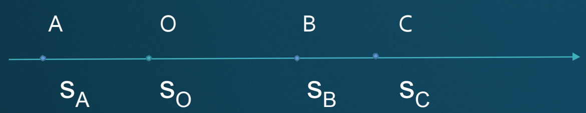
ORIENTAMATICA a.a. 2016/17
27 gennaio 2017

Matematica per la Fisica: quesiti e problemi

Maria Grazia Grandi

I moti di un punto materiale



La traiettoria è l'insieme dei punti delle posizioni occupate dal punto materiale indicate dall'ascissa s su una linea avendo scelto in modo arbitrario l'origine O e il verso di percorrenza indicato da una freccia.

il *punto materiale*: modello matematico utilizzato per rappresentare il moto di traslazione di un qualsiasi corpo
L'ipotesi di un *punto geometrico* senza dimensioni a cui è associata la massa del corpo non è affatto lontana dallo studio reale del moto, in quanto esiste un punto privilegiato, il baricentro di un corpo, a cui si possono applicare tutte le forze in gioco.

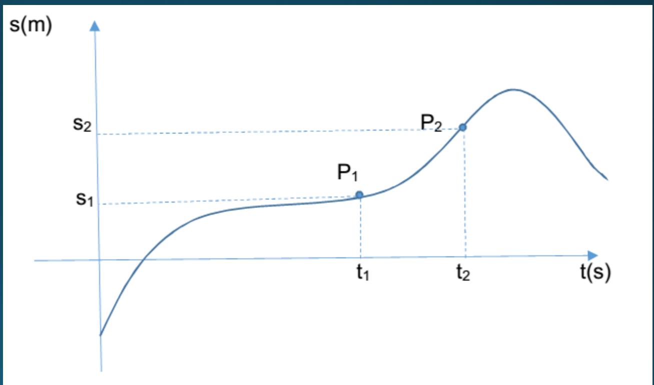
Diagramma orario

Legge oraria di un moto vario

$s = s(t)$

di un punto materiale su una traiettoria rettilinea

o su una linea curva unidimensionale, dove s è l'ascissa curvilinea

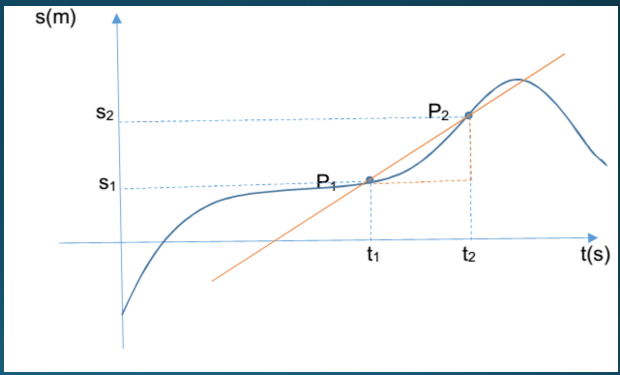


Velocità media

Il coefficiente angolare della retta nel grafico, m,

rappresenta la velocità media del punto materiale nell'intervallo di tempo (t_1, t_2)

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

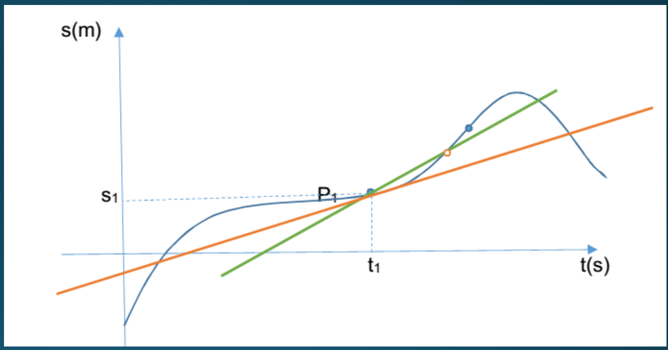


$\Delta s = s_2 - s_1$ $\Delta t = t_2 - t_1$

La derivata in fisica

La velocità istantanea, v_i,
è il limite, se esiste finito,
per Δt che tende a zero, del rapporto incrementale Δs/Δt , ovvero della velocità media

$$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Il limite, se esiste finito, è la derivata prima della legge oraria s(t)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$$

$$v_i(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

La derivata in fisica

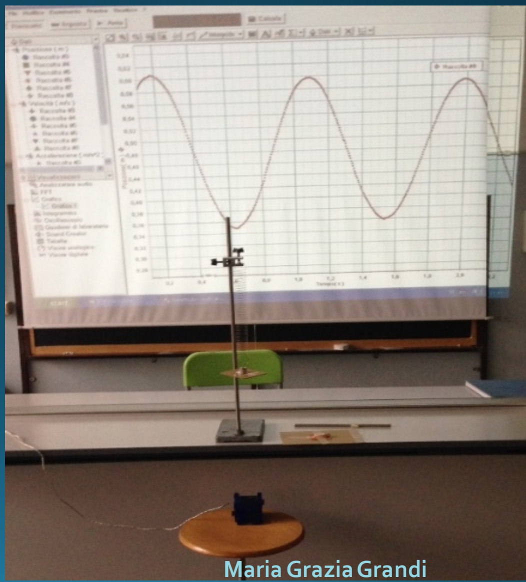
Le grandezze fisiche sono spesso definite mediante il rapporto di variazioni finite di altre grandezze fondamentali

Il limite del rapporto incrementale, ovvero dei valori medi, per intervalli di tempo infinitesimi, è il valore istantaneo della grandezza

Valori medi	Valori istantanei	Simbolo della derivata prima
$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$	$v_i = \frac{ds}{dt}$
$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$	$a_i = \frac{dv}{dt}$
$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$F_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$	$F_i = \frac{dp}{dt}$
$\bar{i} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	$i_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'(t)$	$i_i = \frac{dq}{dt}$

Problema: un moto unidimensionale

- In laboratorio di Fisica studi il moto di una massa di 25 g appesa a una molla elastica (k=2,5 N/m) che oscilla in direzione verticale.
- Un sensore digitale ad ultrasuoni misura posizione e velocità istantanee con una frequenza di 20 Hz.
- Il sensore è collegato ad un computer che costruisce un punto nei grafici tempo-spazio e tempo-velocità ogni 0,05 s.

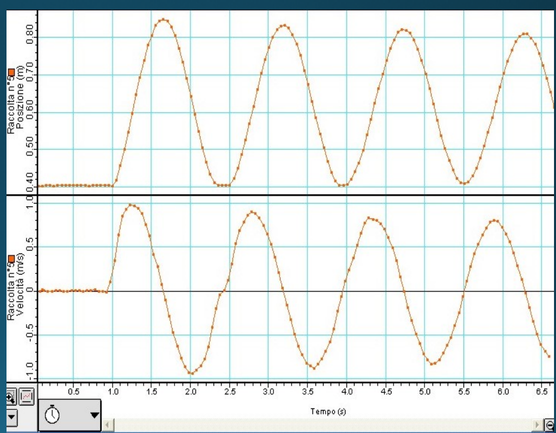


I grafici t-s , t-v, del moto armonico semplice

L'osservazione del diagramma orario in tempo reale ti porta a supporre che la legge oraria sia di tipo sinusoidale: scegli come istante iniziale quello per cui la molla passa dalla posizione di equilibrio

$$s(t) = R\ sen(\omega t)$$

La costante R>0 è *l'ampiezza dell'oscillazione*, ovvero la semidifferenza della variazione picco-picco



Cosa chiede il problema?

1. Deriva dalla legge oraria sperimentale la velocità e l'accelerazione istantanee.
2. Scrivi l'equazione vettoriale della forza che agisce sulla molla e stabilisci di che tipo di forza si tratta.
3. Determina il periodo e la frequenza dell'oscillazione.
4. Calcola il periodo e la frequenza dell'oscillatore armonico con una massa appesa di 25 g essendo trascurabile la massa della molla.

Quesito 1.

Dalla legge oraria

$$s(t) = A\ sen(\omega t)$$

Velocità istantanea

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = A\ \omega\ cos(\omega t)$$

Accelerazione istantanea

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\ \omega^2\ sen(\omega t) = -\ \omega^2\ s(t)$$

Quesito 2.

Dalla seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 \, \vec{s}$$

La forza elastica di Hooke

$$\vec{F} = -k \, \vec{s}$$

la costante elastica è

$$k = m\omega^2$$

Un moto armonico semplice, con legge oraria sinusoidale o cosinusoidale, è generato da una forza di richiamo elastica.

Quesito 3.

Dalla relazione tra le costanti

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

la pulsazione, ω>0

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

la pulsazione, ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dal confronto ottengo *il periodo* e la frequenza di oscillazione del sistema massa-molla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quesito 4.

Calcolo il periodo di oscillazione in notazione scientifica

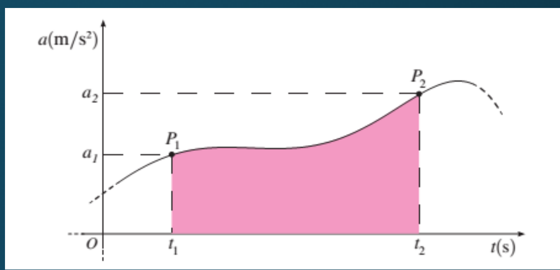
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{25\ \ 10^{-3} Kg}{2{,}5\,\frac{N}{m}}} \cong 0{,}63\ s = 6{,}3\ 10^{-1}\ s$$

e la frequenza di oscillazione in s^{-1}, o hertz

$$\nu = \frac{1}{T} = 1{,}59\ Hz$$

Integrale definito

Come esempio di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato



l'accelerazione non costante di un punto materiale su una traiettoria rettilinea

l'area sottesa dalla curva rappresenta la variazione di velocità tra i due istanti di tempo considerati

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$$

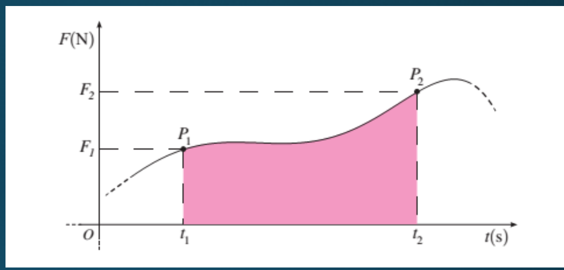
$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

Integrale definito

Un altro esempio

La forza variabile nel tempo

F=F(t) applicata a un punto materiale per un intervallo di tempo



L'impulso

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$$

Solo se la forza è costante

$$\Delta p = F\Delta t$$

Un problema di dinamica. Samantha Cristoforetti, la prima astronauta italiana ad andare nello spazio

La prima donna italiana a viaggiare nello spazio, Samantha Cristoforetti, è partita il 23 novembre 2014, con altri due astronauti, lo statunitense Terry Virts e il russo Anton Shkaplerov, a bordo della navetta spaziale, Soyuz dal cosmodromo di Baikonur in Kazakistan (Russia), per raggiungere la Stazione Spaziale Internazionale, ISS. La ISS orbita intorno alla Terra dal 1961 a circa 400 chilometri di altitudine ed ospita astronauti di tutte le nazioni che si danno il cambio ogni sei mesi. Durante i sei mesi di permanenza Samantha ha eseguito moltissimi esperimenti scientifici in assenza di gravità.

La Stazione Spaziale Internazionale, ISS, ESA, Agenzia Spaziale Europea.

Il problema: il lancio della Soyuz

La Soyuz, in russo significa unione, composta dai sistemi dei razzi, dai serbatoi dei tre stadi e dalla navetta spaziale, si è mossa lentamente sui binari fino alla rampa di lancio, dove da orizzontale è stata portata in verticale e bloccata in modo da rimanere stabile fino al momento del lancio. I tre astronauti sono saliti a bordo della navetta spaziale, posta in cima al razzo, a circa 50m dal suolo, con un carico di 300 tonnellate di propellente.

Dopo il conto alla rovescia, accompagnato da milioni di sguardi di uomini e donne che hanno seguito il lancio in diretta, i quattro razzi laterali, *booster*, si sono accesi e hanno fornito la spinta verticale per far staccare dal suolo la Soyuz che ha iniziato la sua velocissima ascesa verso lo spazio.

Gli astronauti in questa fase hanno subito un'accelerazione di 1,5 g, pari quindi a una volta e mezzo l'accelerazione di gravità media misurata al suolo ($g = 9.80\ m\ s^{-2}$).

1. Calcola la velocità minima iniziale affinché il razzo non torni indietro per effetto della forza gravitazionale, detta *velocità scalare di fuga*, e rappresenta la velocità vettoriale di fuga dalla superficie terrestre (perpendicolare ad essa).

Cosa cercare?

- **velocità di fuga,** ovvero la minima velocità di lancio necessaria perché la Soyuz non torni indietro.

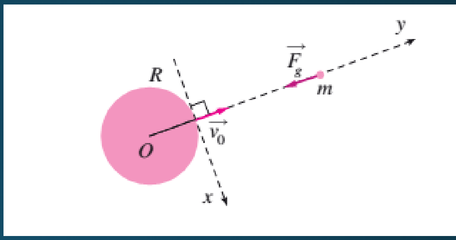
All'istante t=0s si lancia la Soyuz verticalmente dalla superficie della Terra con una velocità iniziale che non viene data nel problema.

Per far questo determino la funzione velocità in un istante t e ne cerco il minimo valore all'istante t_0=0s.

Durante l'ascesa verticale, la forza che agisce sulla navetta è opposta alla forza attrattiva gravitazionale diretta verso il centro della Terra

$$\vec{F} = -\overrightarrow{F_G}$$

$$ma = -G\frac{mM}{r^2}$$



Dove r(t) = y(t) + R

È un'equazione differenziale del secondo ordine, ma..

$$r''(t) = \frac{dv}{dt} = -G\frac{M}{r^2}$$

Derivata della funzione composta

La funzione velocità è una funzione composta

$$v(t) = v(r(t))$$

La cui derivata è:

$$v'(t) = v'\big(r(t)\big)\, r'(t)$$

ovvero

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = v(t)\cdot\frac{dv}{dr}$$

Equazione differenziale del I ordine

Con la sostituzione di v e delle sue derivate

$$a = \frac{dv}{dt} = -G\,\frac{M}{r^2}$$

Ricavo un'equazione differenziale del primo ordine

$$v\,\frac{dv}{dr} = -G\,\frac{M}{r^2}$$

a variabili separabili

$$v\;dv = -G\,\frac{M}{r^2}\;dr$$

$$v\;dv = -G\,\frac{M}{r^2}\;dr$$

$$\int v\;dv = GM\int -\frac{1}{r^2}\;dr$$

$$\frac{v^2}{2} = G\,\frac{M}{r} + C$$

Determino il valore della costante d'integrazione C, sapendo che all'istante iniziale la navetta parte dalla superficie terrestre:

r = R, con velocità v_o

$$C = \frac{{v_0}^2}{2} - G\,\frac{M}{R}$$

La soluzione

Che sostituisco nella funzione v=v(y(t)), dopo averla moltiplicata per il fattore costante 2,

$$v^2 = 2G\frac{M}{R+y} - 2G\frac{M}{R} + {v_0}^2$$

estraggo la radice quadrata

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - 2GM\frac{y}{R(R+y)}}$$

E ottengo il modulo della velocità, positiva, a quota y dalla superficie terrestre

Velocità minima

La navetta non risentirà più l'effetto della forza gravitazionale e quindi non tornerà indietro ricadendo sulla Terra quando la sua velocità diventerà nulla.

Se calcolo il limite, per $y \to +\infty$, osservo che la velocità a distanza infinita dipende dalla velocità iniziale

$$\lim_{y\to+\infty} v(y) = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{{v_0}^2 - 2GM\frac{y}{R(R+y)}} = \sqrt{{v_0}^2 - \frac{2GM}{R}}$$

la velocità iniziale dovrà soddisfare alla seguente condizione di realtà del radicale

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

La velocità sarà nulla

$$\sqrt{{v_0}^2 - \frac{2GM}{R}} = 0$$

solo quando la velocità iniziale assumerà il minimo valore positivo, dato dalla velocità di fuga

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Velocità di fuga

L'accelerazione di gravità g

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

La velocità scalare di fuga dal pianeta Terra è

$$v_F = \sqrt{2gR}$$

Il vettore velocità di fuga è orientato verso l'alto perpendicolarmente alla superficie terrestre

$$v_F = \sqrt{2 \cdot 9.8\ \frac{m}{s^2} \cdot 6.38\ 10^6 m} = 1.12\ 10^4\ \frac{m}{s}$$

Un corpo di qualunque massa, per sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra, deve essere lanciato in direzione perpendicolare alla superficie con una velocità minima iniziale di 11.2 chilometri al secondo, ovvero quarantamila e trecentoventi chilometri all'ora!

Pb: L'attracco della Soyuz alla ISS

In soli 9 minuti dalla partenza da Baikonur, la Soyuz ha raggiunto l'orbita voluta e si è infine separata anche dal terzo e ultimo stadio. Senza più propellente ha aperto i pannelli solari per accumulare energia ed ha esteso le antenne per le comunicazioni con la Stazione Spaziale Internazionale.

Il viaggio è proseguito senza più brusche accelerazioni e Samantha ha iniziato a sperimentare la microgravità, cioè la quasi totale assenza di peso in cui ha vissuto durante i sei mesi di permanenza sulla ISS, come ha raccontato al pubblico che l'ha seguita sui social network e nei collegamenti televisivi.

Quando La Soyuz si è collocata nella medesima orbita della ISS per iniziare, molto lentamente, la fase di attracco, ha prima dovuto raggiungere la stessa velocità di 27.600 chilometri orari con cui viaggiava la ISS.

Dopo circa sei ore dal lancio, Samantha è salita a bordo della Stazione Spaziale Internazionale. Durante i sei mesi di permanenza Samantha ha eseguito numerosi esperimenti scientifici in assenza di gravità.

I quesiti

1. Determina la velocità orbitale della ISS che ha permesso a Samantha di sperimentare l'assenza di peso.

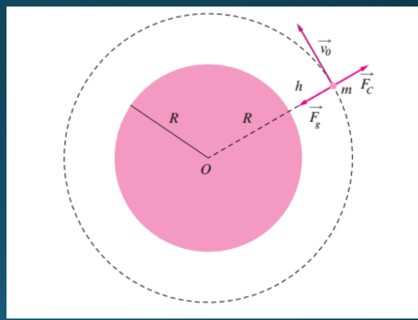
2. In un'intervista Samantha ha dichiarato che nell'arco di un giorno vedeva l'alba 16 volte. Dopo aver calcolato il periodo orbitale, verifica la validità della sua affermazione.

(Raggio della Terra R= 6380 Km; g = 9.81 m s^{-2})

Scelta del sistema di riferimento

Nel sistema di riferimento non inerziale solidale con la ISS si verifica l'assenza di peso per gli astronauti in orbita intorno alla Terra quando la forza centripeta dovuta all'attrazione gravitazionale della Terra è opposta alla forza centrifuga apparente che agisce sui corpi in rotazione.

I due vettori che rappresentano le forze applicate alla ISS orbitante hanno stessa direzione e modulo ma versi opposti.



Cosa cercare?

1. **Velocità orbitale tale che:** $\|\overrightarrow{F_c}\| = \|\overrightarrow{F_G}\|$
2. **Periodo orbitale**
3. **N: numero di giri compiuti dalla ISS in un giorno solare**

Quesito 1.

Legge di gravitazione universale di Newton:

$$F_G = G\frac{mM}{r^2}$$

forza centrifuga

$$F_c = ma_c = \frac{m{v_t}^2}{r}$$

Hanno uguale modulo

$$\frac{m{v_t}^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

Si può elidere la massa, m, della stazione orbitante

$${v_t}^2 = G\frac{M}{r}$$

La velocità orbitale è indipendente dalla massa della stazione spaziale

ORIENTAMATICA a.a. 2016/17 - 27/01/2017 Maria Grazia Grandi

Velocità orbitale

Dove la distanza r = R + h

$${v_t}^2 = G\frac{M}{R+h}$$

Considerando l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Moltiplico e divido per R^2

$${v_t}^2 = \frac{GM}{R+h}\cdot\frac{R^2}{R^2} = \frac{gR^2}{R+h}$$

Da cui la velocità orbitale:

$$v_t = \frac{R}{R+h}\sqrt{g(R+h)}$$

ORIENTAMATICA a.a. 2016/17 - 27/01/2017 Maria Grazia Grandi

Calcolo numerico

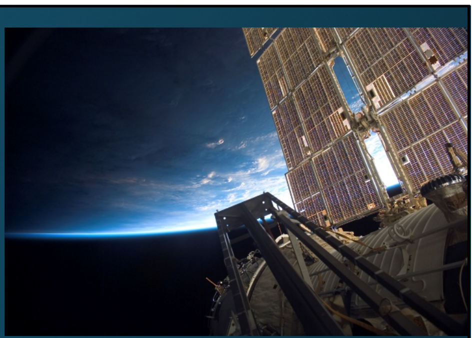
$$v_t = \frac{R}{R+h}\sqrt{g(R+h)}$$

Inserisco i valori numerici con le unità di misura:

$$v_t = \frac{6.38\ 10^6 m}{6.78\ 10^6 m}\sqrt{9.81\ 6.78\ 10^6\ \frac{m^2}{s^2}}$$

$$v_t = 7.67 \cdot 10^3\ \frac{m}{s} = 7.67\ \frac{km}{s} = 2{,}76\ \cdot 10^4\ \frac{km}{h}$$

Quesito 2.



ISS - ESA

L'astronauta Samantha, mentre era a bordo della Stazione Spaziale Internazionale, ISS, ha dichiarato che nell'arco di un giorno solare, della durata di 24 ore, vedeva l'alba 16 volte.

Per verificare la sua affermazione, calcolo il tempo impiegato dalla ISS per compiere un giro intorno alla Terra viaggiando su un'orbita circolare alla velocità calcolata nel precedente quesito.

Periodo orbitale

Essendo un moto circolare uniforme

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(R+h)}{T}$$

Il periodo orbitale, T

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v_t}$$

sostituendo la velocità orbitale

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{\frac{R}{R+h}\sqrt{g(R+h)}}$$

$$T = \frac{2\pi(R+h)^2\sqrt{g(R+h)}}{Rg\ (R+h)}$$

Periodo dell'orbita della ISS

$$T = 2\pi\frac{(R+h)}{R}\sqrt{\frac{R+h}{g}}$$

$$T = 2\pi\frac{6.78\ 10^6 m}{6.38\ 10^6 m}\sqrt{\frac{6.78\ 10^6 m}{9.81\ m/s^2}}$$

$$T = 5.55\ 10^3 s = 1.54\ h = 1^h 33'$$

Sedici volte l'alba!

Alba dalla ISS - ESA

Per ottenere il numero di giri

$$\frac{d}{T} = N$$

$$\mathrm{N} = \frac{24\ h}{1.54\ h} = 15.6\ giri \cong 16\ giri$$

Il calcolo conferma quanto visto da Samantha dalla Stazione Spaziale Internazionale in un giorno solare.

La ISS ruotando intorno alla Terra passa dal giorno alla notte in un'ora e mezza, il che equivale a vedere l'alba circa 16 volte in un giorno!

"Penso che per dare una mano agli studenti bisognerebbe mettere più impegno nell'inventare problemi che chiariscano i concetti presentati a lezione.

Esercizi e problemi forniscono una buona opportunità di completare l'argomento e rendere più reali, più complete, più salde nella mente le idee."

Dalla prefazione di "Sei pezzi meno facili" di Richard P. Feynman, Giugno 1963

I problemi proposti sono stati elaborati da
Maria Grazia Grandi

Prepararsi alla seconda prova scritta di fisica e matematica del Liceo scientifico

Ed. ETAS Rizzoli, 2015

Grazie per l'attenzione

Buon studio!