

Costruzione della Pace: quale ruolo per la matematica?*

Giorgio Gallo

Pisa, 15 aprile 2010

1 Introduzione

Parlare di pace è sempre critico. Da un lato c'è una certa ambiguità della parola pace, parola spesso abusata. Già se ne era accorto, nel primo secolo, Tacito che nel capitolo 30 dell' Agricola mette in bocca a un capo dei britanni, Calgaco, queste parole con riferimento ai romani: “infine, dove fanno il deserto, dicono che è la pace”. Oggi le guerre vengono spesso presentate come operazioni di pace oppure interventi umanitari. Dall'altro c'è il fatto oggettivo che il termine pace ha una molteplicità di significati. Nell'ambito degli studi sulla pace, ormai presenti a livello internazionale nel mondo accademico da oltre 50 anni, si è progressivamente spostata l'attenzione da un'idea di *pace negativa*, come assenza di guerra o di conflitto violento, alla più ampia idea di *pace positiva*. Pace in quest'ultimo senso significa una situazione in cui a ciascuno e a ciascuna è assicurato “il pieno godimento di tutti i diritti e dei mezzi per partecipare pienamente allo sviluppo endogeno della società.” (Mayor, 2001, p.451).

Una distinzione importante che viene fatta nell'ambito degli studi sulla pace è quella fra *violenza diretta*, con le sue diverse forme, da quella fisica a quella psichica, e *violenza strutturale*. Mentre per la prima è usualmente ben definibile chi è che la compie, oltre che naturalmente chi la subisce, la cosa è molto meno chiara per quel che riguarda la seconda. Qui non c'è un attore

*Rielaborazione di una conferenza tenuta il 30 novembre 2009 presso l'Università di Camerino.

preciso a cui attribuire la responsabilità della violenza, ma la violenza ha origine nelle strutture sociali, politiche, economiche o anche culturali della società. Non che non ci siano responsabilità, ma si tratta di responsabilità collettive più che individuali. Avendo così caratterizzato i diversi tipi di violenza, potremmo dire che la pace negativa si contrappone alla violenza diretta, mentre la pace positiva si contrappone piuttosto a quella strutturale.

La costruzione della pace è quindi un impegno tutt'altro che banale, che va ben al di là delle azioni di intermediazione o di mediazione fra parti in conflitto e di interposizione fra belligeranti. Si tratta di un impegno che comporta la necessità di operare nella società per trasformarla profondamente, per cambiare quelle strutture da cui derivano ingiustizia e oppressione. Accettando un certo grado di schematicità, le caratteristiche di chi intende impegnarsi in questa direzione possono essere così individuate:

- un forte senso etico, un'etica che abbia l'Altro come criterio fondante;
- strumenti critici per comprendere/decifrare la realtà in cui viviamo;
- un approccio nonviolento nell'agire per cambiare questa realtà.

Il punto qui è cosa c'entri in tutto ciò la matematica. In effetti per quel che riguarda il primo punto la matematica in quanto tale c'entra poco. C'entra invece il matematico in quanto persona che vive in una data società e che con il suo comportamento può su essa influire. E può influire usando le sue specifiche competenze e conoscenze. Vedremo nel prossimo paragrafo il caso di un matematico che proprio in forza del suo impegno etico nei riguardi della pace riorientò tutta la sua attività scientifica.

Il secondo punto è quello in cui la matematica può avere un ruolo particolarmente significativo. Analizzare e comprendere la realtà in cui viviamo comporta la necessità di costruire modelli mentali della realtà stessa, modelli intesi come strumento di apprendimento e come strumento che guidi nell'agire per modificare questa realtà. Questo richiede capacità di analisi e di sintesi, di astrazione e di induzione. Sono proprio quelle capacità che la cultura matematica fornisce. Vedremo nel terzo paragrafo alcuni esempi di come semplici modelli matematici possono aiutare ad affrontare e discutere concetti importanti dal punto di vista della pace.

Più critico può apparire il terzo punto. I collegamenti fra matematica e nonviolenza sembrano improbabili. Ma è proprio così? Ne parleremo nel quarto paragrafo. Alcune considerazioni conclusive sono contenute nell'ultimo paragrafo.

2 Un matematico pacifista: Lewis F. Richardson

A volte si tende a pensare che gli scienziati, soprattutto i matematici e i fisici, nella loro attività siano influenzati in modo molto limitato dal contesto sociale, culturale, politico ed economico in cui vivono. È il mito della neutralità della scienza. In realtà gli scienziati sono influenzati dall'ambiente in cui vivono, e ne è influenzata la scienza che essi producono. Questo non è dovuto solamente all'ovvio fatto che la società pone delle domande alle quali la scienza cerca di rispondere, ma più in generale è la temperie culturale e politica in cui essi vivono che ha effetti sul tipo di scienza che viene sviluppata. Interessanti considerazioni in questa direzione, con riferimento alla Germania di Weimar, vengono sviluppate da Forman (2002). Un esempio di questa interazione fra le problematiche della realtà in cui si vive e l'attività scientifica ci viene fornito dalla vita di Lewis Fry Richardson (1881-1953).

Dopo avere studiato fisica matematica, chimica, botanica e zoologia prima a Newcastle e successivamente a Cambridge, Richardson si interessò soprattutto alle applicazioni della matematica e della statistica. Il suo primo contributo riguarda la soluzione approssimata di equazioni differenziali. Successivamente, lavorando presso il servizio meteorologico, sviluppò uno schema per la previsione del tempo basato su sistemi di equazioni differenziali che è ancora usato oggi, anche se ai suoi tempi era inapplicabile.¹ Si occupò anche di turbolenza: il numero di Richardson è un parametro adimensionale nella teoria della turbolenza.²

La prima guerra mondiale ebbe un grande effetto sull'attività di Richardson. Le sue convinzioni etiche, che gli derivavano anche dall'appartenenza alla comunità quacchera, lo portarono al rifiuto di arruolarsi. Andò lo stesso al fronte lavorando con un'unità di ambulanze organizzata dai quaccheri. Quell'esperienza lo spinse a occuparsi del perché delle guerre, problema al quale dedicò gran parte della sua vita. Nel 1919, in un saggio dal titolo "Mathematical Psychology of War", successivamente ampliato nel 1939, Richardson propose un modello matematico basato su equazioni differenziali

¹In mancanza di calcolatori, Richardson immaginò lunghissime file di tecnici (60.000) forniti di regoli calcolatori, che si scambiavano risultati per mezzo di motociclisti.

²Per uno studio sulla vita e sulla attività scientifica di Richardson rimandiamo al lavoro di Hunt (1993).

per studiare le dinamiche che portano allo scoppio delle guerre³. Si tratta di un modello che ha punti di contatto con il modello preda-predatore sviluppato negli stessi anni da Volterra (1926).

In questo modello Richardson considera il caso di due paesi, potenzialmente nemici, che per comodità qui chiameremo *Egolandia* ed *Alterandia*⁴. Successivamente il modello verrà esteso al caso di più paesi. Richardson ipotizza la possibilità di misurare in qualche modo l'animosità o bellicosità di ciascuno dei paesi nei riguardi dell'altro.⁵ Una possibile misura potrebbe essere data dal livello degli armamenti espresso ad esempio in termini di budget militare. Abbiamo quindi due variabili: x , il livello di bellicosità di *Egolandia*, e y , il livello di bellicosità di *Alterandia*. Le equazioni che determinano l'andamento nel tempo di x ed y sono allora:

$$\frac{dx}{dt} = ky - \alpha x + p, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = lx - \beta y + q. \quad (2)$$

I coefficienti k e l , detti *coefficienti di difesa*, misurano in qualche modo sia la paura che un paese ha dell'altro, sia l'intensità con cui un paese tende a rispondere alle minacce dell'altro. Invece, α e β , i *coefficienti di costo*, rappresentano il costo che comporta il mantenere un dato livello di bellicosità e quindi un corrispondente livello di armamenti. Il costo può essere direttamente economico: un aumento del budget militare ha effetto sulla disponibilità di risorse per altri settori (la classica scelta fra burro e cannoni). Ma può anche essere politico: un'eccessiva spesa militare può portare a una perdita di consenso del governo. Infine, p e q , i *coefficienti di ostilità*, rappresentano l'ostilità che ciascuno dei paesi nutre nei confronti dell'altro a causa di vicende passate.⁶

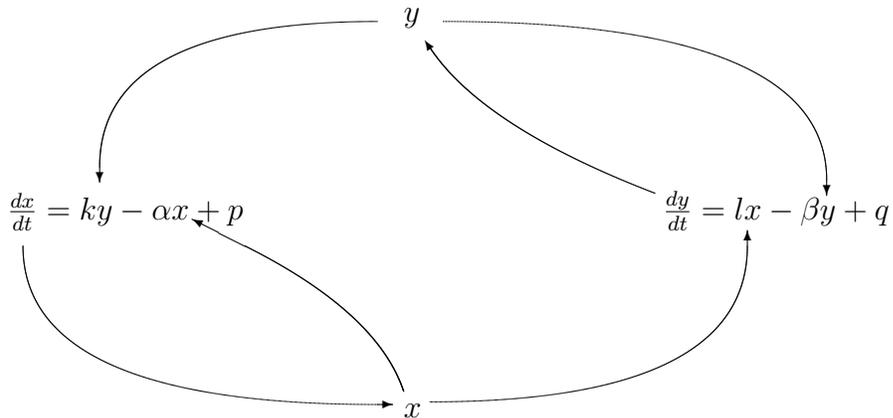
³È interessante il fatto che uno dei capitoli del suo saggio del 1919, dal titolo "Una apologia dell'uso della matematica", tratti proprio del senso dell'uso della matematica anche in riferimento alla pace e alla guerra.

⁴Nel modello originale del 1919 i due paesi venivano indicati con le lettere E e G . La prima sta per *Entente*, l'alleanza centrata su Regno Unito e Francia, e la seconda indica invece l'alleanza centrata sulla Germania.

⁵Richardson usa il termine *preparedness for war*.

⁶Ad esempio l'esistenza di rivendicazioni territoriali da parte dell'Italia nei confronti dell'Austria prima della prima guerra mondiale. Osserviamo che, mentre gli altri coeffi-

Le equazioni (1) e (2) ci dicono che, per ciascun paese, la variazione unitaria di livello di bellicosità cresce al crescere della bellicosità dell'altro, cioè al crescere della percezione della minaccia, e dipende anche dal livello di ostilità nei riguardi dell'altro paese. L'aumentare delle proprie spese militari produce però un effetto di fatica dovuto al coefficiente di costo che spinge a cercare di ridurre le spese stesse. Ci sono cioè due tipi di cicli, un ciclo che si autoalimenta (*ciclo positivo*), che tende a esaltare il livello di bellicosità e quindi degli armamenti, e due cicli che tendono invece a smorzare la crescita di tale livello (*cicli negativi*). Nelle figura seguente possiamo individuare i tre cicli. Il ciclo positivo è quello che fa sì che a un aumento di y corrisponda un aumento della variazione unitaria di x e quindi un aumento di x stesso con la conseguenza di innescare un ulteriore aumento di y . Gli altri due cicli, quelli negativi, fanno sì che a un aumento di una delle due variabili corrisponda un aumento del costo nella formula della derivata e quindi di conseguenza una tendenza alla sua diminuzione.



Il comportamento del sistema complessivo dipende da quale dei due tipi di cicli finirà per prevalere. Se prevale il ciclo positivo si innesca una corsa agli armamenti che finisce per destabilizzare il sistema. In una situazione di questo tipo diventa molto probabile lo scoppio di un conflitto oppure il collasso di uno dei due paesi.⁷ Se invece a prevalere sono i cicli negativi, allora

cienti si assume siano positivi, i coefficienti di ostilità potrebbero avere un valore negativo. In questo caso rappresenterebbero il livello di amicizia storica fra i paesi.

⁷Certamente gli effetti destabilizzanti della corsa agli armamenti nella guerra fredda furono una, anche se certamente non la sola, delle cause che portarono al collasso dell'Unione Sovietica.

è probabile che il sistema raggiunga una situazione di equilibrio, con il livello degli armamenti dei due paesi a livelli sostenibili, tali da non rappresentare per nessuno dei due una reale minaccia. Attraverso un'analisi qualitativa del sistema di equazioni differenziali, Richardson dimostrò che la stabilità o l'instabilità era determinata dal valore relativo dei prodotti kl e $\alpha\beta$. Il primo potrebbe essere visto come una misura globale della paura di essere aggrediti e della sensibilità alle minacce. Il secondo è invece una misura globale del livello di resistenza all'espansione degli armamenti ed alla aggressività esistente nel sistema formato dai due paesi. Analizzando le equazioni si trova che il sistema è instabile quando è $kl > \alpha\beta$, cioè quando fra i due paesi prevale l'esigenza di difendersi e la paura dell'aggressività dell'altro. Quando è invece $kl < \alpha\beta$, allora il sistema è stabile.

Studiando il modello Richardson si accorse che x ed y avrebbero potuto avere valori negativi e si chiese cosa ciò potesse significare. In questo caso piuttosto che di bellicosità si deve parlare di cooperazione: “come gli armamenti provocano contro armamenti, così l'assistenza evoca assistenza reciproca . . . Anche qui c'è una tendenza a ridurre la cooperazione a causa dell'affaticamento e del costo che essa comporta.” Per cui, conclude Richardson, il modello “rimane sostanzialmente valido anche quando la variabile bellicosità cambia assumendo valori negativi” (Richardson, 1939, p.7). Le costanti che compaiono nel modello in realtà sono tali solamente nel breve periodo. Esse possono cambiare, sia pur lentamente, nel tempo, anche in risposta a politiche orientate alla costruzione della pace. Richardson, proprio alla luce dell'analisi del modello, vede nella cooperazione internazionale, e in particolare nel commercio, uno strumento per ridurre la possibilità di guerre.

Può essere interessante analizzare i rapporti fra il modello di Richardson e la cosiddetta teoria della *Pace democratica*, formulata e discussa nella seconda metà del secolo scorso.⁸ Questa teoria nella sua versione ‘diadica’ postula che le democrazie non si facciano guerra fra loro, o che comunque sia raro che lo facciano.⁹ Le ragioni per cui ciò accade sono molto diverse. Una potrebbe essere il fatto che nelle democrazie, per la necessità di ottenere il consenso delle popolazioni, i processi decisionali sono più lenti e trasparenti di quanto non accada nel caso di regimi autocratici; si evitano così ambiguità che possono portare a vedere minacce laddove in realtà non ce ne sono

⁸Per una analisi dettagliata della letteratura sulla teoria della pace democratica rimandiamo al lavoro di Chan (1997).

⁹Questo non vuol dire che non possano essere molto aggressive verso stati non democratici.

(Farnham, 2003).¹⁰ Questo implica valori più bassi dei coefficienti di difesa k and l . Un'altra ragione è la maggiore difficoltà per un governo democratico di ottenere il consenso della popolazione a una politica di spese militari alte. Inoltre è più facile che si possano sviluppare movimenti di opposizione alla guerra.¹¹ Tutto ciò aumenta la possibilità che $\alpha\beta$ risulti maggiore di kl .

3 Egoismo o altruismo?

Nel *Leviatano*, pubblicato nel 1651, il filosofo inglese Hobbes afferma che, prima che esistessero i governi, lo *stato di natura* era caratterizzato da individui egoisti che competevano per le risorse in modo violento, in una guerra di tutti contro tutti, per cui la vita era “solitaria, povera, sgradevole, abbruttente e breve”. È questo un punto di passaggio fondamentale che caratterizza la nascita di quello che Revelli chiama il “*paradigma politico* della modernità”. Da un’idea di uomo “per sua natura portato alla convivenza e all’armonia con i propri simili perché più di ogni altro bisognoso e dipendente dagli altri” (Revelli, 2003, p.25) a un’idea di uomo, creatura naturalmente destinata alla guerra contro i propri simili. La cessione del monopolio della violenza allo stato farà poi sì che questa ‘guerra’ diventi competizione non violenta, a diversi livelli.

L’ipotesi che oggi troviamo frequentemente alla base della teoria economica e in particolare della microeconomia è quella del cosiddetto ‘comportamento razionale’ dell’individuo: ciascun individuo nelle sue scelte cerca di massimizzare i propri benefici, o la propria funzione di utilità, e di minimizzare i propri costi. Ciò ha come conseguenza che il comportamento competitivo sia considerato il più normale se non il preferibile. A questo si aggiunge la convinzione che la competizione garantisca a livello di società la migliore ed economicamente più efficiente allocazione delle risorse.

L’idea di competizione finisce per permeare la società a tutti i livelli, dalla scuola¹² al mercato del lavoro. E la competizione caratterizza anche le

¹⁰Ad esempio, nella vicenda del nucleare iraniano, nessuno sa davvero quali siano le intenzioni del governo iraniano, proprio per le caratteristiche autocratiche del regime che governa quel paese. Da qui la tendenza ad assumere come vera l’ipotesi più minacciosa.

¹¹Pensiamo ad esempio al movimento pacifista che ha cercato di contrastare la seconda guerra del Golfo.

¹²È rivelatore il seguente passo del discorso fatto all’assemblea della Confindustria dalla presidente, Emma Marcegaglia, il 22 maggio 2008: “Mi rivolgo, come mamma di una bambina di 5 anni, a tutti i genitori. Dobbiamo assumerci la responsabilità di garantire

relazioni fra stati a livello internazionale.

In realtà questa idea di competizione ed egoismo come caratteristiche fondanti del comportamento umano viene messa in discussione proprio dagli studi sull'evoluzione. “L'evoluzione è basata su una fiera competizione fra gli individui e dovrebbe quindi premiare solamente il comportamento egoista. Ogni gene, ogni cellula, ogni organismo dovrebbe essere progettato per garantire il proprio successo evolutivo a spese dei competitori. E tuttavia osserviamo cooperazione a diversi livelli della organizzazione biologica. . . . Ci sono molti esempi di cooperazione fra gli animali. Gli umani sono campioni di cooperazione: dalle società di cacciatori-raccoglitori agli stati-nazione, la cooperazione è il decisivo principio organizzativo della società umana. Nessuna altra forma di vita sulla terra è impegnata negli stessi complessi giochi di cooperazione e defezione. La questione di come la selezione naturale possa portare a comportamenti cooperativi ha affascinato i biologi dell'evoluzione per diverse decadi” (Nowak, 2006, p.1560).

“La scala e la complessità delle società umane ci pone di fronte ad un importante enigma evolutivo. In ogni società umana, le persone cooperano con una molteplicità di individui non collegati fra loro. . . . Ci si preoccupa dell'ammalato, dell'affamato, del disabile, e la vita sociale è regolata da sistemi morali comuni che sono fatti applicare, anche se in modo imperfetto, attraverso sanzioni messe in atto da terze parti. In contrasto, fra le altre specie di primati, la cooperazione è limitata a parenti ed a piccoli gruppi di reciprocatori” (Boyd, 2006, p.1555).

Presenteremo nei seguenti paragrafi un semplice modello matematico e un esperimento basato sul dilemma del prigioniero che ci forniscono alcuni indizi su come nel processo evolutivo la cooperazione possa essersi sviluppata.

3.1 Un semplice modello di produzione e di scambio

Quello che presentiamo qui è una generalizzazione di un modello proposto da Rapoport (1960). Si immagina un'economia molto semplice in cui ci siano solo due produttori, che indicheremo con X ed Y . Essi producono beni com-

ai nostri figli un'educazione ed una preparazione di qualità perché essi dovranno vedersela con un mercato dei talenti senza frontiere, dovranno confrontarsi con la concorrenza intellettuale degli immigrati di seconda generazione, fortemente motivati a salire nella scala sociale. I nostri figli rispetto a noi avranno sfide molto più difficili. Dobbiamo dar loro una scuola esigente, selettiva, di eccellenza, che consenta di affrontare la competizione con le carte migliori”.

plementari; ad esempio, il primo potrebbe essere un agricoltore e produrre verdure, e il secondo un allevatore e produrre carni. Indichiamo rispettivamente con x ed y le quantità che essi producono, e assumiamo poi che esista una regola, che entrambi rispettano, per cui ciascuno tiene per sé la frazione p (< 1) di ciò che produce, e dà all'altro la frazione rimanente, q ($= 1 - p$).¹³

Indichiamo con

$$\begin{aligned} S_X(x, y) &= B_X(px + qy) - C_X(x), \\ S_Y(x, y) &= B_Y(qx + py) - C_Y(y) \end{aligned}$$

le *funzioni di utilità* di X ed Y . Le funzioni di utilità sono date dalla differenza di due termini, il *beneficio* ($B_X(px + qy)$ per X , e $B_Y(qx + py)$ per Y) che i produttori ricavano dalle quote di prodotto in loro possesso (quella loro e quella che ricevono dall'altro) e il *costo* ($C_X(x)$ e $C_Y(y)$ rispettivamente) che il produrre comporta, ad esempio in termini di fatica fisica.

È ragionevole assumere che i benefici siano funzioni strettamente concave e crescenti, con $B_X(0) = B_Y(0) = 0$, e che i costi siano invece funzioni convesse crescenti, con $C_X(0) = C_Y(0) = 0$. Ciò significa che i *benefici marginali* sono decrescenti, come è ragionevole aspettarsi, mentre invece i *costi marginali* sono invece non decrescenti.¹⁴ Assumiamo anche che sia $pB'_X(0) > C'_X(0)$ e $pB'_Y(0) > C'_Y(0)$, cioè che il *beneficio marginale* derivato dalla prima unità di prodotto sia maggiore del costo marginale corrispondente a tale unità di prodotto, altrimenti ai produttori non converrebbe produrre.

Possiamo infine assumere che ciascuno dei due produttori scelga il valore della sua produzione, date le scelte dell'altro, in modo da massimizzare la propria funzione di utilità. Pertanto ciascuno dei due, osservando quello

¹³In realtà possiamo assumere, senza che i risultati cambino, che sia $p + q < 1$. Questo significa che nello scambio c'è una certa perdita; ad esempio c'è una terza parte che è incaricata di garantire che lo scambio si faccia, e che riceve un compenso espresso in percentuale delle quantità scambiate. Questo è quello che avviene con le tasse. Nel caso delle tasse la situazione è che i due produttori pagano in tasse le quantità qx e qy rispettivamente, e trattengono la quantità px e py con $p = 1 - q$; poi essi ricevono ciascuno la quantità $\beta \frac{q}{2}(x + y)$ in servizi, dove il coefficiente $\beta < 1$ tiene conto del fatto che l'attività di raccogliere le tasse e di produrre i servizi ha un costo. Il risultato è che al produttore X della sua produzione va la quantità $(p + \beta \frac{q}{2})x$ e della produzione dell'altro la quantità $\beta \frac{q}{2}y$. Similmente per il produttore Y . Ponendo $p' = p + \beta \frac{q}{2}$ e $q' = \beta \frac{q}{2}$, ci si riconduce al caso precedente, con $p' + q' < 1$.

¹⁴La prima unità di prodotto ci produce un maggiore beneficio delle unità successive, mentre all'aumentare della produzione la fatica per unità di prodotto tende ad aumentare, e comunque non decresce.

che fa l'altro, aggiusterà la sua produzione cercando sempre di aumentare l'utilità, fino a che non si sia raggiunto un punto (\bar{x}, \bar{y}) che soddisfa le

$$\begin{aligned} pB'_X(p\bar{x} + q\bar{y}) &= C'_X(\bar{x}), \\ pB'_Y(p\bar{y} + q\bar{x}) &= C'_Y(\bar{y}), \end{aligned}$$

cioè tale che, per ciascuno dei due produttori, l'aumento di beneficio dovuto ad un aumento unitario di prodotto è bilanciato dal corrispondente aumento di costo. Il punto (\bar{x}, \bar{y}) è un punto di equilibrio di Nash, e $S_X(\bar{x}, \bar{y})$ e $S_Y(\bar{x}, \bar{y})$ sono i valori delle utilità dei due produttori. Nessuno di loro è in grado di migliorare ulteriormente la propria utilità.

Sotto ipotesi non troppo stringenti,¹⁵ quando è $p > q$, cioè quando ciascun produttore tiene per sé più di quanto non sia obbligato a dare all'altro, allora il punto (\bar{x}, \bar{y}) è un punto di equilibrio stabile.

Assumiamo ora che entrambi i produttori passino da un atteggiamento egoista a uno altruista, decidendo di includere nella loro utilità anche, in una qualche misura, quella dell'altro. In questa nuova ipotesi a ciascuno di loro importa anche l'altro. Avremo allora due nuove funzioni di utilità che chiameremo *utilità generalizzate*:

$$\begin{aligned} S_X^*(x, y) &= \alpha S_X(x, y) + (1 - \alpha) S_Y(x, y), \\ S_Y^*(x, y) &= \alpha S_Y(x, y) + (1 - \alpha) S_X(x, y). \end{aligned}$$

Qui α è un parametro, compreso fra 0 ed 1, che misura in un certo senso il grado di egoismo. Se si pone $\alpha = 1$, allora si trascura completamente l'utilità individuale dell'altro e ci si trova nel caso fin qui trattato. All'altro estremo ponendo $\alpha = 0$ ciascuno trascura completamente la propria utilità individuale a vantaggio esclusivo dell'altro. Poniamoci in una situazione intermedia e scegliamo $\alpha = 0,5$. Così ciascuno dei due dà un'uguale importanza alla propria utilità individuale e a quella dell'altro. Ciascuno poi cercherà come prima di massimizzare la propria utilità, che però ora è l'utilità generalizzata, e che quindi include anche quella dell'altro.

¹⁵Le ipotesi sono: (i) $B'_X \geq B'_Y$ (X non è meno avido di Y); (ii) $C'_X \leq C'_Y$ (X non sente la fatica più di Y); (iii) $pB'_X(pz) - C'_X(z) \geq 0 \Rightarrow pB'_Y(qz) - C'_Y(0) > 0, \forall z \geq 0$ (i valori di produzione per cui X ha convenienza ad aumentare il suo lavoro non sono mai tali da scoraggiare del tutto la produzione di Y).

In queste nuove ipotesi le condizioni di equilibrio diventano:

$$\begin{aligned} 0,5(pB'_X(px^* + qy^*) - C'_X(x^*)) + 0,5qB'_Y(qx^* + py^*) &= 0, \\ 0,5(pB'_Y(qx^* + py^*) - C'_Y(y^*)) + 0,5qB'_X(px^* + qy^*) &= 0, \end{aligned}$$

dove con (x^*, y^*) abbiamo indicato il nuovo punto di equilibrio. È facile vedere che queste sono le condizioni di ottimo per la funzione somma delle due funzioni di utilità individuali¹⁶

$$S_X(px + qy) + S_Y(py + qx).$$

Quindi il punto di equilibrio è quello al quale corrisponde il massimo della utilità media.

È possibile inoltre far vedere che è $(x^*, y^*) \neq (\bar{x}, \bar{y})$, e che, nell'ipotesi che le due funzioni di utilità individuali non siano fra loro troppo differenti, è $x^* + y^* > \bar{x} + \bar{y}$, cioè che nella nuova situazione il prodotto globale aumenta.

Da quanto detto risulta non solo che nel nuovo punto di equilibrio i due guadagnano a livello aggregato per ciò che riguarda le utilità individuali, ma anche che, se le loro funzioni di utilità non differiscono molto, ciascuno dei due migliora il valore della propria utilità individuale.¹⁷

Simili conclusioni possono essere raggiunte anche nel caso in cui i produttori siano più di due. L'esempio, e soprattutto la sua estensione a più di due produttori, suggerisce le seguenti conclusioni:

- Un comportamento altruistico dà vantaggi al gruppo nel suo complesso, e ciò aiuta a capire perché i gruppi con un maggior numero di individui altruisti al loro interno possano avere avuto un vantaggio evolutivo rispetto agli altri.

¹⁶Infatti esse, a parte il coefficiente moltiplicativo 0,5, si ottengono uguagliando a 0 le derivate parziali rispetto a x e a y della funzione $S_X(px + qy) + S_Y(py + qx)$.

¹⁷Per dimostrare questa affermazione è necessario specificare meglio cosa si intenda per distanza fra le due funzioni di utilità. Una possibilità è assumere che entrambe abbiano la stessa forma funzionale $S(x, y; t)$, dove t è un vettore di parametri reali, e che S sia continua anche rispetto a t . Allora avremo $S_X(x, y) = S(x, y; t_X)$ e $S_Y(x, y) = S(x, y; t_Y)$, e la distanza fra le due funzioni è misurata dalla distanza, in una qualche norma, fra t_X e t_Y . Allora chiaramente, se è $t_X = t_Y$, l'aumento dell'utilità media corrisponde anche a un aumento di entrambe le utilità, e, per la continuità della $S(x, y; t)$, quest'aumento si mantiene positivo purché t_X e t_Y non differiscano di molto.

- Nel caso di un gruppo caratterizzato da una sufficiente omogeneità interna, allora il comportamento altruistico dà vantaggi anche a ciascuno degli individui, e questo aiuta a capire il perché della crescita dell'altruismo all'interno di un singolo gruppo.

3.2 L'esperimento di Axelrod

“Sotto quali condizioni la cooperazione può emergere in un mondo di egoisti senza un'autorità centrale?” È questa la domanda da cui parte Axelrod (1984), che continua: “Questa domanda ha intrigato per molto tempo. E per buone ragioni. Noi tutti sappiamo che le persone non sono angeli, e che tendono a preoccuparsi innanzitutto di se stessi e di ciò che è loro. Tuttavia noi sappiamo che la cooperazione avviene e che la nostra civiltà è basata su di essa. Ma in situazioni in cui ciascun individuo è incentivato a essere egoista, come può mai svilupparsi la cooperazione? La risposta che ciascuno di noi dà a questa domanda ha conseguenze fondamentali su come noi pensiamo e agiamo nelle nostre relazioni sociali, politiche e economiche con gli altri”.

Per rispondere a questa domanda, Axelrod, un'interessante figura di scienziato interdisciplinare (laurea in Matematica e dottorato in Scienze Politiche), concepì un esperimento. Invitò un certo numero di ricercatori a presentare strategie per il dilemma del prigioniero ripetuto. Queste strategie sarebbero state confrontate tra di loro in una sorta di torneo: ciascuna avrebbe giocato una sequenza di 200 iterazioni del gioco del dilemma del prigioniero con ciascuna delle altre, e alla fine si sarebbe visto quale avesse ottenuto il maggior punteggio (naturalmente il numero di iterazioni non era noto nel momento in cui le diverse strategie erano state formulate). L'istanza del gioco del dilemma del prigioniero proposto era la seguente:

		Giocatore 2 :	
		coopera	compete
Giocatore 1 :	coopera	3 / 3	0 / 5
	compete	5 / 0	1 / 1

Alla competizione parteciparono 15 strategie, alcune molto semplici, altre notevolmente sofisticate. Alla fine risultò vincitrice la strategia proposta da Anatole Rapoport, la più semplice di tutte. Questa strategia, chiamata da Rapoport “Tit for Tat” (TfT), che potrebbe tradursi con “Chi la fa l'aspetti”, è descritta dalle seguenti due regole:

1. Alla prima iterazione coopera;
2. Ad ognuna delle iterazioni successive copia la mossa fatta dal tuo avversario nell'iterazione precedente.

Analizzando i risultati dell'esperimento, Axelrod individuò due caratteristiche che in qualche modo permettevano di spiegare i punteggi ottenuti dalle diverse strategie:

- *gentilezza*: non avviare mai la competizione per primo;
- *indulgenza*: disponibilità a ritornare alla cooperazione purché anche l'altro lo faccia.

Tutte le strategie che avevano ottenuto i migliori punteggi erano gentili, e fra esse le meno indulgenti erano quelle col punteggio più basso. Chiaramente *TfT* è una strategia sia gentile che indulgente.

La conclusione di Axelrod fu che in effetti comportamenti cooperativi possono emergere e mantenersi anche fra individui egoisti, purché si tratti di individui che vivano in un contesto sociale in cui ci siano più occasioni di incontro, cioè in situazioni che favoriscano l'esistenza di *relazioni stabili*. Importante nello sviluppo della cooperazione, secondo Axelrod, è anche la *reciprocità*.

Un'interessante applicazione del gioco del dilemma del prigioniero riguarda la cosiddetta "Tragedia dei *Commons*". Hardin (1968), in un famoso articolo sulla rivista *Science*, affronta il problema della gestione dei beni comuni attraverso un esempio paradigmatico, quello dell'utilizzazione da parte di un certo numero di pastori di un pascolo comune. Ciascun pastore, nel racconto di Hardin, cercherà di massimizzare la propria utilità e quindi sarà portato ad aumentare la dimensione del suo gregge. Assumendo per semplicità che i pastori siano solamente due, la situazione illustrata da Hardin potrebbe essere vista come un gioco del dilemma del prigioniero, ad esempio con la seguente tabella dei pagamenti:

		Pastore 2 :	
		coopera	non coopera
Pastore 1 :	coopera	10 / 10	-1 / 11
	non coopera	11 / -1	0 / 0

Chiaramente ciascun pastore, usando una strategia di tipo *MaxMin* (massimizzare il minimo guadagno), finisce per non cooperare, azzerando così il proprio guadagno.

In realtà, come è stato evidenziato da Elinor Ostrom (1990), premio Nobel per l'Economia nel 1999, sono molti e rilevanti gli esempi di *Commons* gestiti collettivamente in modo efficiente. La gestione collettiva comporta responsabilità e coinvolgimento da parte degli utenti, e soprattutto un loro interesse nel fatto che il valore della risorsa gestita si mantenga nel tempo. Potrebbe essere preferibile vedere la tragedia dei *Commons* non come un gioco del dilemma del prigioniero puro, come quello visto prima, ma piuttosto come un gioco in cui il comportamento egoistico comporta una penalità γ . Il gioco diventa allora:

		Pastore 2 :	
		coopera	non coopera
Pastore 1 :	coopera	10 / 10	-1 / 11- γ
	non coopera	11- γ / -1	- γ / - γ

È evidente che, purché γ sia non troppo piccolo, i giocatori sono portati a cooperare. Il significato di γ può essere molteplice. Può essere una multa pecuniaria, cosa possibile laddove ci siano delle istituzioni collettive, incaricate di gestire la risorsa, che siano riconosciute da tutti. Può essere una sanzione morale, cosa che accade dove c'è una comunità caratterizzata da un senso di identità condiviso e da forti relazioni fra i suoi membri. Con quest'ultimo caso siamo in qualche modo ritornati al dilemma del prigioniero ripetuto: le scelte si fanno giorno per giorno e una scelta che danneggi la comunità rischia di isolare la persona che la compie.

4 Può la matematica dirci qualcosa sulla non-violenza?

La nonviolenza è certamente uno degli ingredienti fondamentali in un processo di costruzione della pace. La nonviolenza è spesso mal compresa e confusa con un atteggiamento di passività. Essa è invece una modalità di lotta attiva, anche molto decisa, ma caratterizzata dall'uso di tecniche non violente e sempre costruttiva. Già nella lotta si cerca di realizzare, sia pure in modo

parziale e graduale, quella realtà di pace e di giustizia che è l'obiettivo della lotta stessa. In questo senso nella nonviolenza non si distingue fra mezzi e fine: i mezzi devono essere improntati a quegli stessi valori che sostanziano il fine. Alla base di un impegno nonviolento c'è una concezione etica dell'essere umano e della società caratterizzata da: (i) massimo accesso a potere e benessere per tutti¹⁸; (ii) uguaglianza e autonomia dell'individuo; (iii) empatia nelle relazioni interpersonali.

I tre punti elencati ruotano tutti intorno al tema del rapporto tra noi e gli altri, rapporto che sembra importante vedere qui piuttosto dal punto di vista cognitivo che da quello affettivo (senza naturalmente escludere l'importanza di quest'ultimo). Essi richiedono la capacità di riconoscere l'altro come soggetto di diritti, portatore di valori e anche di verità. E forse questa è la cosa più difficile: a volte è più facile provare compassione per l'altro, cercare di capire i suoi sentimenti, piuttosto che riconoscere la possibilità che nelle sue posizioni ci sia del vero, che abbia almeno in parte ragione, il che comporta la sempre difficile ammissione della possibilità che io sbagliai. È questo il senso con cui usiamo qui il termine *empatia*: un atteggiamento verso gli altri caratterizzato da uno sforzo di comprensione intellettuale, al di là di ogni attitudine affettiva personale (simpatia, antipatia) e di ogni giudizio morale.

Riconoscere l'altro come portatore di verità significa comprendere come la verità non sia qualcosa che si possa possedere una volta per tutte, ma piuttosto un processo di scoperta continua tutt'altro che lineare. Passa attraverso tentativi ed errori, attraverso passi in avanti, ma anche ritorni all'indietro per seguire nuove vie. Passa attraverso la coscienza che molta della nostra conoscenza, e certamente la parte più rilevante di essa, è congetturale e quindi in qualche modo incerta e sempre suscettibile di essere messa in discussione, modificata.¹⁹

La nostra razionalità, quel sistema di conoscenze e di procedure che ci

¹⁸Questo è ciò che Ghandi chiama *Sarvodaya* e Capitini *Omnicrazia* (Pontara, 1990, p.64).

¹⁹È qui il caso di precisare che non si sta affermando che la verità non esista né che l'unica cosa davvero esistente siano le interpretazioni. Non si vuole neppure affermare che l'unica cosa che ha senso dire sia che "qualcosa è vero in un certo contesto storico, o date certe presupposizioni, o certe convenzioni sociali" (Berto, 2008, p.157). Vogliamo invece affermare che contesto storico, linguaggio, cultura e convenzioni sociali determinano il modo con cui noi formuliamo i risultati a cui siamo arrivati nel nostro cammino verso la verità, e che tali formulazioni ne rappresentano comunque solo un'approssimazione sempre suscettibile di essere rimessa in discussione. L'argomento meriterebbe una discussione ben più ampia, ma questo andrebbe molto al di là degli obiettivi di questa trattazione.

consente di comprendere la realtà, di formulare giudizi di valore e di fare scelte informate, è necessariamente incompleta. A capire il senso di questa affermazione ci aiuta in qualche modo ciò che dice il teorema di Gödel²⁰: “se in un sistema matematico ogni verità esprimibile con i mezzi del sistema può essere anche, in qualche modo, dimostrata all’interno del sistema, il sistema è necessariamente contraddittorio. In altre parole: se un sistema formale non contiene contraddizioni è sempre possibile formulare un’asserzione che non può essere né dimostrata né contraddetta. [...] A prescindere da cosa sia vero, l’affermazione o il suo contrario, abbiamo una verità che non può essere dimostrata nell’ambito della logica formale” (Méró, 2001, p.108). In altri termini, non può esistere un sistema logico che sia allo stesso tempo *coerente*, che cioè non contenga contraddizioni, e *completo*, cioè tale che ogni proposizione vera formulabile al suo interno possa anche essere dimostrata all’interno dello stesso sistema. Possiamo allora concludere che “se vogliamo rimanere aperti ad ogni verità con la nostra logica, dobbiamo essere pronti a passare da un sistema di riferimento all’altro” (Méró, 2001, p.352).²¹ Questo “passare da un sistema di riferimento all’altro”, nello spirito del teorema di Gödel, va inteso come un processo di ampliamento e di arricchimento dei nostri sistemi di riferimento. È in qualche modo quello che ha permesso nel 1998 la soluzione di un lunghissimo conflitto di frontiera fra Ecuador e Perù, un conflitto nato con l’indipendenza dei due paesi e che dal 1941 al 1995 aveva dato origine a tre guerre. Il paradigma di riferimento per tutti gli anni del conflitto era sempre stato quello classico: ogni territorio deve necessariamente appartenere ad un solo stato. È una logica binaria che prevede solamente

²⁰Citare il teorema di Gödel è sempre estremamente rischioso. Troppe cose sono state indebitamente da esso ‘dedotte’ (per una trattazione sull’argomento rinviamo a Berto (2008)). Qui lo usiamo solamente in modo analogico. Non intendiamo affermare che esso dimostri qualcosa nel particolare campo oggetto di cui stiamo parlando, ma piuttosto che esso ci possa suggerire da un lato un atteggiamento di dubbio rispetto alle conoscenze alle quali siamo arrivati, e dall’altro l’esistenza di un ‘oltre’ che può essere del tutto imprevedibile.

²¹Questa idea che ci siano domande alle quali non possiamo rispondere se non uscendo dal nostro sistema di riferimento ha punti di contatti con il paradosso che evidenzia, a proposito della presunta oggettività e mancanza di scopi della natura, e di conseguenza della neutralità della scienza, il filosofo Hans Jonas (1997, p.61-62): “quella natura priva di interessi deve però aver fatto scaturire da se stessa il fenomeno dell’interesse in esseri viventi che provano sentimenti e che hanno delle aspirazioni, l’aver scopi dalla sua mancanza di scopi ... Ci troviamo di fronte al paradosso per cui la scienza della natura non può collocare se stessa all’interno della propria immagine del mondo, non può spiegare la propria realtà a partire da essa.”

due possibilità, *Mio* oppure *Tuo*. Cambiare riferimento ha comportato un ampliamento del paradigma con l'aggiunta di una nuova possibilità: *Nostro*. Ed in effetti, nell'accordo di pace, venne deciso di realizzare in uno dei territori contesi un parco ambientale binazionale gestito in modo congiunto: una soluzione creativa e nonviolenta.

La necessità di uscire da troppo rigidi paradigmi di tipo binario va ben al di là di casi come quello appena visto. In effetti, la coscienza del limite e l'idea che il cammino verso la verità sia un processo nel quale non si può mai affermare di essere arrivati alla meta ci porta alla convinzione che la realtà nella quale operiamo, e sulla quale non possiamo esimerci dal fare valutazioni e prendere decisioni, sfugga ad una classificazione basata su due soli valori: Sì/No, Vero/Falso. Ce lo dice Amartya Sen a proposito delle violenze che scaturiscono da definizioni troppo rigide ed univoche delle identità, violenze sempre più frequenti in un mondo caratterizzato da un lato da sanguinosi conflitti inter-etnici e dall'altro da crescenti fenomeni migratori che innescano anche in paesi tradizionalmente tolleranti conflitti identitari. “Molti dei conflitti e delle atrocità del mondo sono tenuti insieme dall'illusione di un'identità univoca e senza possibilità di scelta. ... l'odio assume la forma dell'invocazione del potere magico di una determinata identità, spacciata per dominante, che soffoca le altre affiliazioni” (Sen, 2006, p.XIII). Il pensare che si possano definire le identità in termini di una logica binaria non consente di cogliere la varietà e ricchezza della realtà. L'elemento identitario o di appartenenza comunitaria non è unico e, soprattutto, non è dato una volta per tutte.

Proprio da Sen partono Vineis e Satolli (2009) per sostenere la necessità di sostituire a rigide classificazioni binarie classificazioni basate sui cosiddetti insiemi *fuzzy*, e quindi classificazioni non solo a due valori, ma capaci anche di includere zone di incertezza in cui dal Sì al No si passa con gradualità. Anche qui entra in gioco la matematica.²² “Il vantaggio della classificazione *fuzzy* non sta soltanto nel fatto che evita le dicotomie ma anche che consente di spostare il ‘baricentro’ della classificazione, che è esattamente ciò che avviene con l'evoluzione storica dei concetti. [...] L'uso dei *fuzzy sets*

²²Il concetto di *fuzzy set* fu introdotto da Zadeh nel 1962. Un insieme *fuzzy* è una coppia (S, ϕ) , dove S è un insieme e ϕ è una funzione $S \rightarrow [0, 1]$ che fornisce una misura dell'intensità con cui gli elementi appartengono all'insieme. Diciamo che $x \in S$ non appartiene a (S, ϕ) se è $\phi(x) = 0$, mentre c'è piena appartenenza se $\phi(x) = 1$; nei casi intermedi l'appartenenza è sfumata con diversi gradi di intensità. Il termine *fuzzy* è ormai entrato nel linguaggio della matematica, per cui abbiamo preferito non tradurlo.

è un antidoto all'assolutismo morale, che si coniuga con la pretesa di trovare un'essenza per i concetti e le definizioni"²³ (Vineis and Satolli, 2009, 151). Il comprendere che concetti e definizioni non possono prescindere né dalla cultura che li ha espressi, né dal linguaggio in cui sono espressi, e infine neppure dal livello di conoscenze scientifiche proprie del tempo, aiuterebbe a superare molti conflitti. Vineis e Satolli dedicano un capitolo ai problemi legati alla definizione di vita e di morte e alla pretesa di definire esattamente e una volta per tutte l'istante preciso in cui inizia e termina la vita. Nella loro ottica, ad esempio, la morte piuttosto che essere un evento puntuale è un processo, e questo processo non può essere compreso a prescindere dalle conoscenze scientifiche di cui disponiamo.

5 Conclusioni

Fin qui abbiamo presentato particolari concetti e risultati matematici, mostrando come possano essere di aiuto nella costruzione della pace. Ma forse, più in generale, è la matematica nel suo insieme che, se ben insegnata, può portare un rilevante contributo a una cultura di pace e di nonviolenza. "La matematica è primariamente un'attività creativa, e questo richiede immaginazione, intuizione geometrica, sperimentazione, congetture giudiziose, tentativi ed errori, l'uso di analogie del tipo più vago, sbagliare e annaspere. Anche quando il matematico è convinto della correttezza di un risultato, egli deve comunque creare per trovarne la prova" (Kline, 1970, p.271). Tutto ciò richiede necessariamente capacità di vedere la realtà in modi nuovi, di cambiare prospettiva, di uscire da vecchi paradigmi per accoglierne o inventarne nuovi.

L'uso dei numeri interi e dei razionali, ad esempio, risale a circa 2000 anni prima di Cristo, ma gli irrazionali, quando in essi incapparono i pitagorici, furono difficili da accettare. Non erano numeri, almeno nel senso che a questo termine veniva dato. Furono rigettati come numeri, ma non per questo il loro uso fu abbandonato. Si cambiò prospettiva, paradigma. I greci pensarono i numeri irrazionali come lunghezze geometriche, lavorarono in termini geometrici con "lunghezze, aree e volumi che avrebbero dovuto altrimenti

²³Vale la pena chiarire che con questo non si intende sostenere una sorta di relativismo morale, quanto piuttosto il fatto che non possiamo esimerci dallo sforzo ermeneutico di comprendere il senso più profondo dei principi etici che ci guidano nelle nostre azioni, anche a partire dal contesto in cui ci troviamo ad operare.

essere rappresentati per mezzo di irrazionali, e arrivarono anche a risolvere geometricamente equazioni quadratiche” (Kline, 1970, p.267).

Un altro esempio è il passaggio dalla geometria euclidea alle geometrie non-euclidee. “Newton lavorava all’interno dei confini dello spazio euclideo . . . Einstein sviluppò una prospettiva più ricca all’interno di uno spazio non-euclideo, e non c’è ragione di credere che la ricerca sia finita o che mai lo sarà. Ci vorrebbe ben più della logica perché Newton possa comprendere Einstein; ci vuole l’accettazione soggettiva di un’altra prospettiva, una prospettiva più ricca che è raggiungibile solamente se si è aperti e disponibili all’accoglienza” (Marshall, 1978, p.261).

Apertura e accoglienza non nascono e si sviluppano nel vuoto, ma trovano origine e alimento anche nelle nostre esperienze e nel modo con cui sono vissute. Per questo le parole più adatte a concludere questo articolo sono quelle di un matematico e pedagogista proveniente da una regione in cui la difficoltà del rapporto con l’altro si vive quotidianamente, la Palestina. Così scrive Munir Fasheh (1997, p.276): “Uno dei principali obiettivi dell’insegnamento della matematica dovrebbe essere di far capire che ci sono differenti punti di vista e di far rispettare il diritto di ciascun individuo a scegliere il proprio. In altre parole, la matematica dovrebbe essere usata per insegnare la tolleranza in un’epoca così piena di intolleranza.”

Riferimenti bibliografici

Robert Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, 1984.

Francesco Berto. *Tutti pazzi per Gödel! La guida completa al Teorema di incompletezza*. Laterza, 2008.

Robert Boyd. Evolution: The puzzle of human sociality. *Science*, 314:1555–1556, 2006.

Steve Chan. In search of democratic peace: Problems and promise. *Mershon International Studies Review*, 41:59–91, 1997.

Barbara Farnham. The theory of democratic peace and threat perception. *International Studies Quarterly*, 39:395–415:47, 2003.

Munir Fasheh. Mathematics, culture and authority. In Arthur B. Powell and Marilyn Frankenstein, editors, *Ethnomathematics: challenging eurocentri-*

- sm in mathematics education*, pages 273 – 290. State University of New York Press, 1997.
- Paul Forman. *Fisici a Weimar. La cultura di Weimar, la causalità e la teoria quantistica*. Petite Plaisance Editrice, 2002.
- Garret Hardin. The tragedy of the commons. *Science*, 162:1243–1248, 1968.
- J. C. R. Hunt. A general introduction to the life and work of l. f. richardson. In Oliver M. Ashford et al., editor, *Collected Papers of Lewis Fry Richardson*, volume 2. Cambridge University Press, 1993.
- Hans Jonas. *Tecnica, Medicina ed Etica - Prassi del Principio di Responsabilità*. Einaudi, 1997.
- Morris Kline. Logic versus Pedagogy. *The American Mathematical Monthly*, 77:264–282, 1970.
- Gordon Marshall. Conflict and Liberation: Personal Aspects of the Mathematics Experience. *Curriculum Inquiry*, 8:251–271, 1978.
- Federico Mayor. *The World Ahead: Our Future in the Making*. Zed Books, 2001.
- László Méré. *I limiti della razionalità. Intuizione e trance-logica*. Edizioni Dedalo, 2001.
- Martin A. Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314: 1560–1563, 2006.
- Elinor Ostrom. *Governing the Commons. The Evolution of Institutions for Collective Action*. Cambridge University Press, 1990.
- Giuliano Pontara. *Antigone o Creonte. Etica e politica nell'era atomica*. Editori Riuniti, 1990.
- Anatole Rapoport, editor. *Fights, Games and Debates*. The University of Michigan Press, 1960.
- Marco Revelli. *La politica perduta*. Einaudi, 2003.

Lewis F. Richardson. *Generalized Foreign Policy: A study in group psychology*. Cambridge At The University Press, 1939. Contained in The Collected Papers of Lewis Fry Richardson: Vol 2 - Quantitative psychology and studies of conflict.

Amartya Sen. *Identità e violenza*. Laterza, 2006.

Paolo Vineis and Roberto Satolli, editors. *I due dogmi. Oggettività della scienza e integralismo etico*. Feltrinelli, 2009.

Vito Volterra. Fluctuation in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118:558–560, 1926.