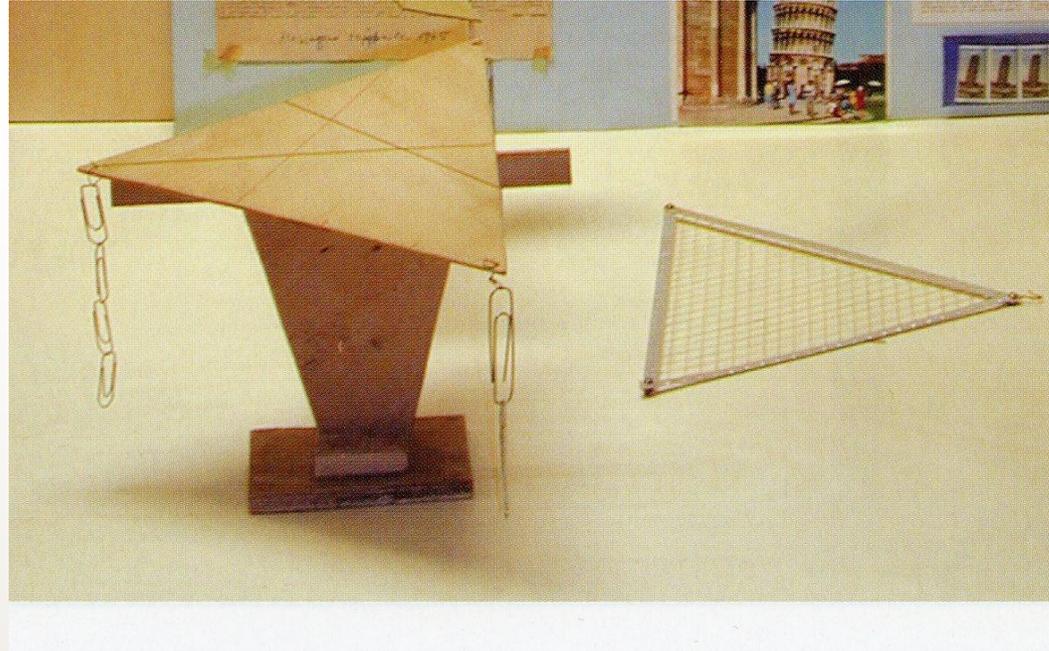
dalla retta al piano

dalla barretta al 'triangolo' senza peso

**Abbiamo** trovato il mezzo 'fisico' e il mezzo 'geometrico' per individuare la posizione di un punto del triangolo

- L'equilibrio fisico usato strumentalmente come **metafora** per facilitare i ragionamenti e le analogie





una 'suggerzione fisica' permette di dare nome, cioè, una 'equazione' alle rette del triangolo

Retta come 'lama di coltello' sul quale il triangolo si bilancia

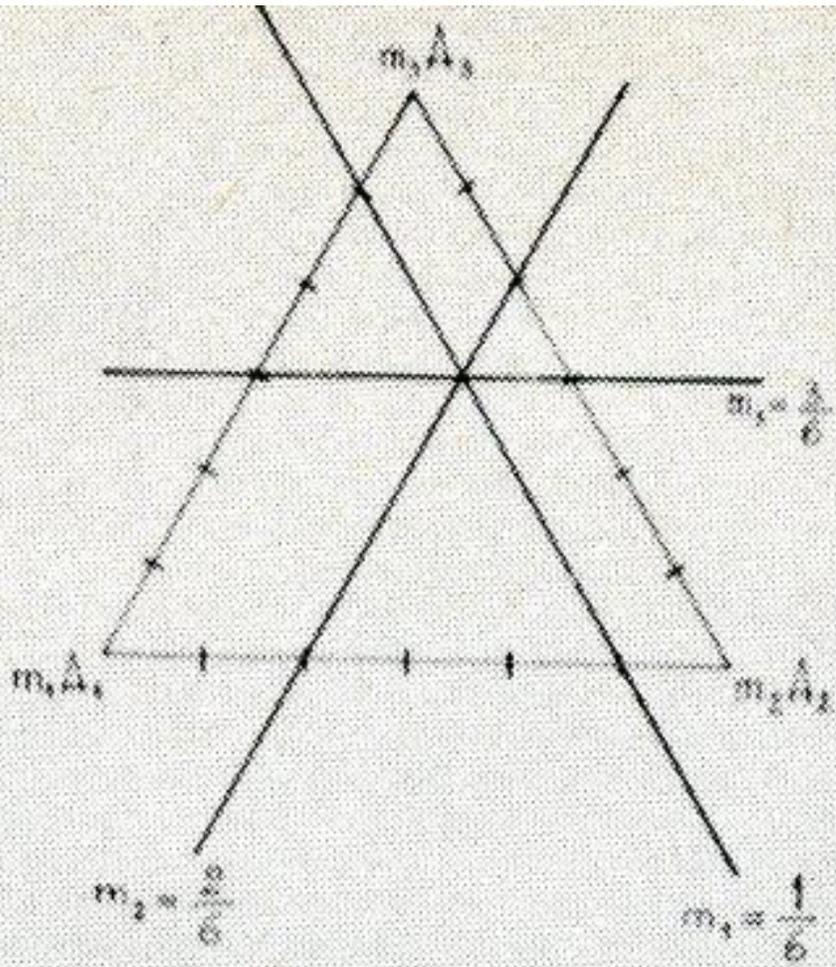


rette per un vertice,

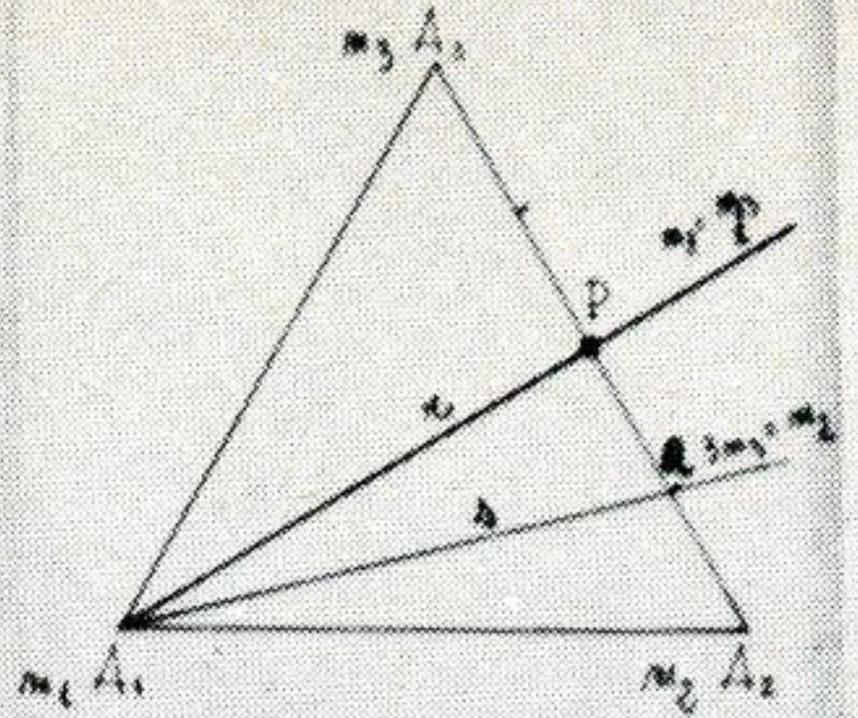
torna l'idea della 'lama di coltello'!

rette per un vertice e punto medio del lato  
opposto

è come nel caso della barretta



a



b

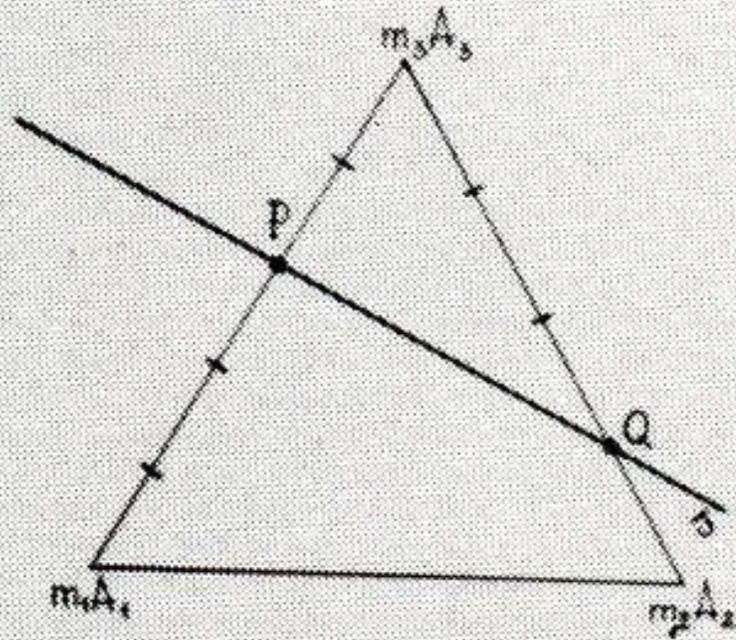


## Retta generica, ma particolare (!!)

il numero delle parti in cui sono divisi i lati non è uguale

- ▶ Triangolo in equilibrio su retta s:  $m_3$  deve equilibrare  $m_1$  e  $m_2$ :  
 $m_3$  spezzato in due parti  $m'_3$  in equilibrio con  $m_1$  e  $m''_3$  in equilibrio con  $m_2$

Prendo i Pesi 3, 1, 2



$$m_3 = m_3' + m_3''$$

$$= 2m_3' = 3m_1$$

$$3m_3' = 1m_2$$

$$m_3' + m_3'' = \frac{3}{2}m_1 + \frac{1}{3}m_2$$

$$m_3 = \frac{3}{2}m_1 + \frac{1}{3}m_2$$

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2$$



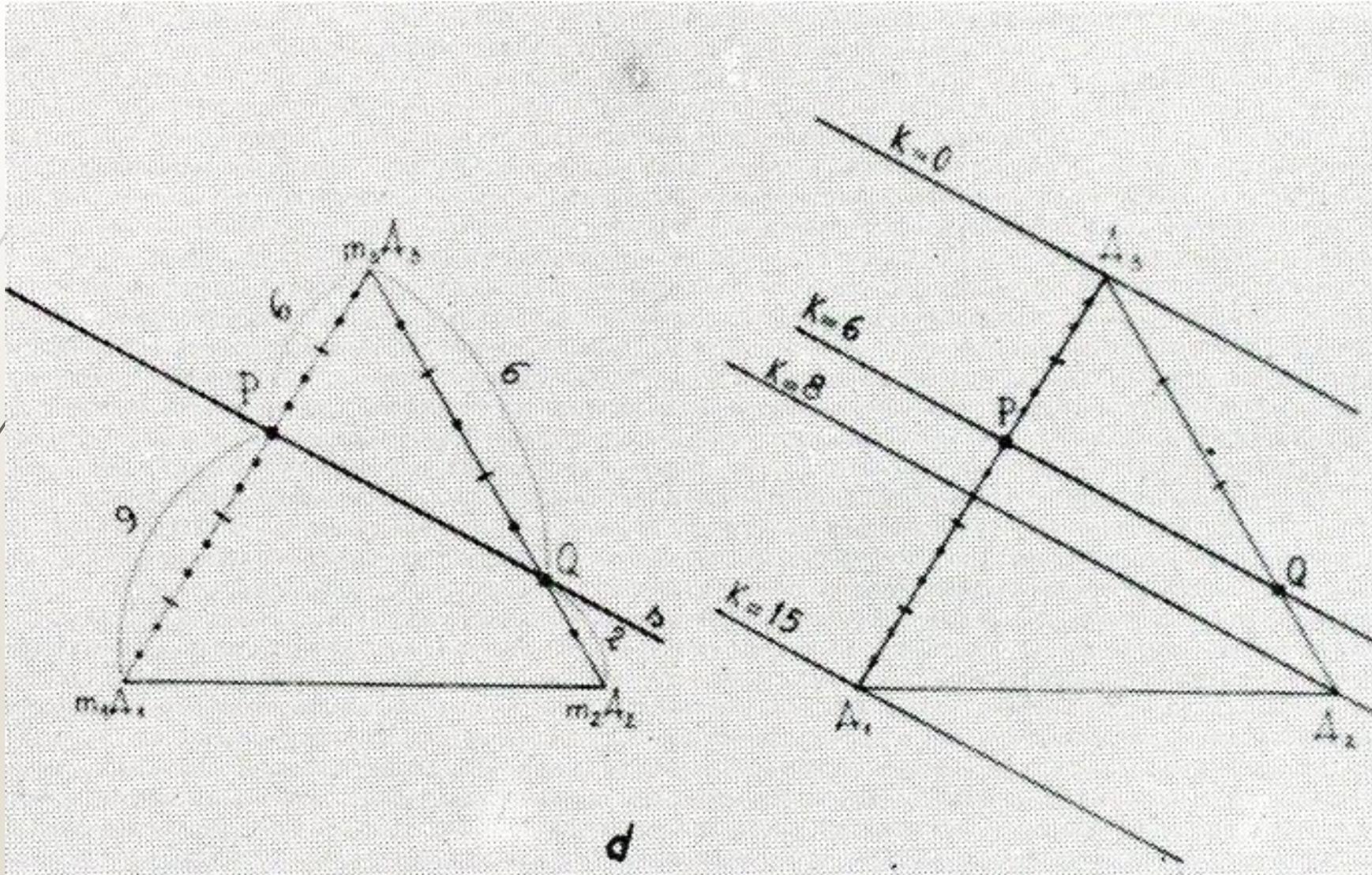
ma rapidamente ....

divido i bracci di  $m_3$  nello stesso numero di parti senza alterare niente:

prendo un multipli comune 6 e stacco 6 parti sui due bracci di  $m_3$

➤ se altero i bracci di  $m_3$  devo farlo nello stesso modo per quelli di  $m_1$  e  $m_2$

➤ e avrò 9 e 2 parti





## Passaggio alla forma non omogenea ..... utile nelle applicazioni

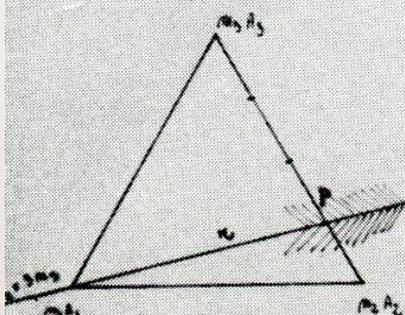
Ripartiamo da  $m_1 + m_2 + m_3 = 1$  che uso per  
eliminare  $m_3$  dalla  $6m_3 = 9m_1 + 2m_2$ ;

scrivo questa nella forma  $9m_1 + 2m_2 - 6m_3 = 0$ ;  
aggiungo 6 ovvero  $6(m_1 + m_2 + m_3)$  ....

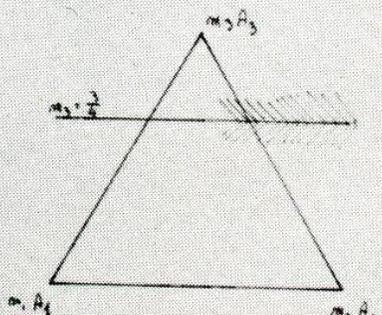
Otengo .....

Semipiani e disequazioni:  
pensando alla parte verso cui cade  
triangolo sulla lama.

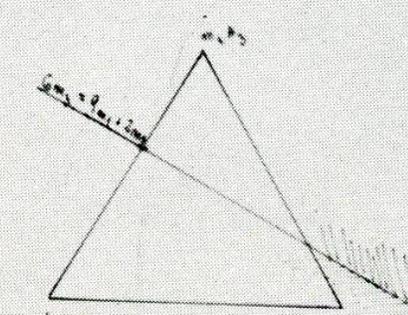
## DISEQUAZIONI



$\blacksquare m_2 \geq 3m_3$   
 $\blacksquare m_2 < 3m_3$  *f*



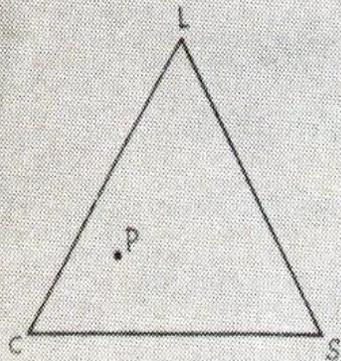
$\blacksquare m_3 \geq \frac{3}{4}$   
 $\blacksquare m_3 \leq \frac{3}{4}$  *g*



$\blacksquare 6m_3 \geq 9m_1 + 2m_2$   
 $\blacksquare 6m_3 \leq 9m_1 + 2m_2$  *h*

# PROGRAMMAZIONE LINEARE

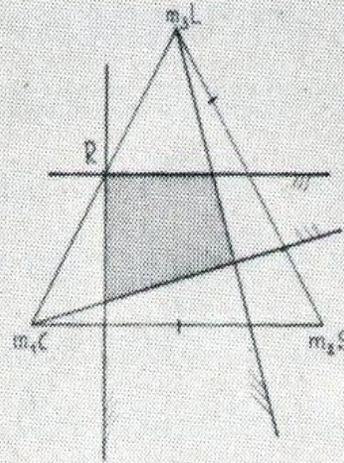
## Produzione della CIOCCOLATA



$$\begin{cases} m_1 \leq \frac{1}{2} \\ m_2 \leq 3m_1 \\ m_3 \leq 3m_2 \\ m_1 \leq m_2 + 3m_3 \end{cases}$$

$$p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 2 : 1$$

$$p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3$$



DETERMINAZIONE DELLA DIREZIONE DELLA RETTA DEI PREZZI

$$4m_1 + 2m_2 + 1m_3 = p$$

$$4m_1 + 2m_2 + 1m_3 = 0$$

$$\text{se } m_1 = 0$$

$$1m_3 = -2m_2$$

$$\text{se } m_3 = 0$$

$$2m_2 = -4m_1$$

$$1m_2 = -2m_1$$

- 
- ▶ Leggere attentamente per **entrare nella semantica della fabbrica di cioccolato**
  - ▶ **Vincoli:**
    - ▶ il quantitativo di latte non deve superare la metà del totale
    - ▶ 3 quantitativi di cacao richiedono 1 quantitativo di zucchero
    - ▶ Etc etc
  - ▶ **Zona di produzione del cacao**



## Retta dei prezzi

$$p_1 = 4 \quad p_2 = 2 \quad p_3 = 1$$

$$p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3$$

che è fuori del triangolo perché punti della  
retta non indicano cioccolate

prezzo zero stabilire la direzione



ma anche:

- concimi chimici
- colorimetria
- daltonismo
- probabilità

in *Documenti di una esposizione di Matematica*,  
Boringhieri, 1972 alle pagine 235/277

in *Le applicazioni del calcolo baricentrico*, Le  
Scienze, Scientific American, 1970, 18 alle pagine  
11-21



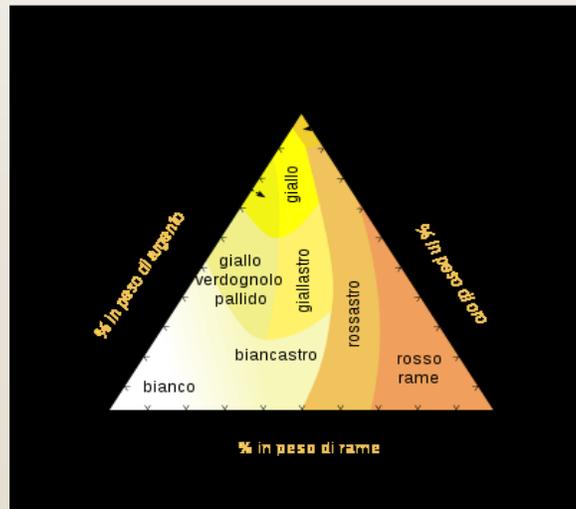
Molteplicità di esempi funzionali alla sostituzione morbida delle connotazioni semantiche forti con le connotazioni simboliche

Algebra come discorso orientato ad uno scopo, manipolazione algebrica orientata, legata, ingabbiata ad uno scopo  
..... essere dalla parte degli studenti!

Alcune *risonanze* utili per i docenti:



- teorema di Viviani
- Diagramma ternario o **diagramma di de Finetti** perché da lui usato in genetica delle popolazioni





➤ *Per non cancellare la memoria:*

- Carlo Felice Manara 1965, *Le Scienze*, Le Monnier, 2-3, 107-115, Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari
  - interessante compierne una analisi comparata di organizzazione e di linguaggi espositivi,
    - anche nei 'matematici' di professione che si interessano di didattica il linguaggio si 'ammorbidisce'
- Campedelli M.G., 1988, Una proposta didattica, in *Atti Convegno Internazionale in onore di Luigi Campedelli*, Istituto 'U. Dini', Firenze, 203-217
- Gabriele Lucchini: [users.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-trv2a.pdf](https://users.mat.unimi.it/users/lucchini/rp-trv2a.pdf)



## 2018: Anno della Biologia Matematica /**Year of Mathematical Biology 2018**

<http://www.euro-math-soc.eu/year-mathematical-biology-2018/>

Matematica e biologia/ matematica per le scienze della vita.

Villani, V., Matematica per le scienze della vita

Nardi G., Bicocca Milano

Sgorbissa F., (non matematica, SISSA), 2010



Cavalli-Sforza L. L., 1962, La matematica nella ricerca e nell'insegnamento biologici



## 2. algebra come generalizzazione dell'Aritmetica (pochi cenni)

- ▶ i simboli sono segna-posto per numeri,
  - ▶ le equazioni sono 'eguaglianze numeriche',
  - ▶ le variabili sono manipolate pensando alle regole di base dell'aritmetica
- 
- ▶ Si tratta di una semantica che pensiamo sia ed è la più familiare per i ragazzi
  - ▶ ma meno familiare di quanto si pensi e si possa pensare!

**Una manipolazione quantitativa ed al contempo qualitativa concilia livelli di competenza diversi**

- 
- ▶ aspetti sintattici e aspetti di significato
  - ▶ aspetti di 'forma', ovvero principi organizzatori dell' azione ispirati dalla percezione delle forme algebriche
  - ▶ aspetti orientativi della azione di trasformazione algebrica vs una manipolazione sintattica di tipo automatico (sic Derive)
  
  - ▶  **$3x+7 = 28$**   
quanto devo aggiungere a 7 ...



- $(14/(x+2))= 2$

il numero che entra in 14 due volte .....

- da  $5(3x-1)+2 = 72$  passo a  $5y+2 = 72$  ....

- In base 10 :  $18 = 9 + 9$  e  $81 = 9 . 9$

In base 8 :  $16 = 7 + 7$  e  $61 = 7 . 7$

cosa vediamo, cosa possiamo pensare, come trovare  
se ....., come provare che .....

- Provare che  $n^4 - n^2$ ,  $n$  in  $N$ , è divisibile per 12



## Navigare con l'Algebra tra Scilla e Cariddi:

gorgi attrattori, pericolosi, instancabili risucchiatori, ma, l'uno necessario per non cadere o rimanere in potere dell'altro

- recuperare l'uso dei "processi completi" nell'ambito dell'algebra aritmetica

ovvero, processi che richiedano di fare almeno:

- una **congettura** con relativa formalizzazione (inizialmente effettuate dall'insegnante) su qualche proprietà numerica
- una **verifica** per casi
- una **manipolazione** algebrica
- una **interpretazione** del risultato



Qualche altro esempio, con 'richieste' volutamente diverse tra loro:

- "Dimostrare che il prodotto di quattro numeri interi successivi è un numero intero multiplo di 24
- Problema: Due numeri naturali la cui somma sia 10 hanno i quadrati con la stessa cifra delle unità. E' vero oppure falso?

Inoltre la differenza di tali quadrati è un multiplo di 10. Prova qualche caso (!!!) e dimostralolo in generale

- 
- Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è sempre un multiplo di 6.

In una scala da 1 a 5, quale è la probabilità che l'affermazione precedente sia vera?)

- con sistemi algebrici è difficile

$$n (n + 1) (n + 2) = n^3 + 3n^2 + 2n = \dots\dots\dots$$

$$(n - 1) n (n + 1) = (n^2 - 1) n = \dots\dots\dots$$

- pensando a come sono distribuiti i multipli di tre sulla retta numerica è intuitivo.
- pensando ai possibili resti delle divisioni per tre è aritmeticamente chiaro



➤ Per moltiplicare rapidamente due numeri con la stessa cifra delle decine e le altre cifre sommate danno dieci ..

➤ moltiplico tra loro le cifre delle unità e ottengo la parte destra del numero

➤ poi moltiplico le cifre delle decine per il numero successivo e ottengo la parte sinistra



Ma anche usare esempi 'diversi' per valorizzare semantica e sintassi degli ambienti 'ordinari':

Sia  $E$  l'insieme costituito dai numeri pari, dotato dell'operazione di moltiplicazione.

Definiamo in  $E$  'numero primo' un numero che non ammette fattorizzazione in  $E$  stesso.

- Individuare alcuni  $E$ -primi e alcuni  $E$ -composti
- Scomporre 60 nel prodotto di  $E$ -primi; cosa si osserva? (non unicità della scomposizione in  $E$ -primi)



**3. Geometria e Geometria: dialogo tra semantiche come guida ad un rinnovato valore delle definizioni e alla fissazione di regole.**

**Procederò accennando a punti 'chiave' e dando riferimenti per espandere e completare**

- 3.1. Geometria iperbolica del piano di Poincaré**
- 3.2. Geopiano alla Geometria del taxi**

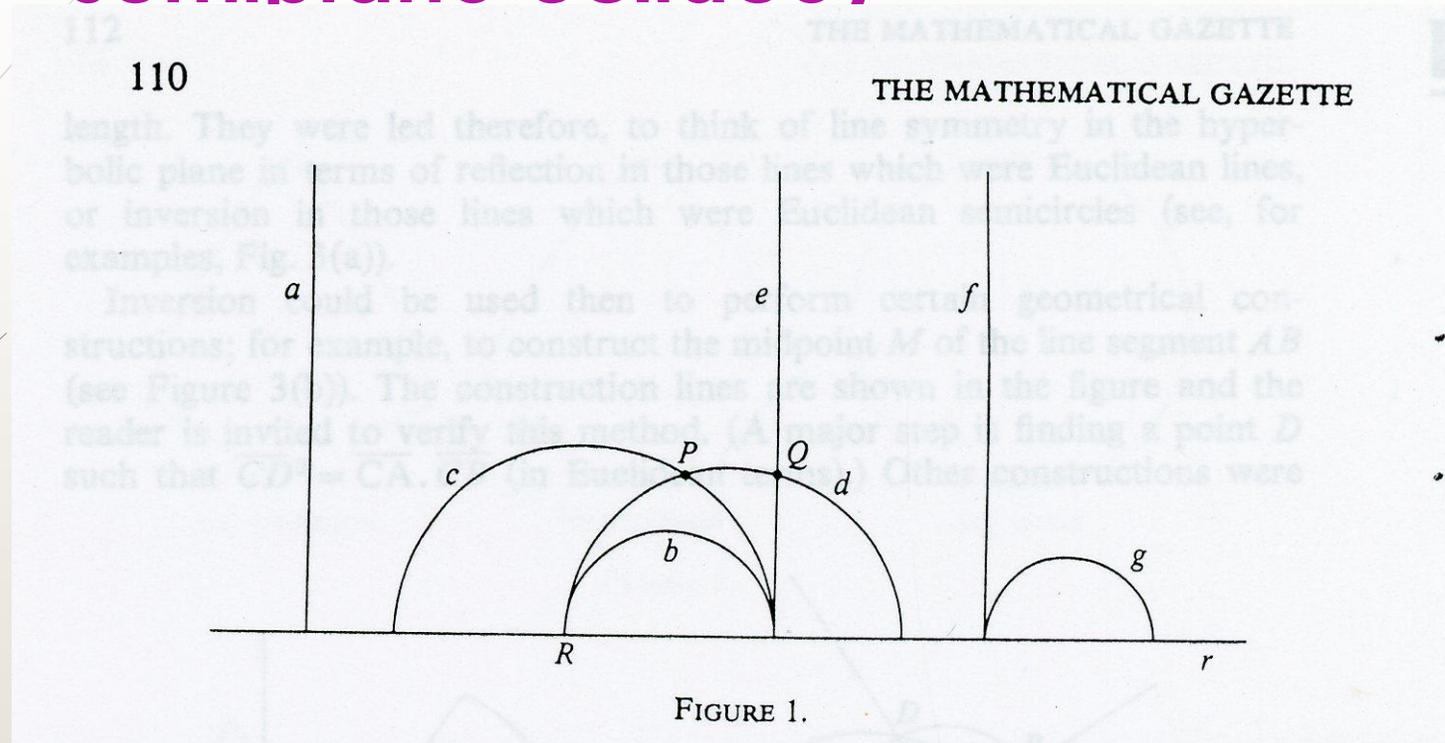


***‘Prendiamo le distanze dalla distanza  
pitagorica’***

***‘Alla ricerca di aspetti inconsueti di oggetti  
familiari’***

***‘Per separare il valore connotativo dei termini  
dal valore connotativo ‘aggiunto’ dei modelli  
nei quali i termini prendono denotazione’***

### 3.1. Il piano di Poincarè (strutturato in un semipiano euclideo)

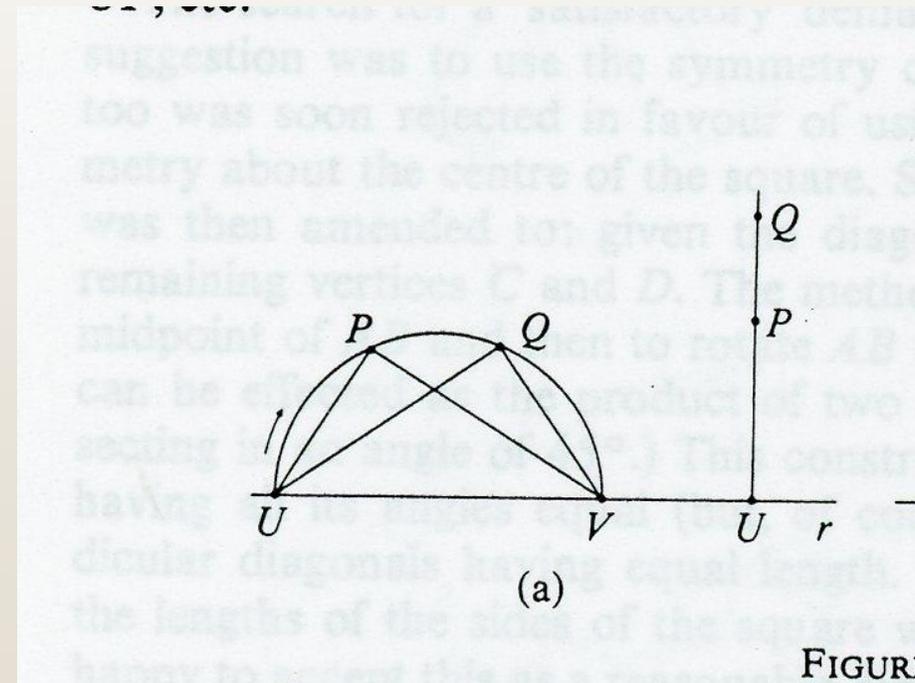


Piano, punti impropri, rette: secanti, parallele, iperparallele

## Simmetria assiale:

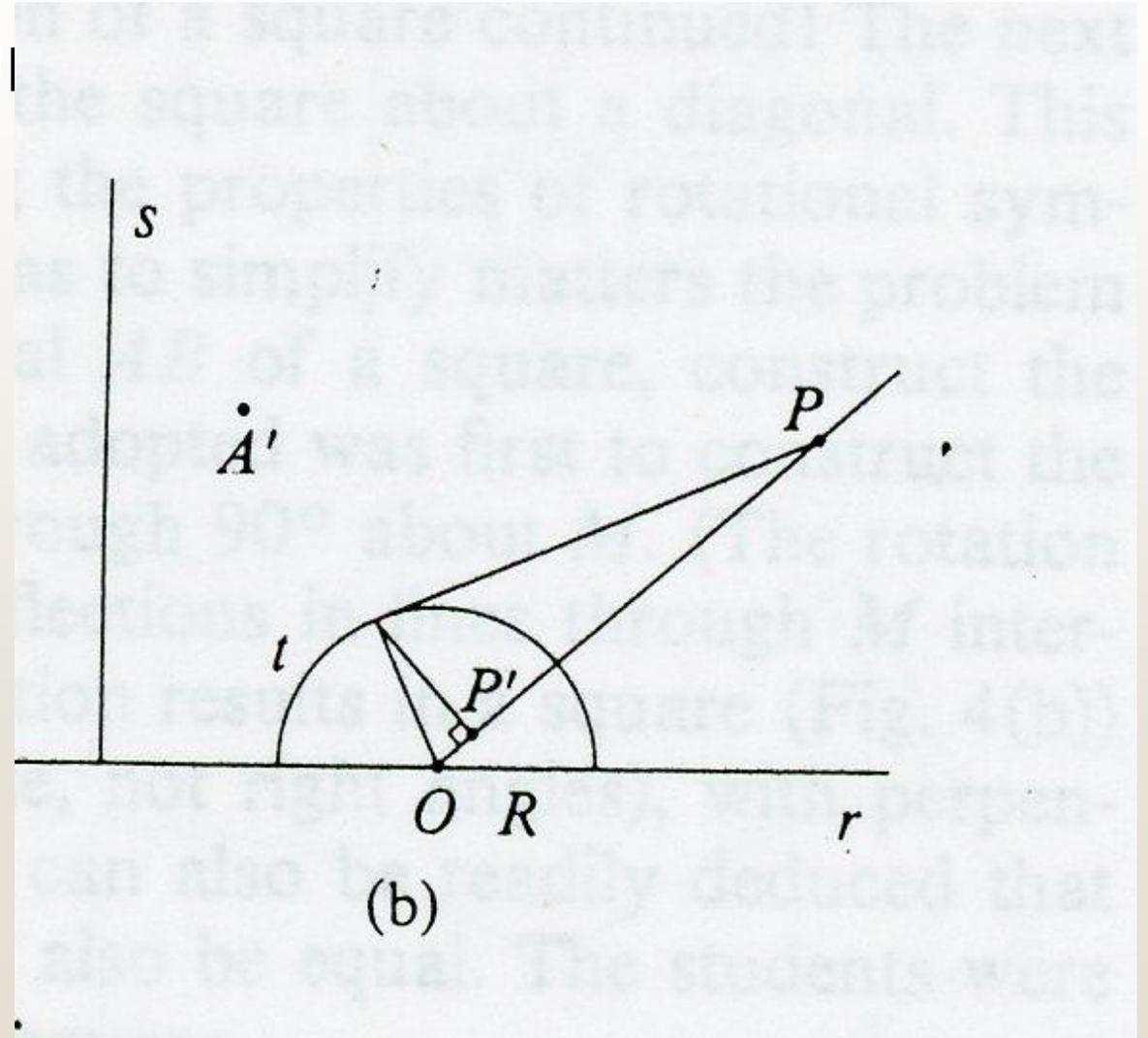
come nel piano euclideo per rette di tipo 1  
mentre per rette di tipo 2: l'inversione  
circolare data in termini euclidei

la distanza: ....



Si può controllare che la Simmetria assiale nel piano di Poincarè è:

- corrispondenza biunivoca
- involutoria,
- conserva le distanze,
- manda rette in rette,
- conserva le misure angolari



???

valgono ancora le proprietà delle figure legate al parallelismo, alla equidistanza da una retta, alla somma degli angoli???

► *'asse di un segmento come luogo dei punti equidistante dagli estremi'*

**NON** ha una traduzione costruttiva nel modello di Poincaré

► **Gli strumenti euclidei, riga e compasso, hanno nel Modello di Poincaré una diversa funzione**

**NON** posso 'trasportare con gli strumenti euclidei ordinari

‘asse di un segmento è la perpendicolare per il punto medio’

ma sappiamo costruire la perpendicolare **NON** ancora individuare il punto medio ma .... ‘asse di un segmento ....

« È l'asse di simmetria del segmento  $AB$  ».

Questa definizione è effettivamente ‘una definizione di tipo costruttivo’ anche nel Modello di Poincaré.

Consideriamo infatti il segmento  $AB$ :

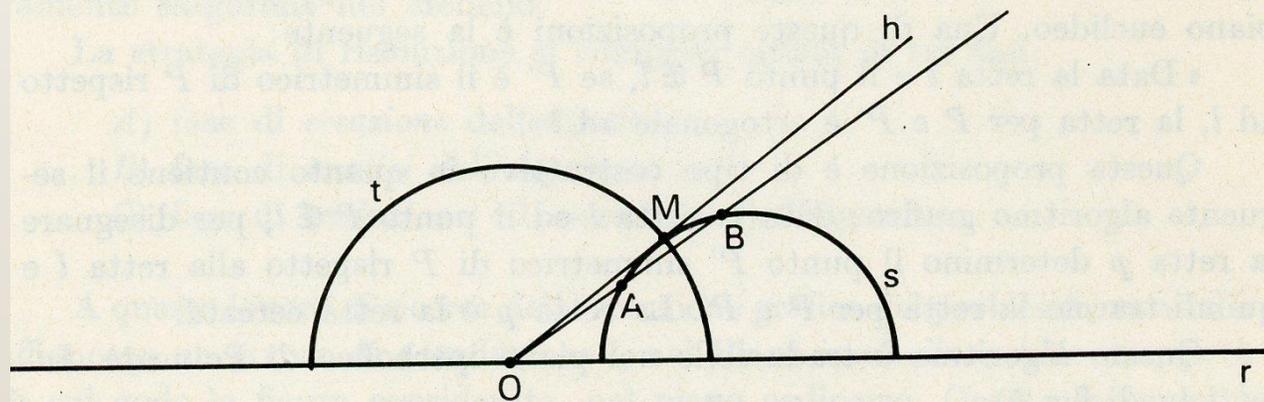


Fig. 6. - Asse di un segmento.



Costruzione della retta perpendicolare.

Consideriamo la retta  $l$  ed il punto  $P$ :

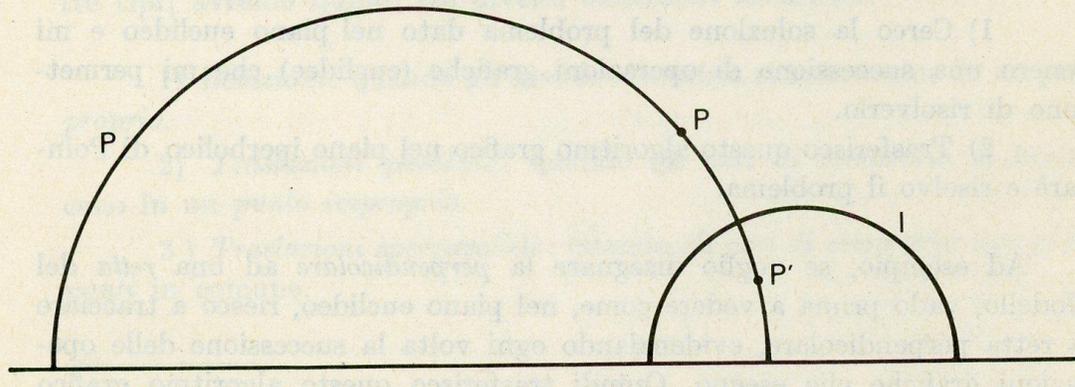
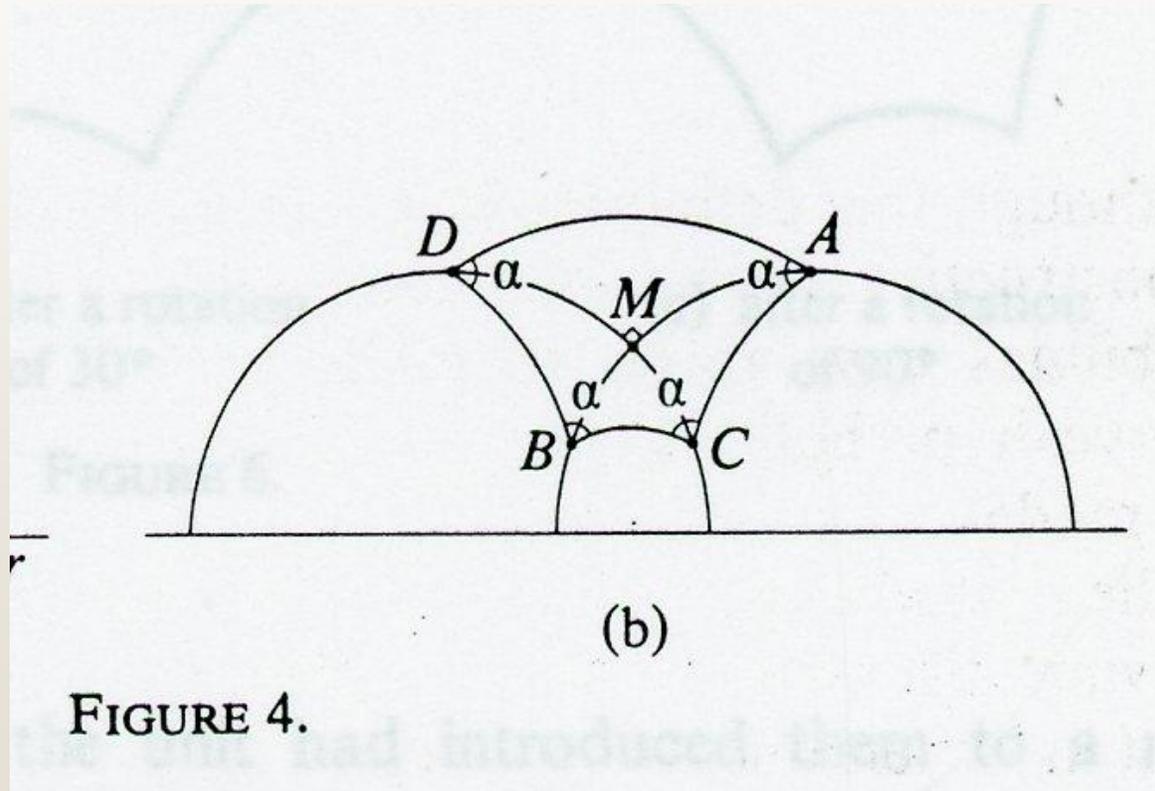


Fig. 5. - Retta perpendicolare.

La perpendicolare ad  $l$  tracciata:  
individuo di un punto  $P$  (non su  $l$ )  
il simmetrico rispetto ad  $l$  è il corrispondente di  
 $P$  nell'inversione circolare rispetto a  $l$   
(tracciamo il cerchio con centro su  $r$  passante  
per  $P$  e  $P'$ )

Faticosamente si conquista una modalità per costruire un quadrato:



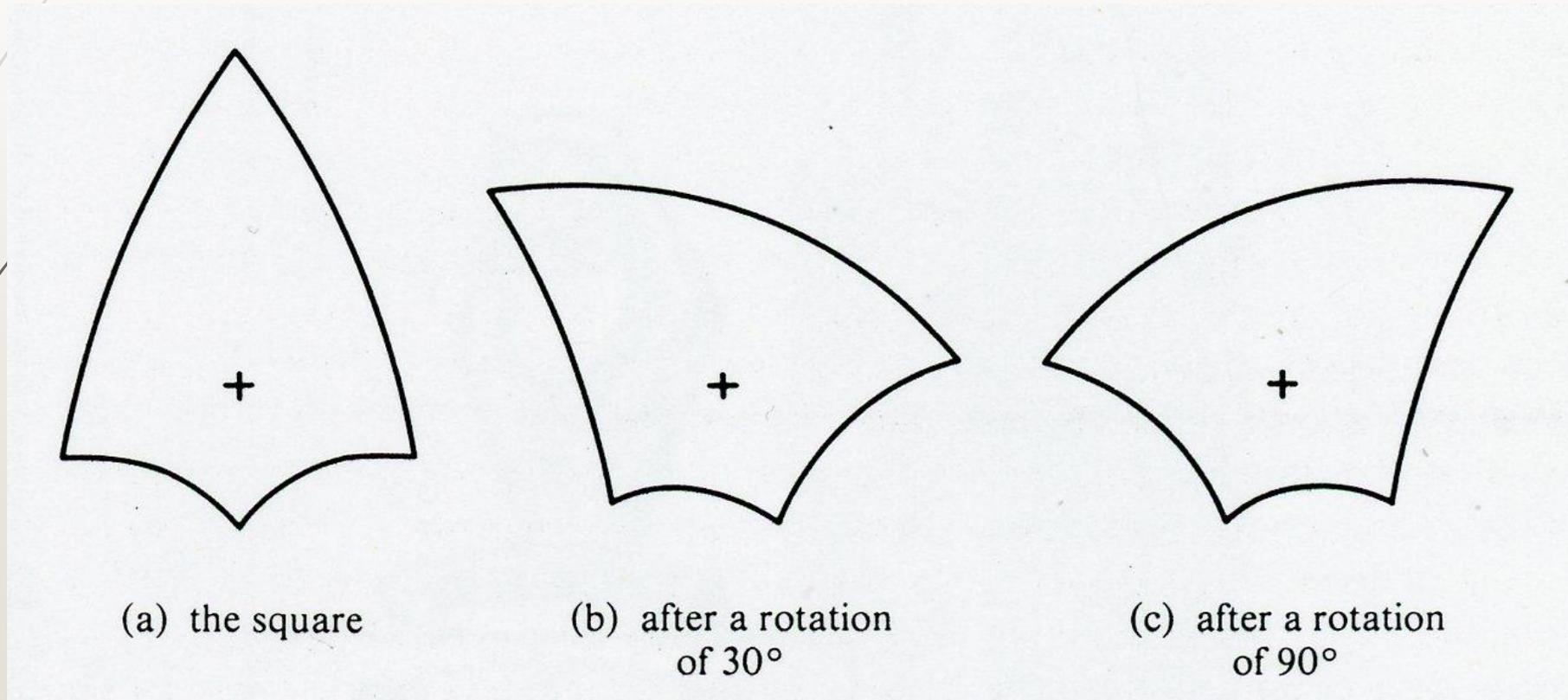


## Il quadrato è una figura:

- ▶ con lati uguali,
- ▶ lati opposti iperparalleli,
- ▶ diagonali uguali,
- ▶ diagonali ortogonali,
- ▶ somma degli angoli interni minore di  $360^\circ$ :

sarebbe meglio chiamarlo iper-quadrato (iperbolico) o ipo-quadrato (meno di ...)

Ora se artiamo da un quadrato inscritto in una circonferenza iperbolica possiamo vederlo trasformato per rotazioni:



Possiamo inserire nella circonferenza una figura qualunque e ruotarla!

Il lavoro fu progettato ed eseguito con l'aiuto di una P652 Olivetti ed un Plotter grafico orizzontale (allora il solo disponibile) che sicuramente influenzò le procedure operative;

cosa cambia, oggi, con i software di geometria dinamica?

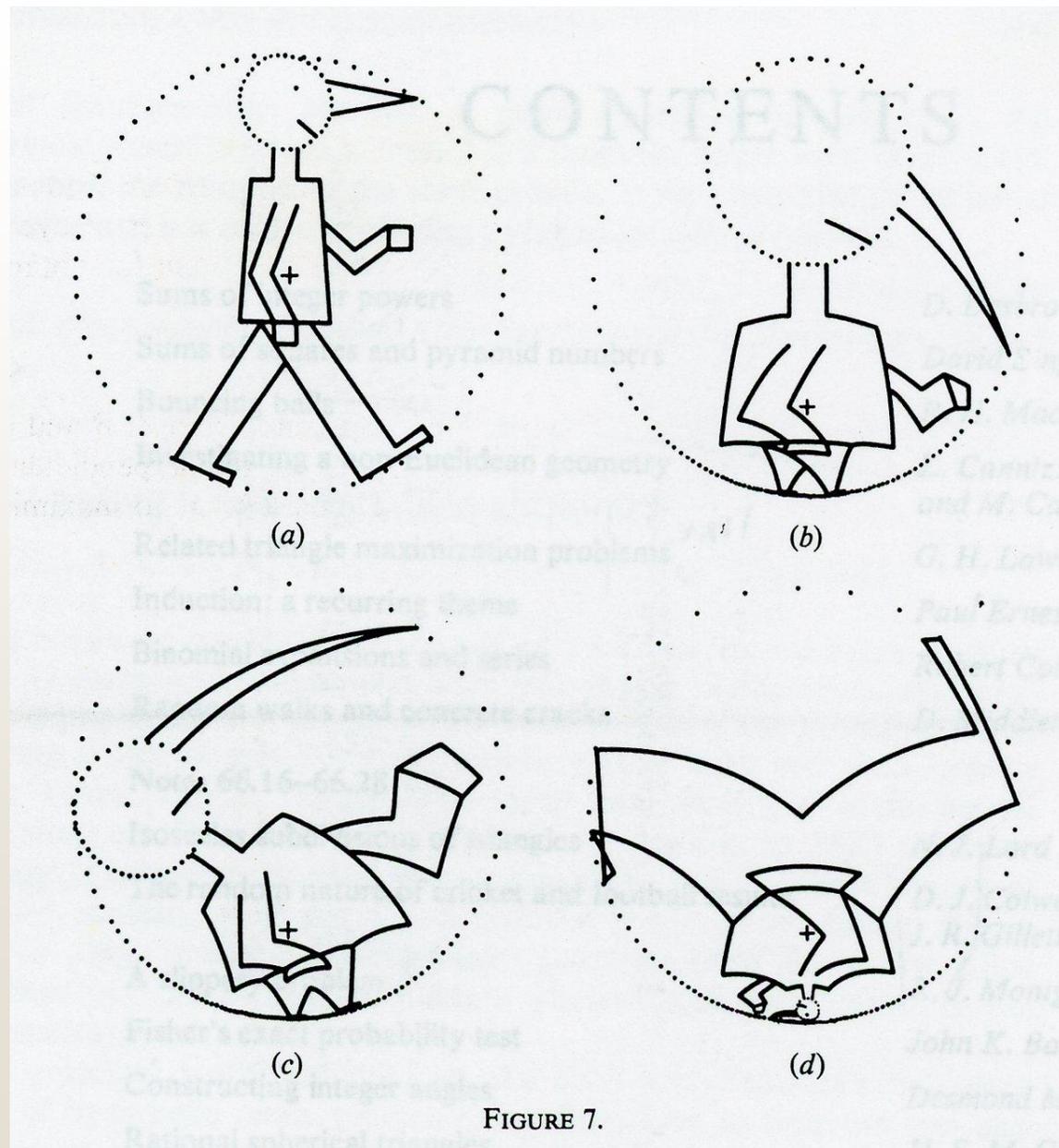


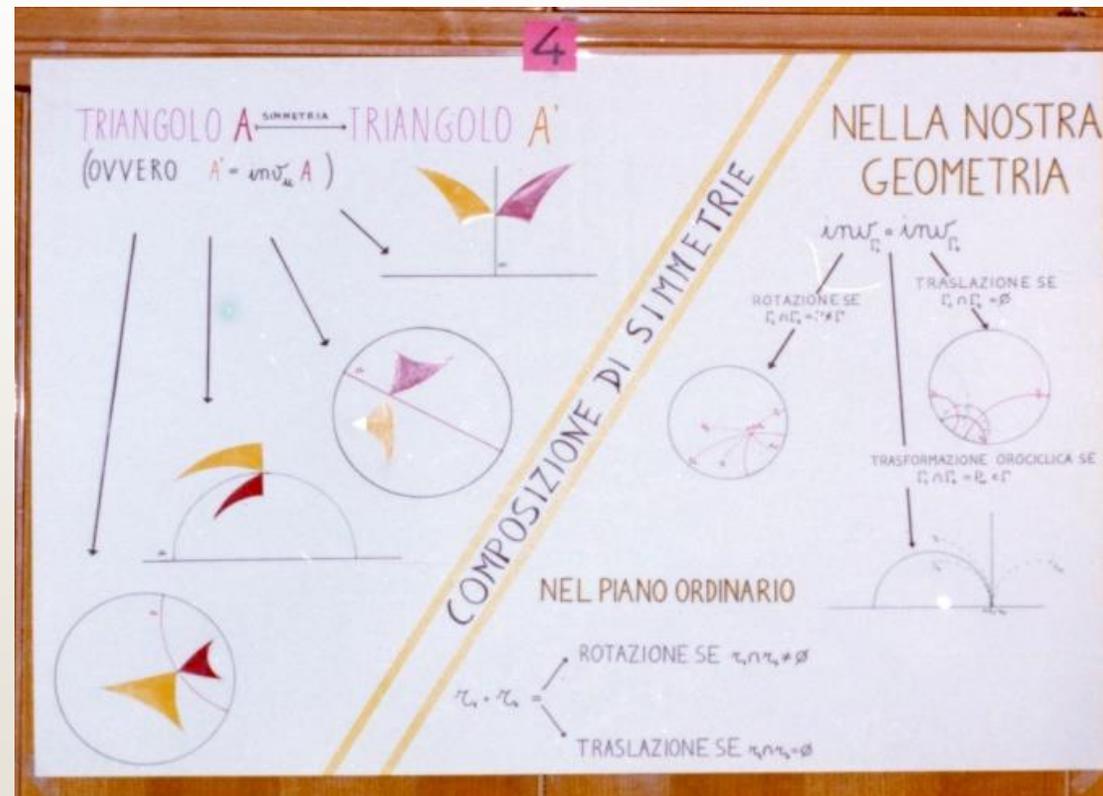
FIGURE 7.

L'esplorazione del piano iperbolico di Poincarè

- fu portata avanti nel Laboratorio Didattico del Dipartimento di Matematica di Roma La Sapienza con studenti del 4° anno dell'indirizzo Didattico;

- ha rappresentato l'omaggio a Emma Castelnuovo e Lina Mancini Proia in occasione del loro pensionamento; alcuni tabelloni con il lavoro furono esposti durante il Convegno Internazionale "Omaggio a Emma e Lina", Accademia dei Lincei a Roma nel 1979

Uno dei tabelloni esposti





## **risonanze utili per completare e espandere il lavoro e trovare altri riferimenti :**

- Cannizzaro L., Carosi M., 1981, Esplorando la Geometria del Modello di H. Poincare', *Archimede*, 1-2, 33-47
- idem, 1982, Investigating a non-Euclidean geometry, *Mathematical Gazette*, 66, 436, 109- 114
- idem con Cassieri P., Madonni A., 1982, 34° CIEAEM, Orlèans , 226-228

## **'per non dimenticare':**

- Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate sulla Mostra-Convegno 'Omaggio a Emma e Lina' alla Accademia dei Lincei, in 2015, 38A, numero 4 e in 2016, 39A, numeri 1, 2, 4 e 2017, 40A, numero 3 e 2018, 41A, numero 4

## 3.2. Il Geopiano pochi spunti per rinforzare e e differenziare 3.1. *ambienti usuali .. ....ma solo in apparenza*

➤ Caleb Gattegno (1911-1988)\*

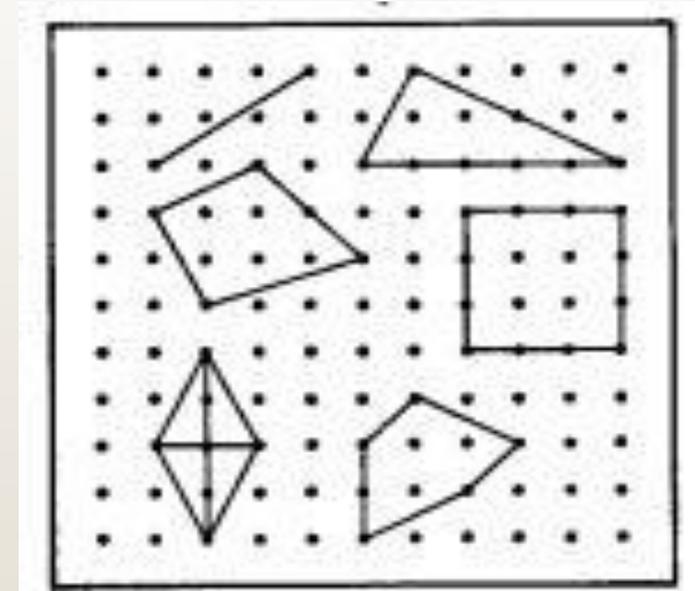
➤ per l'equiestensione

➤ per la isoperimetria

➤ per i numeri quadrati,.....

➤ Etc.

➤ \* ATM, Geoboards, a collection of ideas and starting points for primary + secondary classroom





Le slides che seguono (3.2.) non hanno fatto parte dell'intervento al convegno per evidente sovrabbondanza di materiale.

Gli spunti accennati, a vario titolo, senza trattazione organica, hanno rappresentato una 'fonte' di 'esempi curiosi' o di 'controesempi' per il lavoro di E. C. in classe



# In AMBIENTE (ZxZ) di Taxi-Geometria

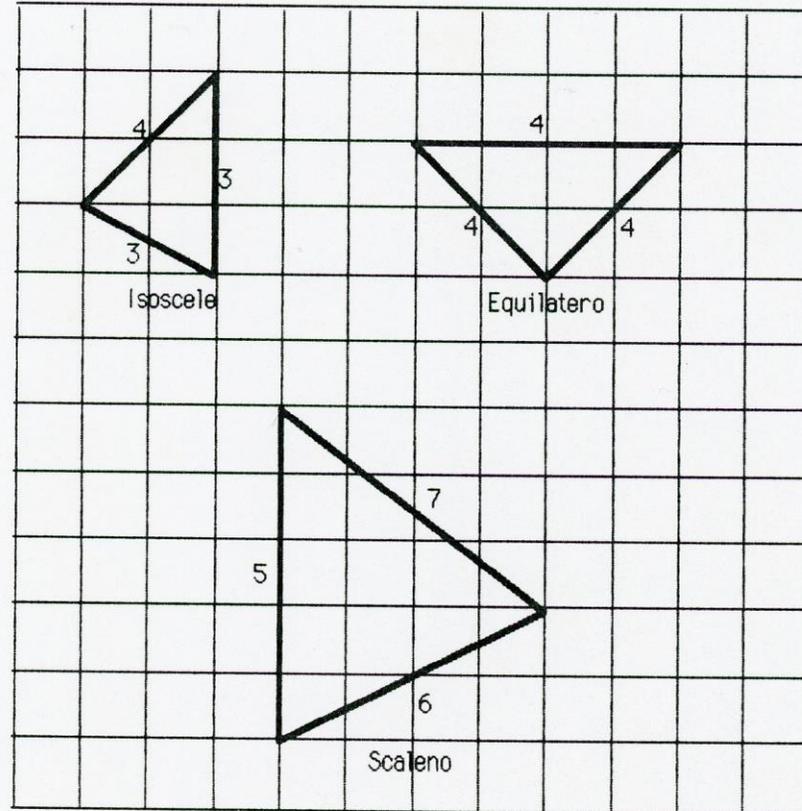


Fig. 3

# Addio! Ai criteri di congruenza

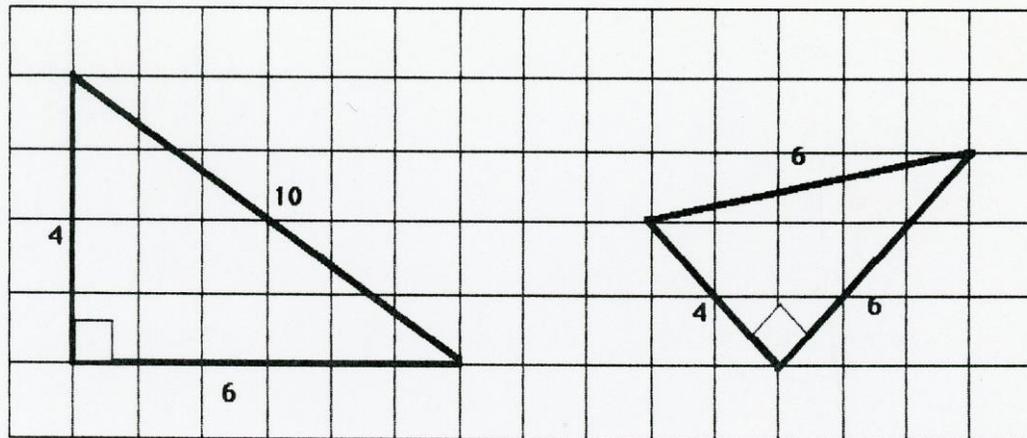


Fig. 4

Primo criterio di congruenza: L-A-L.

E che altro perdiamo??

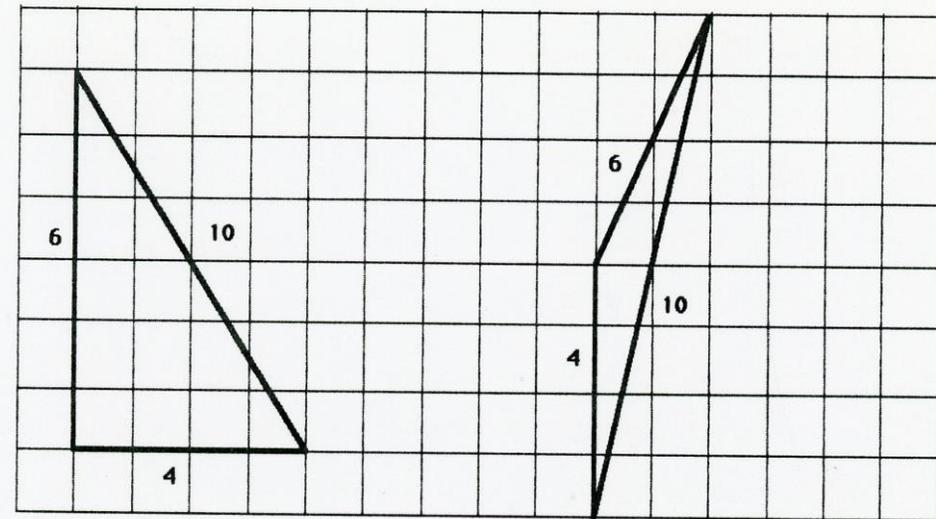


Fig. 6

Terzo criterio di congruenza: L-L-L o A-A-A.

# Vale Pitagora?

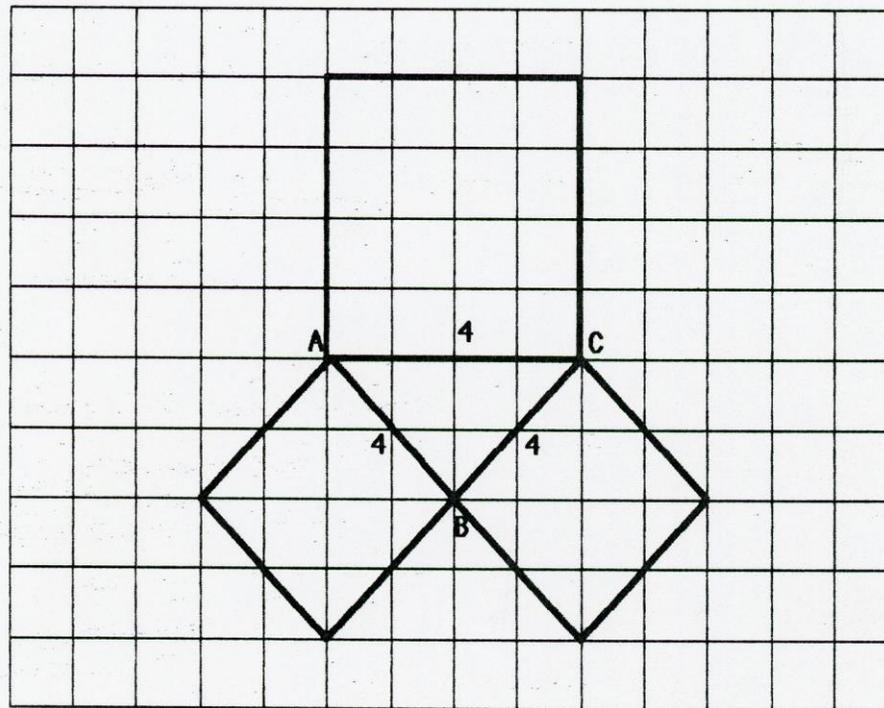


Fig. 7



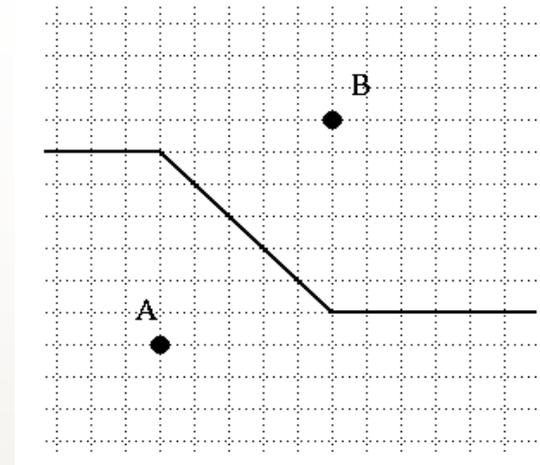
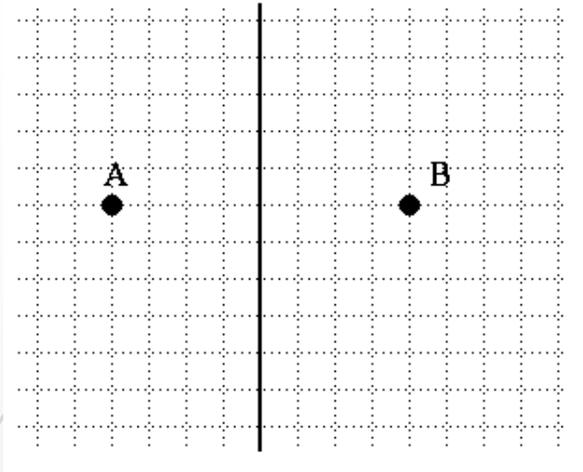
Occorre cominciare a 'rizzare le antenne' a 'guardare bene' e non solo a 'vedere'

Un'altra figura geometrica definita in termini di distanza è il luogo dei punti equidistanti da due punti fissati A e B.

➤ In geometria Euclidea: perpendicolare a AB che incontra AB nel punto medio, cioè l'asse del segmento AB.

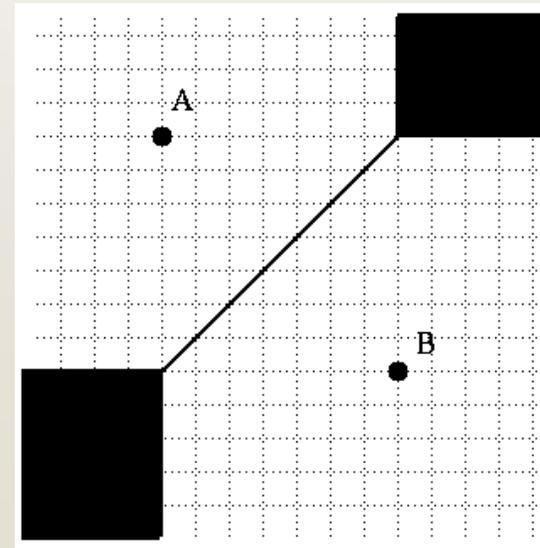
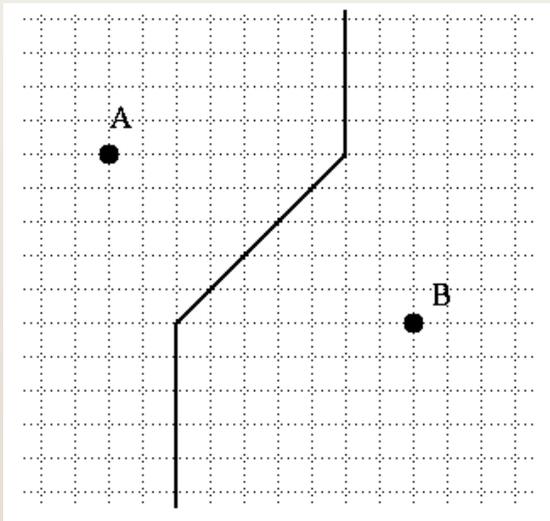
Non tutto è proprio semplice nella Taxi-Geometria.

➤ Si registrano casi diversi, 4 casi diversi



BRR punto medio??!

Esiete???



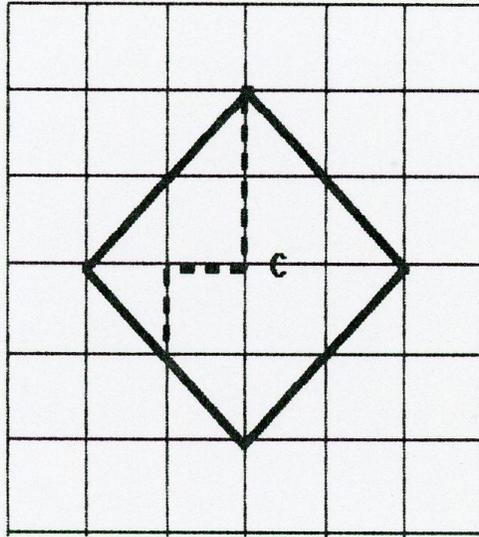


Fig. 2. -Taxi circonferenza di centro C e raggio 2.

Le circonferenze sono  
in realtà (??!!) quadrati  
i cui lati formano un angolo  
di  $45^\circ$  con gli assi coordinati

il rapporto fra la lunghezza di  
una circonferenza e il  
raggio non é  $\pi$

ma 8



## **risonanze utili per completare e espandere il lavoro e trovare altri riferimenti :**

- Krause E. F., 1973, Taxicab Geometry in *Mathematics teacher*, 695-706
- Krause E. F., 1975, *Taxicab Geometry*, Addison-Wesley, idem. 1986, Dover Ed.
- Citrini L., dispense 2006/2007, Geometria del taxi, 11 pp, [www.dti.unimi.it/~Citrini/MD/](http://www.dti.unimi.it/~Citrini/MD/)
- Maraschini W., 1984, Le isometrie nella geometria del taxi, *Archimede*, 36, 4, 190-199