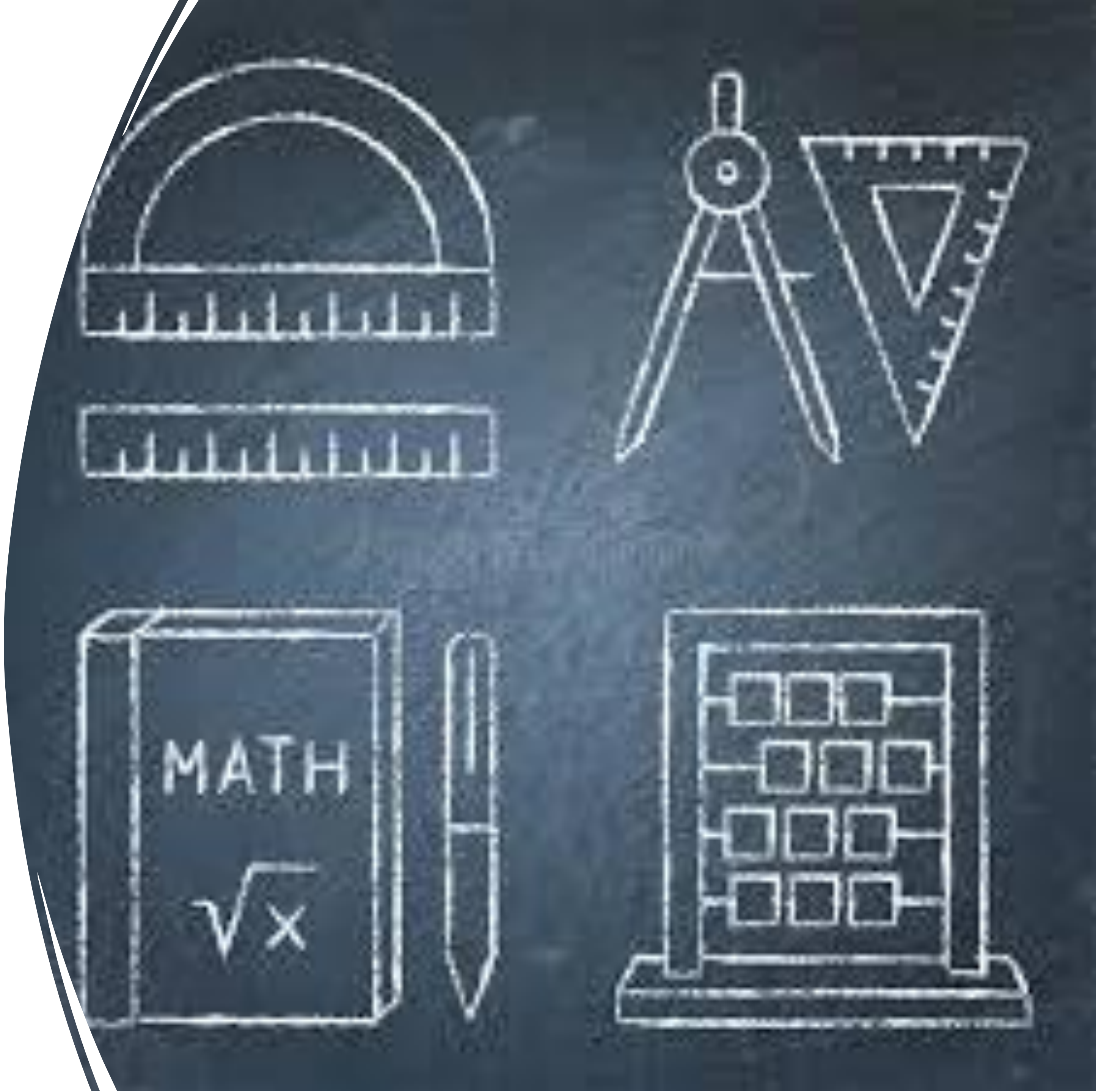
L’importanza di creare un modello: l’esempio dei Giochi Matematici

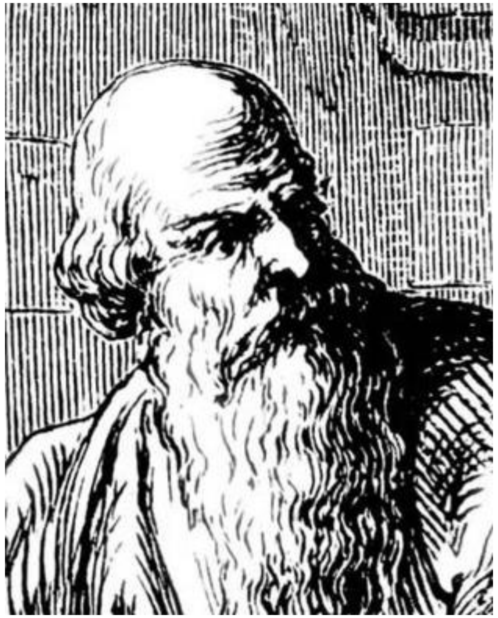
Jacopo **Garlasco**



Aula **Notari**
Università Commerciale
“Luigi Bocconi”
Milano, **14 Gennaio 2022**

Dal gioco al modello: un po' di storia

Il **dilemma dei buoi** (III secolo a.C.)

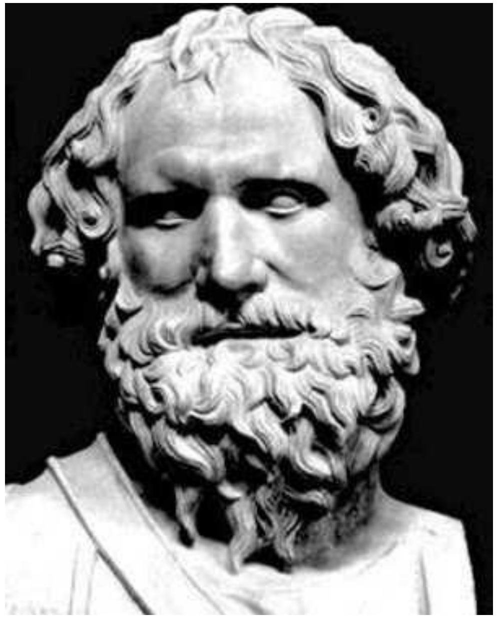


Archimede
di Siracusa

[…] Quattro greggi di diverso colore: il primo (color) *bianco latteo, il secondo nero lucente, il terzo bruno e il quarto chiazzato.*

[…] I bianchi erano in numero uguale alla metà aumentata di un terzo dei tori neri più inoltre i tori bruni; i tori neri erano in numero uguale alla quarta e quinta parte dei chiazzati e accresciuti dei tori bruni.

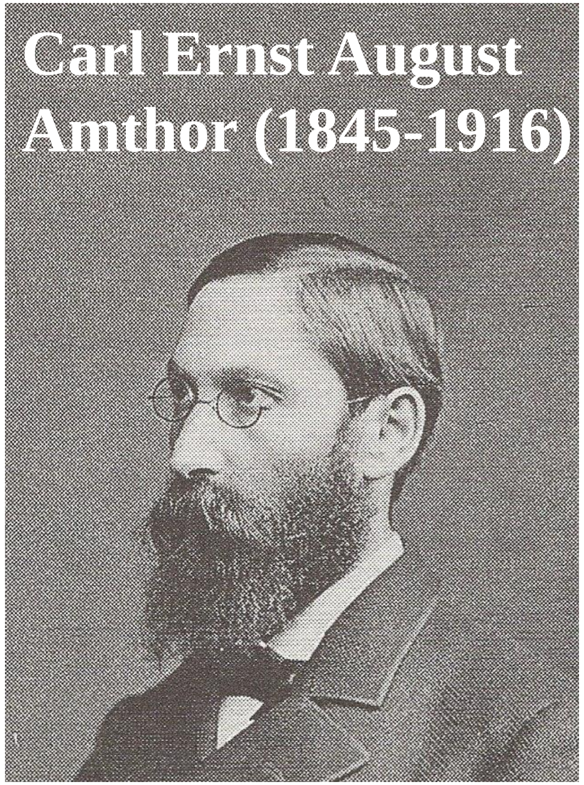
Considera inoltre che i chiazzati erano in numero uguale alla sesta più la settima parte dei tori bianchi più inoltre i tori bruni […]



Eratostene
di Cirene

Dal gioco al modello: un po' di storia

Il **dilemma dei buoi:** verso i giorni nostri



$$\begin{cases} x = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})y+z \\ y = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})t+z \\ t = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})x+z \\ x' = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(y+y') \\ y' = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(t+t') \\ t' = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(z+z') \\ z' = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(x+x') \end{cases}$$

$$x+y=a^2$$

$$z+t=\frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizzando le tabelle logaritmiche, Amthor determina l'ordine di grandezza della più piccola soluzione: **oltre 200,000 cifre!**

$7.76 \cdot \mathbf{10^{206544}}$

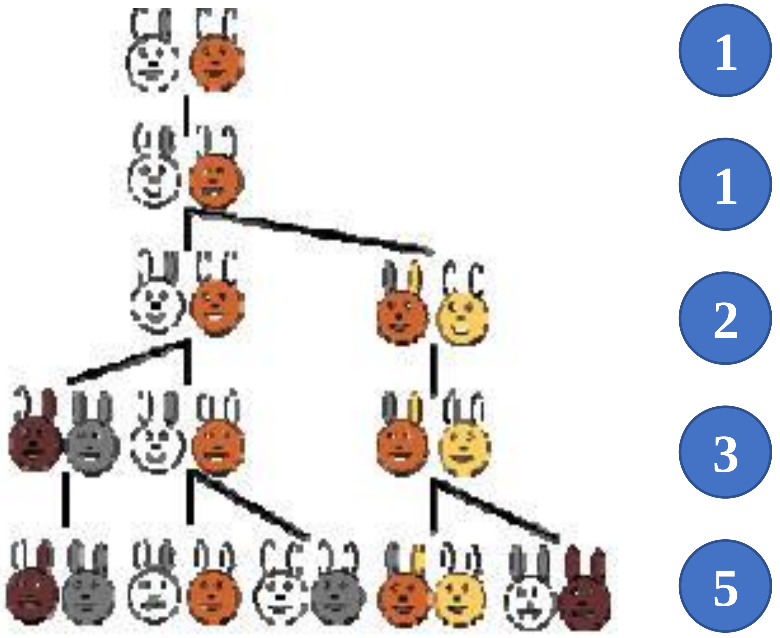
Dal gioco al modello: un po' di storia

I **conigli** di **Fibonacci**

Leonardo Pisano
(**Fibonacci**)
ca. 1170 – 1242

Una popolazione di conigli si riproduce con la seguente regola: si parte da **una sola coppia di conigli** (primo mese). Ogni coppia di conigli impiega **un mese per diventare adulta**, e dal **mese successivo** è in grado di generare **un'altra coppia di conigli**.

Quante coppie di conigli vi saranno all'**N-esimo mese**?



$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$$

Perché, dal **Gioco Matematico,**
si passa al **Modello Matematico?**

(1) Per risolvere formalmente un quesito

In un cortile ci sono **polli** e **conigli:** in totale ci sono **40 teste** e **130 zampe.**
Quanti sono gli animali di ciascun tipo?

Polli = X, ciascuno con
Conigli = Y, ciascuno c

$$\begin{cases} 2X + 4Y = 130 \\ X + Y = 40 \end{cases}$$

(…se tutti fossero polli…)

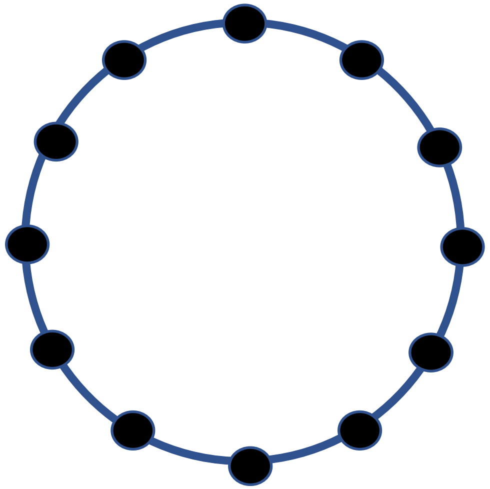
$$2Y = 130 - 80 = 50$$

$$Y = 25$$

$$X = 40 - 25 = 15$$

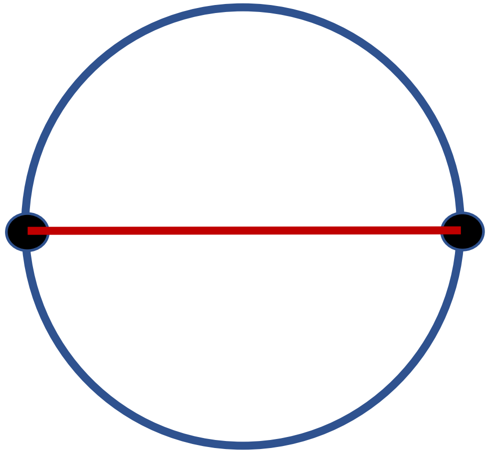
(2) Per ...

PROBLEMA 1. Intorno a un tavolo rotondo vi sono **12 persone**. L'obiettivo è realizzare una **configurazione** in cui **6 coppie** si **stringano la mano** contemporaneamente, **senza che vi siano «incroci»** tra le strette di mano (perché porta sfortuna!). **Quante sono le possibili configurazioni di questo tipo?** Si suppone che tutte le persone abbiano braccia infinitamente lunghe…

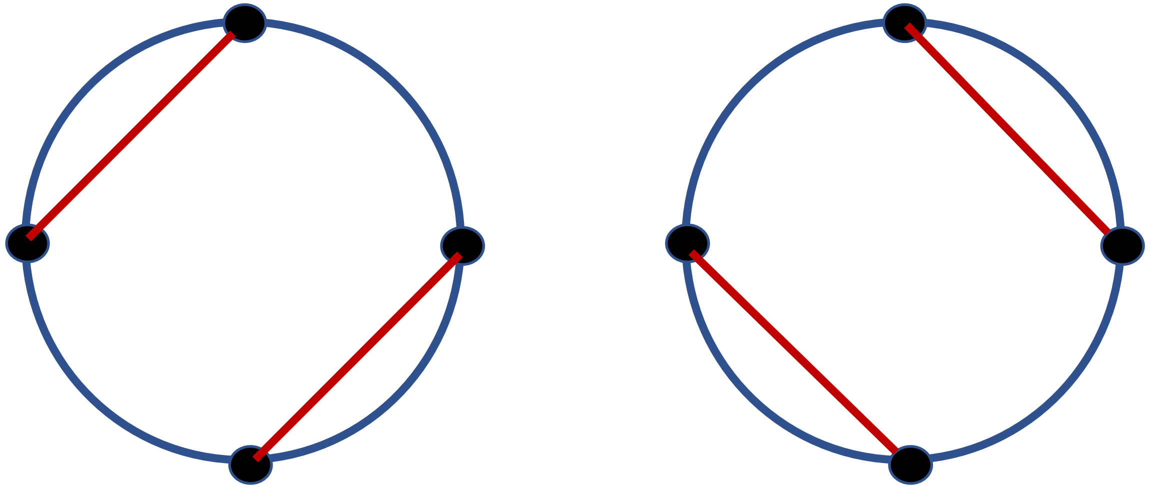


(2) Per ...

Meglio cominciare da qualcosa di più semplice:



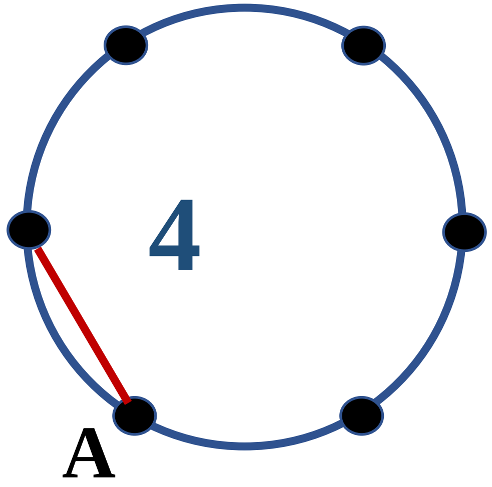
N = 1
1 soluzione



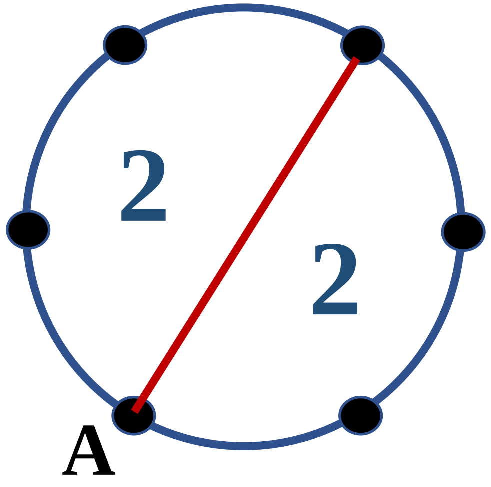
N = 2
2 soluzioni

(2) Per ...

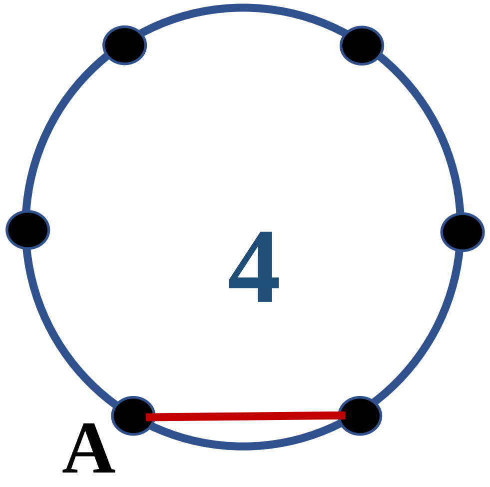
Meglio cominciare da qualcosa di più semplice:



2 soluzioni



1 · 1 = 1 soluzione

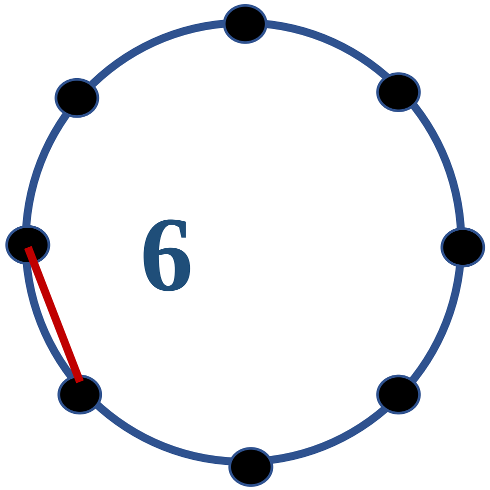


2 soluzioni

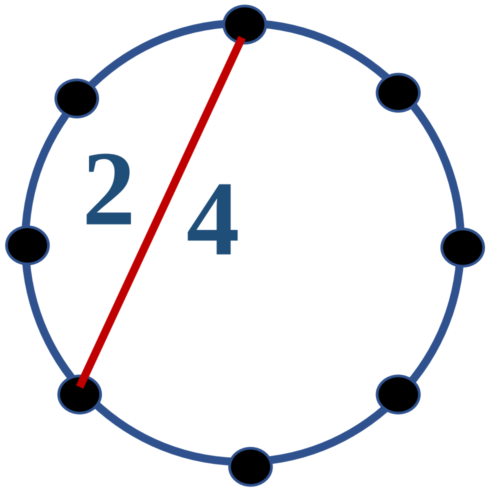
N = 3
5 soluzioni

(2) Per ...

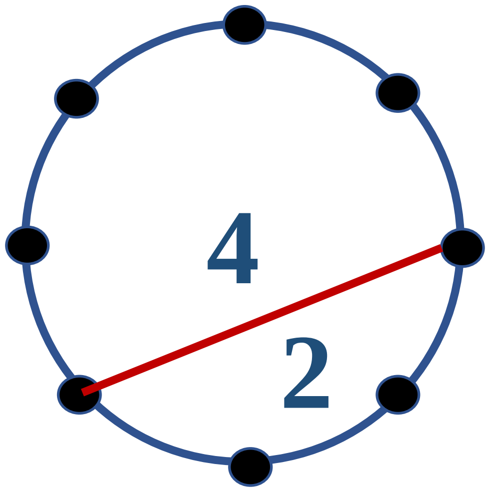
Meglio cominciare da qualcosa di più semplice:



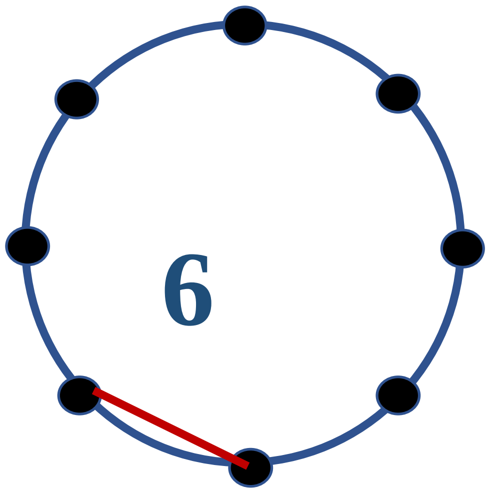
5 soluzioni



$1 \cdot 2$
= 2 soluzioni



$1 \cdot 2$
= 2 soluzioni



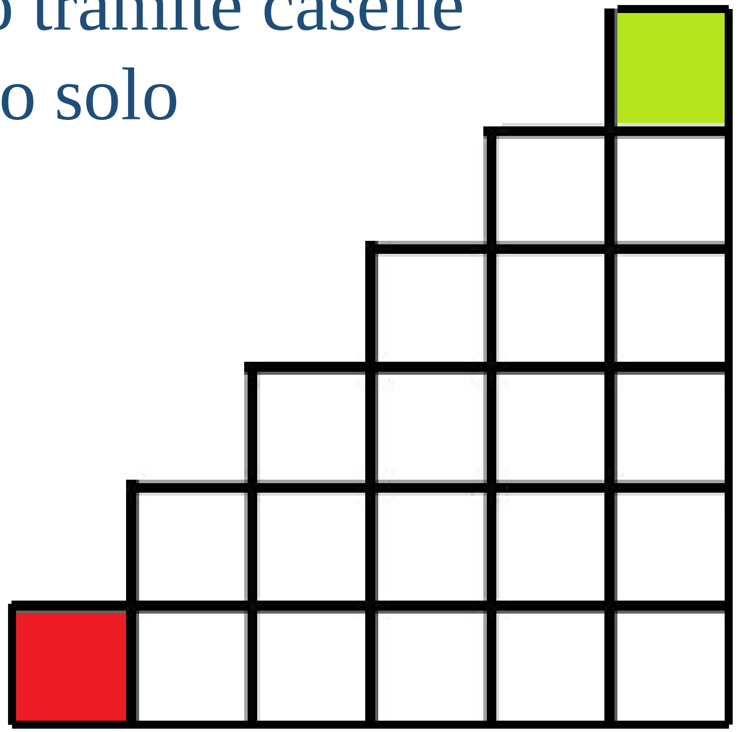
5 soluzioni

N = 4: 14 soluzioni

(2) Per ...

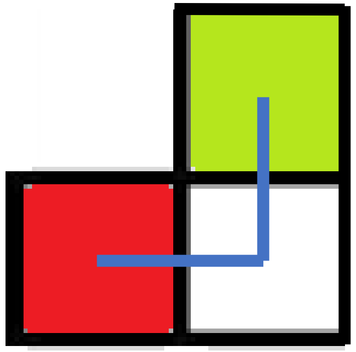
PROBLEMA 2. Nella seguente scala a **5 gradini**, l'obiettivo è partire dalla **casella rossa** ed **arrivare in quella verde**, passando tramite caselle **adiacenti** per un lato. **Attenzione, però**: è consentito solo andare **verso destra o verso l'alto**, mentre non è possibile tornare in basso o verso sinistra.

Quanti sono i diversi percorsi possibili?

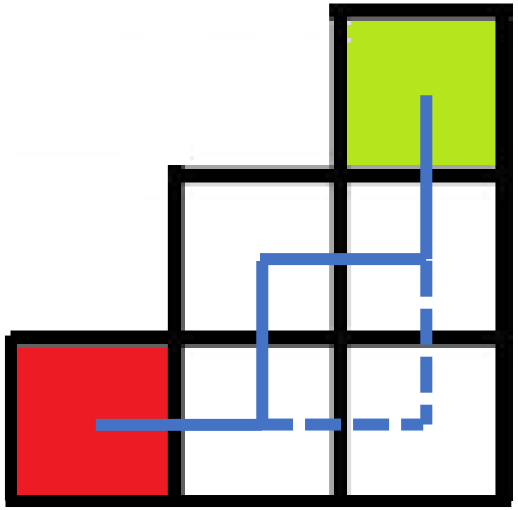


(2) Per ...

Forse anche in questo caso conviene iniziare da qualche caso più semplice…



N = 1
1 soluzione



N = 2
2 soluzioni

(2) Per ...

Potrebbe essere utile pensare che, in una **casella**, si arriva solo dalla casella **a sinistra** o da quella **in basso**… e quindi il numero di modi sarà uguale alla **somma dei numeri di modi per arrivare nelle rispettive caselle:**

					42
				14	42
			5	14	28
		2	5	9	14
	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1

(2) Per ricondurre un quesito ad un altro già noto

La successione trovata nei problemi precedenti non è casuale:

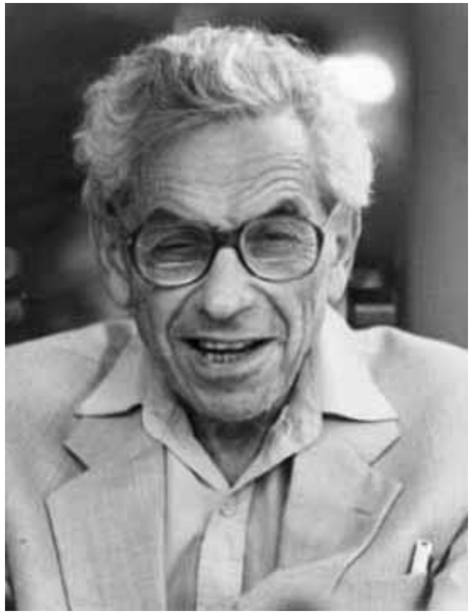
1 – 2 – 5 – 14 – 42 – 132 – 429 – …

Successione di **Catalan**

Eugène Charles **Catalan (1814 – 1894)**

(2) Per ricondurre un quesito ad un altro già noto

In realtà il modello vero e proprio arriva solo nel secolo scorso:



Paul Erdős
(1913-1996)

<u>PROBLEMA DI ERDŐS</u>

Supponiamo di avere lo **stesso numero N** di **"+1"** e **"-1"** e di **metterli in fila** secondo un ordine qualsiasi.

Il problema consiste nel **determinare il numero di possibili disposizioni**, tali per cui la fila non ha **mai somme parziali negative** (per ***somma parziale*** si intende la somma algebrica dal primo termine fino a **uno qualsiasi dei numeri** della fila, nell'ordine)

(2) Per ricondurre un quesito ad un altro già noto

In realtà il modello vero e proprio arriva solo nel secolo scorso:

N = 1

+1	-1

N = 2

+1	+1	-1	-1
+1	-1	+1	-1

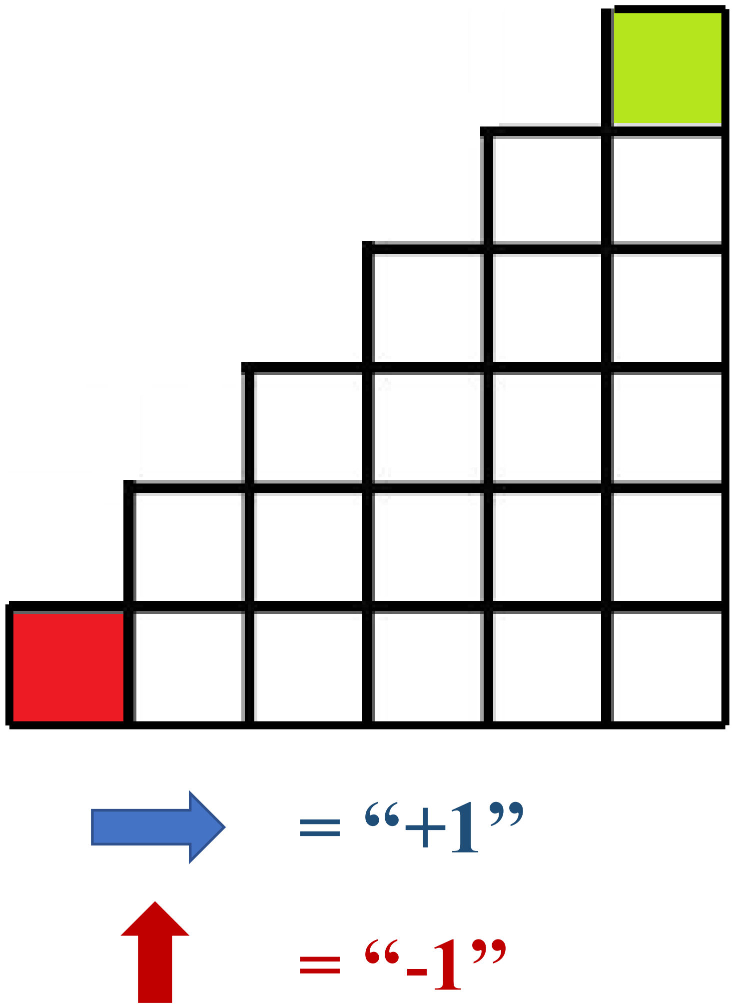
N = 3

+1	+1	+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	-1	-1
+1	+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	+1	-1	-1

(2) Per ricondurre un quesito ad un altro già noto

Il giovane Erdős **dimostra** che **le soluzioni** a questo problema **per un numero qualunque** ***N*** sono proprio rappresentate dai **numeri** della **successione di Catalan**

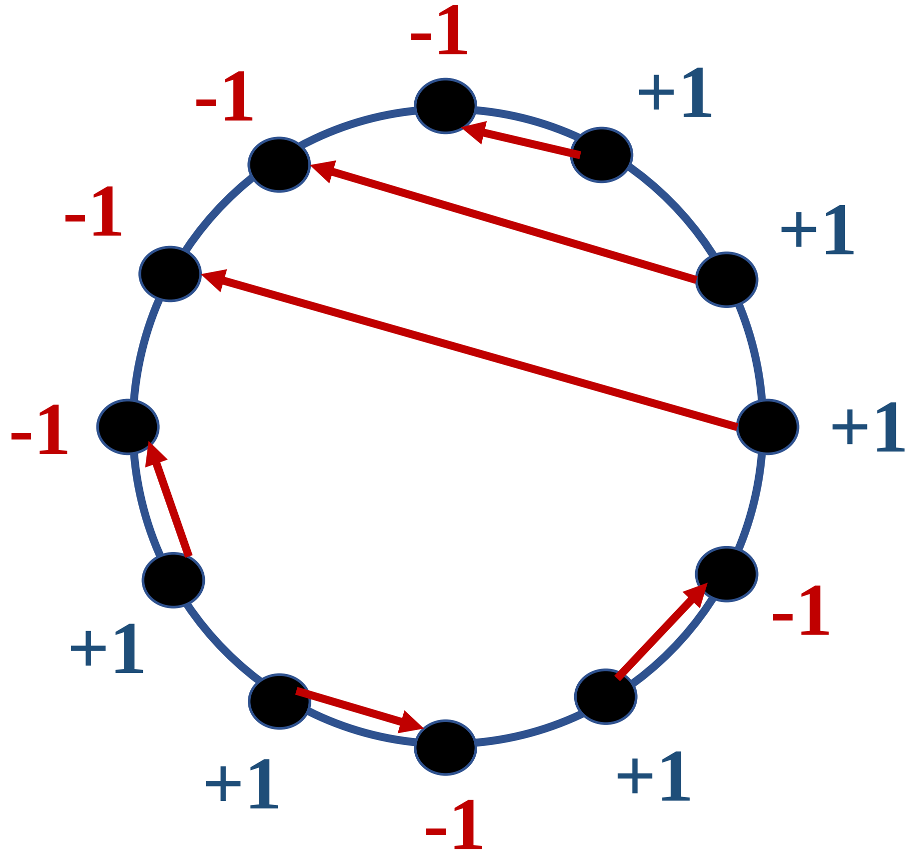
In effetti, i **problemi precedenti** sono versioni «***vestite***» del **problema di Erdős…**



(2) Per ricondurre un quesito ad un altro già noto

Il giovane Erdős **dimostra** che **le soluzioni** a questo problema **per un numero qualunque *N*** sono proprio rappresentate dai **numeri** della **successione di Catalan**

In effetti, i **problemi precedenti** sono versioni «***vestite***» del **problema di Erdős…**



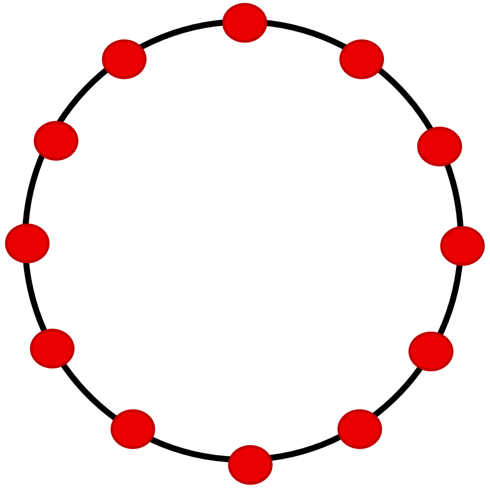
Coda della freccia = "+1"

Punta della freccia = "-1"

(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

PROBLEMA

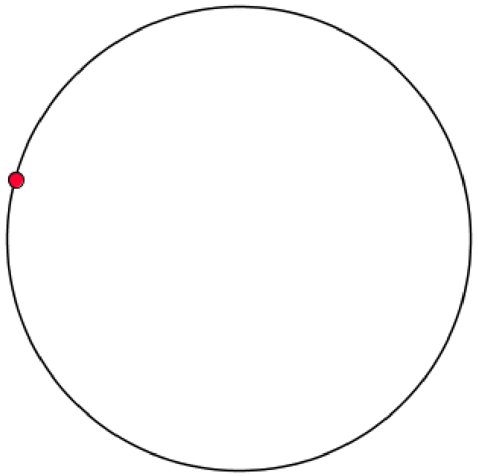
Supponiamo di avere **una circonferenza** e ***N* punti** su di essa.
Tracciamo **tutte le possibili corde** che congiungono tali punti.
Al massimo, in quante regioni di piano risulta diviso il cerchio?



(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

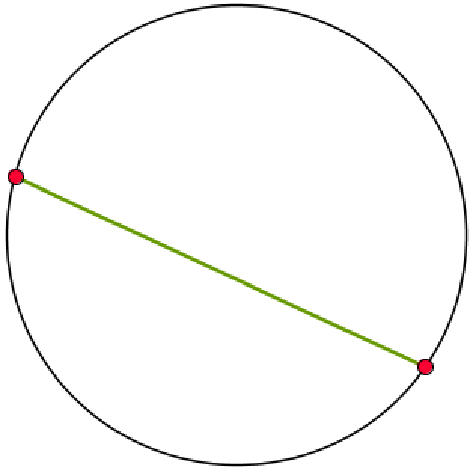
Come nei problemi precedenti, partiamo da casi più semplici:

N = 1



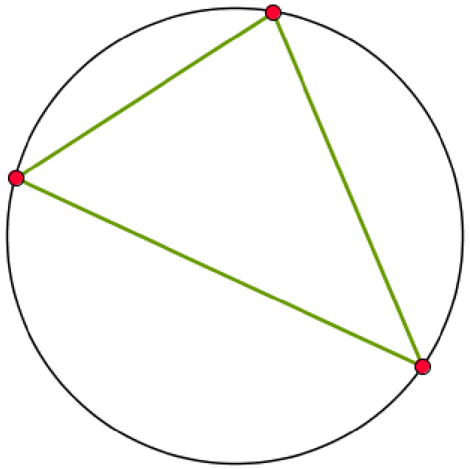
1 regione

N = 2



2 regioni

N = 3

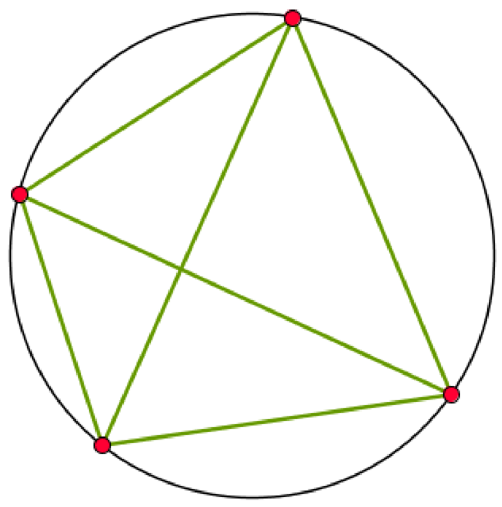


4 regioni

(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

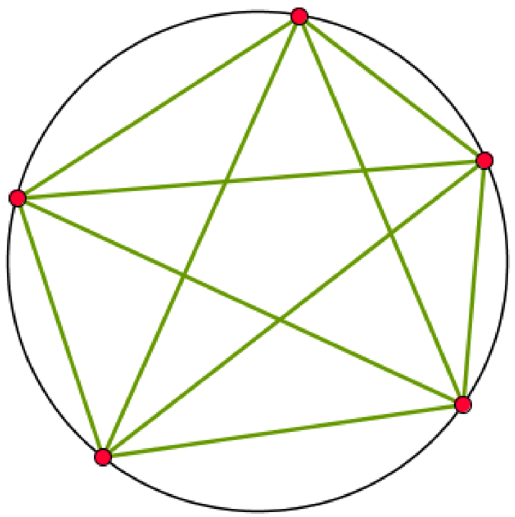
Come nei problemi precedenti, partiamo da casi più semplici:

N = 4



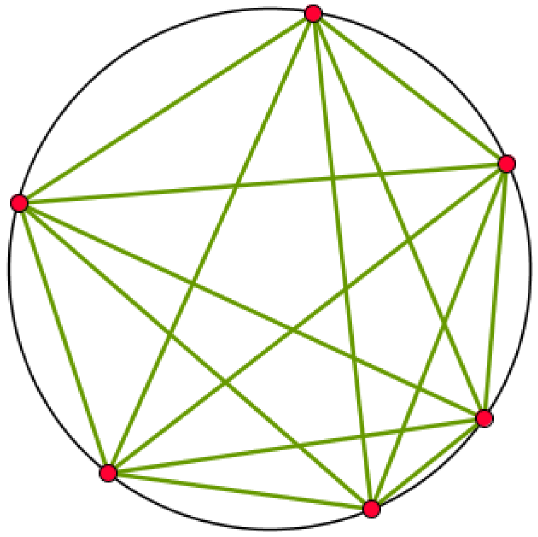
8 regioni

N = 5



16 regioni

N = 6

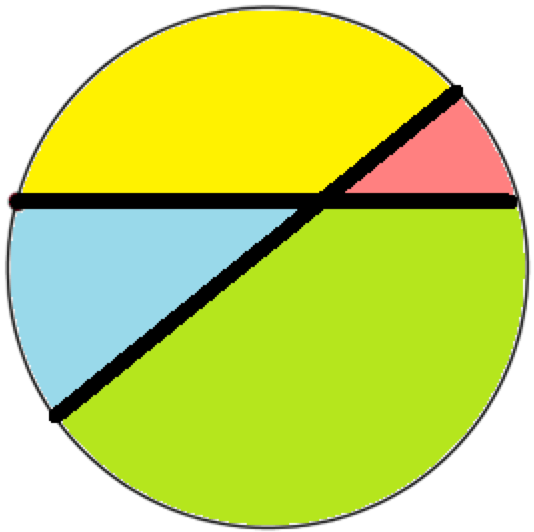


31 regioni

(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

Questo avviene perché **l'esponenziale** dei **primi 5 casi**
… è una successione **senza un modello alla base!**

Il vero modello:



- Si parte dalla **regione iniziale (n. 1)**
- Aggiungendo **ogni retta**, si aggiunge **una regione**
- Se però si aggiunge **un'intersezione**, si avrà **una regione in più**

Totale: 1 + *rette* + *intersezioni*

(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

Tornando al **problema degli *N* punti:** questo modello… **è esponenziale?**

1 + *rette* + *intersezioni*

Rette → **Coppie di punti** → **N(N-1)/2**

Intersezioni → **Coppie di rette** → **Quaterne di punti** → $\dfrac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$

Polinomio di quarto grado

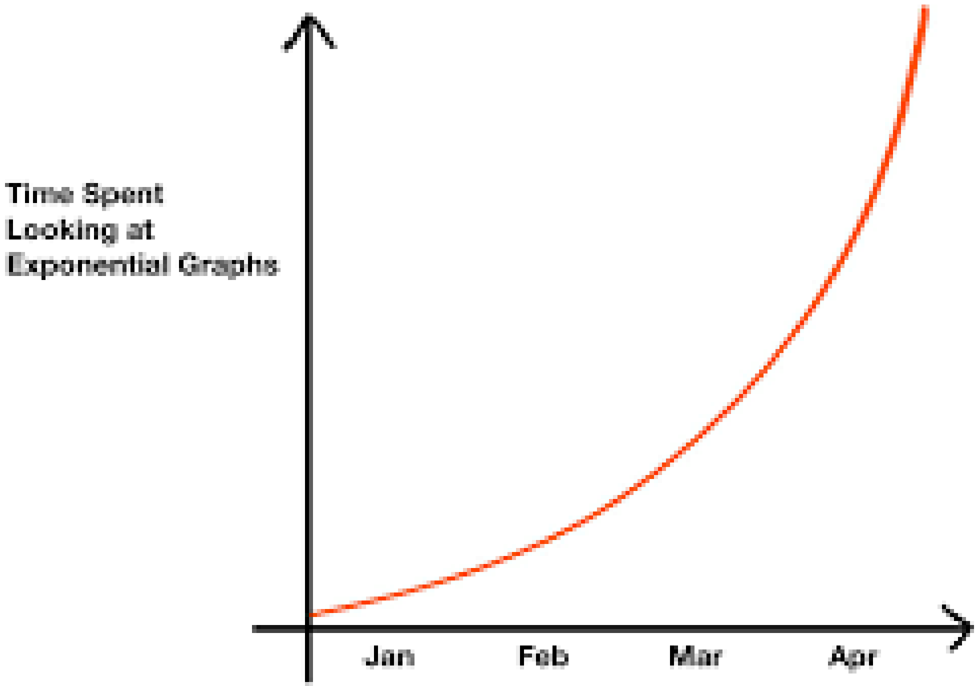
(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

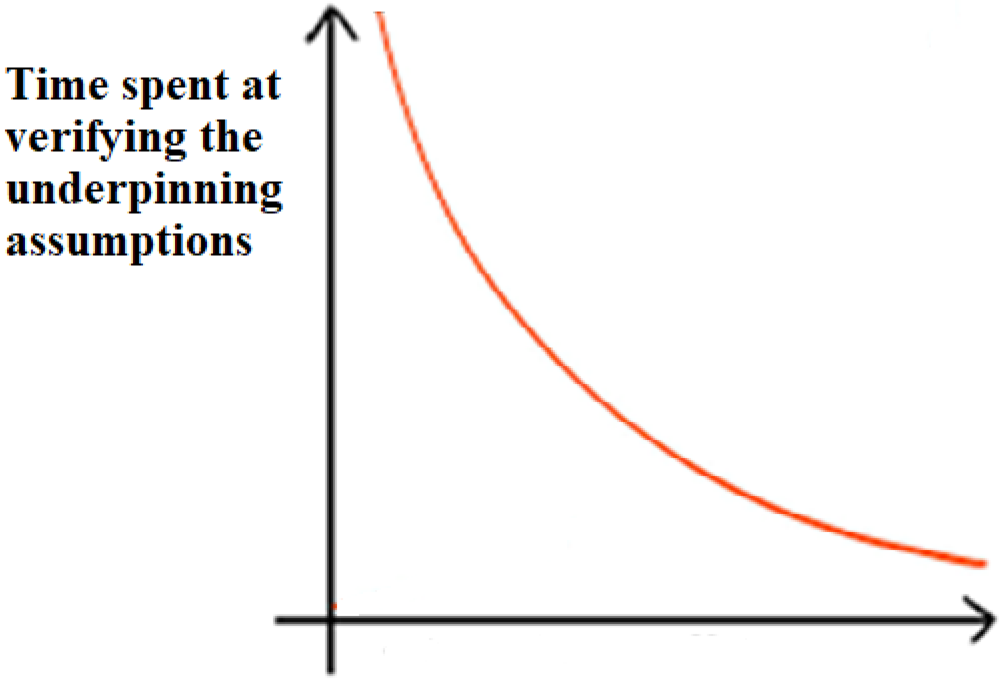
Polinomio di quarto grado *vs* Esponenziale

	1 + rette + intersezioni	2^{N-1}
N = 6	31	32
N = 10	256	512
N = 20	$5.0 \cdot 10^3$	$5.2 \cdot 10^5$
N = 50	$2.3 \cdot 10^5$	$5.7 \cdot 10^{14}$

(3) Per dare stime e interpretazioni corrette

Verificare le premesse/assunzioni del modello
è condizione fondamentale per capirne il reale valore





«Tutti i modelli sono approssimazioni. E quindi, in linea di principio, tutti i modelli sono sbagliati… ma alcuni sono utili»

(George Box, 1976)