

Il prezzo di non arbitraggio d'un'attività finanziaria derivata

Sottostante rischioso:

prezzo odierno: $S_0 := 1000$

prezzo futuro: $S_1 := 900$

$S_2 := 1200$

Attività finanziaria derivata:

p. es. una *put* con prezzo d'esercizio: $E := 1050$

prezzo odierno: v

???

$j := 1..2$ contraddistingue le due evoluzioni

$$y_j := \max(E - S_j, 0)$$

prezzo futuro: $y_1 = 150$ Se $S = S_1$

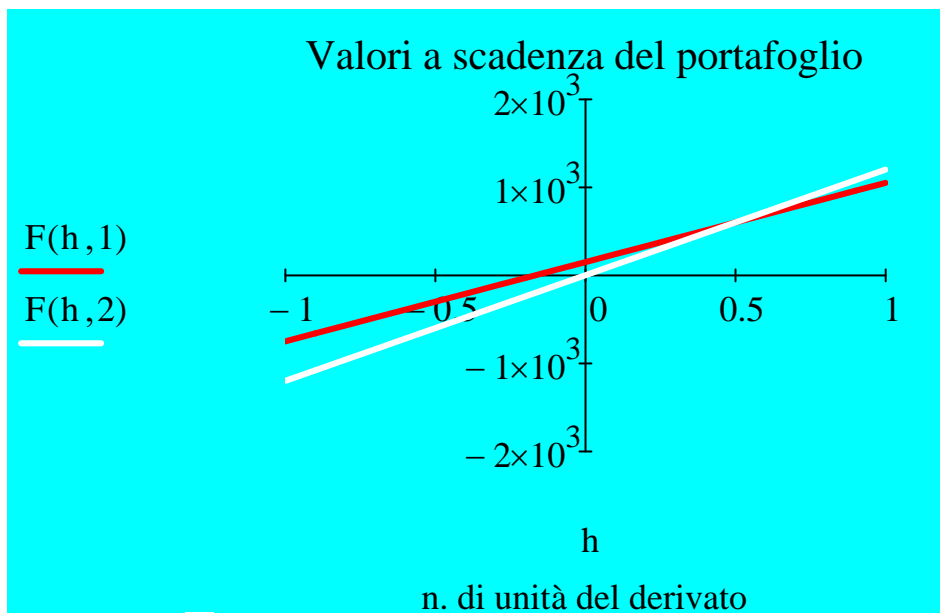
$y_2 = 0$ Se $S = S_2$

Costruiamo un portafogli con un'unità di attività finanziaria derivata e h unità di sottostante

Il valore del portafoglio a scadenza dipende da h e dall'evoluzione del sottostante.

$$F(h, j) := y_j + h \cdot S_j$$

$$h := -1, -0.9 \dots 1$$



H

Valore di h che rende il valore finale del portafoglio indipendente dall'evoluzione del sottostante:

$$H := \frac{y_1 - y_2}{S_2 - S_1}$$

$$H = 0.5$$

Controllo:

$$F(H, j) = \begin{array}{|c|} \hline 600 \\ \hline 600 \\ \hline \end{array}$$

Rendimento periodale d'un impiego senza rischio $r := 4\%$

Prezzo corrente che deve avere il portafoglio immunizzato

$$P := \frac{F(H, 1)}{1 + r} \quad P = 576.923$$

Prezzo corrente del sottostante in esso incluso:

$$S_0 \cdot H = 500$$

Prezzo del derivato: $v := P - S_0 \cdot H \quad v = 76.923$

Per via algebrica tale prezzo può ottenersi anche come valore scontato del valore atteso dell'attività derivata a scadenza con opportune probabilità non "fisiche", ma sintetiche: le c.d. "probabilità *risk-neutral*".

I valori possibili a scadenza sono: $y_1 = 150$

$$y_2 = 0$$

La corrispondenti probabilità *risk-neutral* siano q_1 e q_2

Algebricamente si trova che con:

$$q_1 := \frac{S_2 - (1+r) \cdot S_0}{S_2 - S_1}$$

$$q_2 := \frac{(1+r) \cdot S_0 - S_1}{S_2 - S_1}$$

$$\sum_j q_j = 1$$

$$v_{\text{sint}} := \frac{1}{1+r} \cdot \left[\sum_j (y_j \cdot q_j) \right]$$

$$v_{\text{sint}} = 76.923$$

$$\max(x, y) := \frac{(x + y)}{2} + \frac{|x - y|}{2}$$

