Probabilità

Marta Lucchini

Orientamatica 2020

Per cominciare

1) Qual è la probabilità di ottenere **almeno un 6** lanciando 2 volte un dado a sei facce?

Per cominciare

1) Qual è la probabilità di ottenere **almeno un 6** lanciando 2 volte un dado a sei facce?

1bis) Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado a sei facce?

Per cominciare

1) Qual è la probabilità di ottenere **almeno un 6** lanciando 2 volte un dado a sei facce?

1bis) Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado a sei facce?

2) Una scatola contiene 50 palline, alcune gialle e alcune rosse.
• Come valutare la probabilità che, estratta una pallina a caso dalla scatola, sia rossa?

Per cominciare

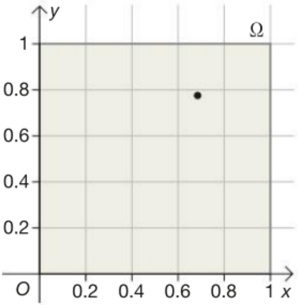
1) Qual è la probabilità di ottenere **almeno un 6** lanciando 2 volte un dado a sei facce?

1bis) Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado a sei facce?

2) Una scatola contiene 50 palline, alcune gialle e alcune rosse.
- Come valutare la probabilità che, estratta una pallina a caso dalla scatola, sia rossa?
- Come possiamo stimare la composizione della scatola?

3) Qual è la probabilità che un punto scelto a caso nel quadrato di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ ...

- abbia ascissa e ordinata minori di 0,5?
- appartenga al cerchio inscritto nel quadrato?



Probabilità: come definirla?

Definire il concetto di probabilità è stato difficile (ha richiesto secoli di lavoro!) perché, come abbiamo visto, contesti diversi richiedono criteri diversi. Pensate per esempio a quanto sia limitata l'applicazione di una regola di probabilità che consista nel calcolo del rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili.

Probabilità: come definirla?

Definire il concetto di probabilità è stato difficile (ha richiesto secoli di lavoro!) perché, come abbiamo visto, contesti diversi richiedono criteri diversi. Pensate per esempio a quanto sia limitata l'applicazione di una regola di probabilità che consista nel calcolo del rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili.

L'approccio moderno al problema della definizione è quindi un approccio *assiomatico*.

Probabilità: come definirla?

Definire il concetto di probabilità è stato difficile (ha richiesto secoli di lavoro!) perché, come abbiamo visto, contesti diversi richiedono criteri diversi. Pensate per esempio a quanto sia limitata l'applicazione di una regola di probabilità che consista nel calcolo del rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili.

L'approccio moderno al problema della definizione è quindi un approccio *assiomatico*.

Serve innanzitutto che definiamo, per ogni esperimento aleatorio,

- lo spazio campionario Ω come l'insieme di tutti gli esiti possibili;
- gli eventi come sottoinsiemi di Ω.

Esercizio 1

A, B, C sono tre eventi. Esprimi mediante operazioni insiemistiche i seguenti eventi.

a) Almeno uno dei tre eventi si verifica.

b) Non si verifica nessuno dei tre.

c) Si verifica solo A.

d) B non si verifica

e) Si verificano al più due eventi.

Assiomi della probabilità

Ω spazio campionario.

- $P(E) \geq 0$ per ogni evento E
- $P(\Omega) = 1$
- Se E e F sono eventi incompatibili, ovvero tali che $E \cap F = \emptyset$, allora

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Assiomi della probabilità

Ω spazio campionario.

- $P(E) \geq 0$ per ogni evento E
- $P(\Omega) = 1$
- Se E e F sono eventi incompatibili, ovvero tali che $E \cap F = \emptyset$, allora

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Facili e utili conseguenze degli assiomi:

- Se E e F sono due eventi qualsiasi, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
- $P(E^c) = 1 - P(E)$, con E^c evento complementare di E.

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

$$|\Omega| = M^n$$

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

$$|\Omega| = M^n$$

- Estrazioni senza reimmissione ($n \leq M$), con ordine:

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

$$|\Omega| = M^n$$

- Estrazioni senza reimmissione ($n \leq M$), con ordine:

$$|\Omega| = M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

$$|\Omega| = M^n$$

- Estrazioni senza reimmissione ($n \leq M$), con ordine:

$$|\Omega| = M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

- Estrazioni senza reimmissione in cui non conta l'ordine ("in blocco", $n \leq M$):

Calcolo combinatorio per la probabilità

Consideriamo un'urna che contenga M palline numerate da 1 a M, indistinguibili da ogni altro punto di vista. Quanti esiti possibili può dare l'esperimento che consiste nell'estrarne n?

- Estrazioni con reimmissione ($n \geq 1$ qualunque):

$$|\Omega| = M^n$$

- Estrazioni senza reimmissione ($n \leq M$), con ordine:

$$|\Omega| = M(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-n+1) = \frac{M!}{(M-n)!}$$

- Estrazioni senza reimmissione in cui non conta l'ordine ("in blocco", $n \leq M$):

$$|\Omega| = \frac{M!}{(M-n)!n!} := \binom{M}{n}$$

Esercizi - 2

A) Qual è la probabilità che, lanciando 4 volte un dado equo, esca almeno un 6?

B) Anna ha dimenticato il PIN del proprio bancomat.

• Qual è la probabilità che, in un tentativo, Anna indovini il PIN?
• Qual è la probabilità che, in un tentativo, Anna indovini il PIN, se si ricorda che inizia per 2 e che non contiene altre cifre pari?

Esercizi - 2

A) Qual è la probabilità che, lanciando 4 volte un dado equo, esca almeno un 6?

B) Anna ha dimenticato il PIN del proprio bancomat.

- Qual è la probabilità che, in un tentativo, Anna indovini il PIN?
- Qual è la probabilità che, in un tentativo, Anna indovini il PIN, se si ricorda che inizia per 2 e che non contiene altre cifre pari?

C) Si effettuano 5 estrazioni con reimmissione da un'urna che ne contiene 10.

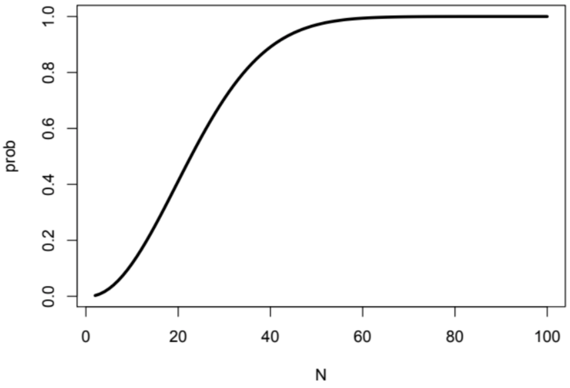
- Qual è la probabilità che le prime 4 volte si estragga la pallina 1?
- Qual è la probabilità che le 5 estratte siano tutte diverse le une dalle altre?

Esercizio 3

In un gruppo di N persone, qual è la probabilità che almeno due di loro compiano gli anni lo stesso giorno?

Esercizio 3

In un gruppo di N persone, qual è la probabilità che almeno due di loro compiano gli anni lo stesso giorno?



Esercizi - 4

A) In quanti modi 10 persone possono disporsi

- su 10 sedie allineate?
- su 11 sedie allineate?
- attorno a un tavolo circolare, con 10 sedie?

Esercizi - 4

A) In quanti modi 10 persone possono disporsi

- su 10 sedie allineate?
- su 11 sedie allineate?
- attorno a un tavolo circolare, con 10 sedie?

B) Un'associazione è formata da 20 iscritti, tra cui devono essere scelti un presidente e un segretario.

- In quanti modi diversi possono essere ricoperte le due cariche?
- Qual è la probabilità che Mario, uno dei 20 iscritti, ricopra una carica?

Esercizio 5

Da un mazzo di 40 carte, suddivise in 4 semi (cuori, quadri, fiori, picche), 10 carte per ciasun seme (2,3,4,5,6,7,J,Q,K,A), estraggo a caso, contemporaneamente, 3 carte.

a) In quanti modi distinti posso essere servito?

Esercizio 5

Da un mazzo di 40 carte, suddivise in 4 semi (cuori, quadri, fiori, picche), 10 carte per ciasun seme (2,3,4,5,6,7,J,Q,K,A), estraggo a caso, contemporaneamente, 3 carte.
a) In quanti modi distinti posso essere servito?

Calcolare la probabilità di
b) estrarre 3 figure;
c) estrarre 3 figure oppure tre carte di cuori;
d) estrarre almeno una carta di quadri;
e) estrarre due cuori e nessun picche.

Dall'Esame di Stato

Simulazione del 28 febbraio 2019

Una scatola contiene 16 palline, numerate da 1 a 16.

a) Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?

Dall'Esame di Stato

Simulazione del 28 febbraio 2019

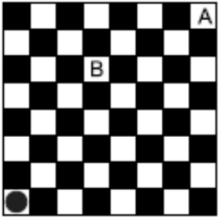
Una scatola contiene 16 palline, numerate da 1 a 16.

a) Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?

b) Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

Esame di Stato 2016)

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura.



A ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa.

Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta ad A, qual è la probabilità che essa passi per B?

Esercizi - 6 Probabilità condizionata

$P(A|B)$: probabilità che A si verifichi sapendo che si è verificato B.

Se A e B sono due eventi, con $P(B) > 0$, definiamo $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Esercizi - 6 Probabilità condizionata

$P(A|B)$: probabilità che A si verifichi sapendo che si è verificato B.

Se A e B sono due eventi, con $P(B) > 0$, definiamo $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

• Si lancia due volte un dado equo. Siano A l'evento "la somma dei due lanci è 10" e B l'evento "al primo lancio è uscito 4".

a) Qual è la probabilità che al primo lancio esca 4 e la somma dei due lanci sia 10?

b) Qual è la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi?

c) Qual è la probabilità che non si verifichi nessuno dei due eventi?

Esercizi - 6 Probabilità condizionata

$P(A|B)$: probabilità che A si verifichi sapendo che si è verificato B.

Se A e B sono due eventi, con $P(B) > 0$, definiamo $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

• Si lancia due volte un dado equo. Siano A l'evento "la somma dei due lanci è 10" e B l'evento "al primo lancio è uscito 4".

a) Qual è la probabilità che al primo lancio esca 4 e la somma dei due lanci sia 10?

b) Qual è la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi?

c) Qual è la probabilità che non si verifichi nessuno dei due eventi?

d) Qual è la probabilità che al primo lancio sia uscito 4, sapendo che la somma dei due lanci ha dato 10?

Esercizi - 6 Probabilità condizionata

$P(A|B)$: probabilità che A si verifichi sapendo che si è verificato B.

Se A e B sono due eventi, con $P(B) > 0$, definiamo $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

• Si lancia due volte un dado equo. Siano A l'evento "la somma dei due lanci è 10" e B l'evento "al primo lancio è uscito 4".

a) Qual è la probabilità che al primo lancio esca 4 e la somma dei due lanci sia 10?

b) Qual è la probabilità che si verifichi almeno uno dei due eventi?

c) Qual è la probabilità che non si verifichi nessuno dei due eventi?

d) Qual è la probabilità che al primo lancio sia uscito 4, sapendo che la somma dei due lanci ha dato 10?

• Un'inchiesta sulla popolazione della città XX ha rivelato che l'8% della popolazione è ricco, il 5% è famoso, il 2% è ricco e famoso. Qual è la probabilità che un cittadino famoso sia ricco?

Esercizio 7

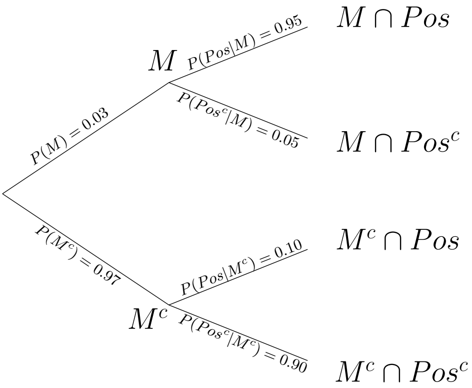
L'incidenza di una malattia *xy* su una popolazione è pari all'1%. Un individuo si sottopone ha un test diagnostico, per verificare se è malato di *xy*. Si sa che la sensibilità del test, ovvero la probabilità che un soggetto malato risulti positivo, è del 95%, mentre la *specificità* del test, ovvero la probabilità che un soggetto sano risulti negativo è del 97%.

a) Calcolare la probabilità che il soggetto sia malato e risulti positivo al test.

b) Calcolare la probabilità che il soggetto risulti positivo al test.

c) Calcolare il *valore predittivo* del test, ovvero la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato.

Esercizio 7



a) $P(M \cap Pos)$? b) $P(Pos)$? c) $P(M|Pos)$?

Esercizio 8

Il venditore di uno strumento di controllo dichiara che il suo prodotto ha un'alta affidabilità, dal momento che con probabilità $p = 99\%$ individua correttamente i componenti difettosi e quelli funzionanti. Con questo strumento, andiamo a rintracciare i componenti difettosi di una partita, sapendo che essi ne costituiscono il 5%.

a) Determinare la probabilità che un componente venga dichiarato difettoso dallo strumento di controllo.

b) Determinare la probabilità che un componente sia difettoso, se lo strumento lo ha dichiarato tale.

c) Ora, se vogliamo che la probabilità del punto b) sia pari al 95%, quanto deve valere l'affidabilità p dello strumento?

Esercizio 9 - Se l'albero è più grande

Se $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$,

allora $P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$.

Esercizio 9 - Se l'albero è più grande

Se $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$,

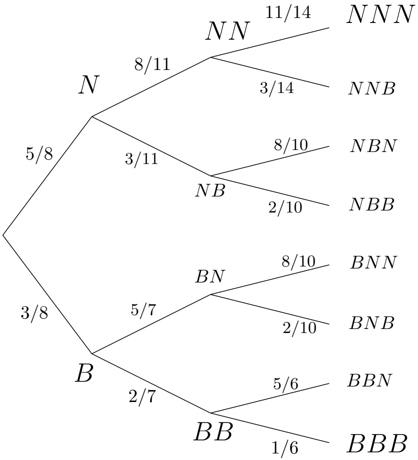
allora $P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A)$.

Un'urna contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere.

Si estrae una pallina a caso. Se la pallina estratta è nera, la pallina viene riposta nell'urna insieme ad altre tre palline nere. Se invece è bianca, nessuna pallina è riposta nell'urna. Si procede quindi a successive due estrazioni seguendo lo schema appena descritto.

Calcolare la probabilità di estrarre tre palline dello stesso colore.

Esercizio 9



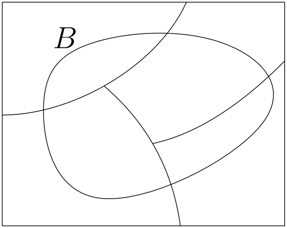
$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{11}{14} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

Formula delle probabilità totali

Sia B un evento che può realizzarsi in più condizioni $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si intende che le A_i siano a due a due disgiunte e tali che la loro unione "copra" tutto lo spazio campionario Ω.

Formula delle probabilità totali

Sia B un evento che può realizzarsi in più condizioni $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Si intende che le A_i siano a due a due disgiunte e tali che la loro unione "copra" tutto lo spazio campionario Ω.



Allora

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \ldots + P(B|A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Teorema di Bayes

Chiediamoci ora qual è la probabilità che si sia verificato uno degli scenari A_k, sapendo che B si è verificato:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Esercizio 10

Di tre urne indistinguibili, si sa solo che una contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere, un'altra ne contiene 8, tutte bianche, la terza ne contiene 2 nere. Si estrae una pallina da un'urna, scelta a caso tra le tre.

a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

$\longrightarrow$ *formula delle probabilità totali*

Esercizio 10

Di tre urne indistinguibili, si sa solo che una contiene 8 palline di cui 3 bianche e 5 nere, un'altra ne contiene 8, tutte bianche, la terza ne contiene 2 nere. Si estrae una pallina da un'urna, scelta a caso tra le tre.

a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

$\longrightarrow$ *formula delle probabilità totali*

b) Se la pallina estratta è bianca, qual è la probabilità di aver pescato dall'urna contenente solo bianche?

$\longrightarrow$ *teorema di Bayes*

Esercizio 11

Tre macchine, A, B e C producono rispettivamente il 60%, il 30% e il 10% del numero totale dei pezzi prodotti da una fabbrica.

Le percentuali di produzione difettosa di queste macchine sono rispettivamente del 2%, 3% e 4%.

a) Qual è la probabilità di estrarre un pezzo difettoso?

b) Viene estratto a caso un pezzo che risulta difettoso: qual è la probabilità che sia stato prodotto dalla macchina C?

Indipendenza di eventi

Intuitivamente, diciamo che due eventi A e B sono indipendenti quando
$P(A|B) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(B|A) = P(B)$

Indipendenza di eventi

Intuitivamente, diciamo che due eventi A e B sono indipendenti quando
$P(A|B) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(B|A) = P(B)$

Più sinteticamente, A e B si dicono indipendenti quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(Verificate che le due definizioni sono equivalenti!)

Indipendenza di eventi

Intuitivamente, diciamo che due eventi A e B sono indipendenti quando
$P(A|B) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(B|A) = P(B)$

Più sinteticamente, A e B si dicono indipendenti quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(Verificate che le due definizioni sono equivalenti!)

La definizione si generalizza a più eventi: diciamo che $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ costituiscono una famiglia di eventi indipendenti quando la probabilità dell'intersezione di un qualunque sottoinsieme di essi è uguale al prodotto delle probabilità degli eventi coinvolti.

Indipendenza di eventi

Intuitivamente, diciamo che due eventi A e B sono indipendenti quando
$P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Più sinteticamente, A e B si dicono indipendenti quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(Verificate che le due definizioni sono equivalenti!)

La definizione si generalizza a più eventi: diciamo che $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ costituiscono una famiglia di eventi indipendenti quando la probabilità dell'intersezione di un qualunque sottoinsieme di essi è uguale al prodotto delle probabilità degli eventi coinvolti.

Ad esempio, A, B, C sono indipendenti se valgono:
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Esercizi - 12

• Si lancia tre volte una moneta tale che la probabilità che esca testa è p. Qual è la probabilità che escano tre teste?

Esercizi - 12

• Si lancia tre volte una moneta tale che la probabilità che esca testa è p. Qual è la probabilità che escano tre teste?

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = p^3$$

Infatti gli eventi T_1, T_2, T_3 si possono considerare indipendenti poiché tra di essi non vi è "interazione fisica".

Esercizi - 12

• Si lancia tre volte una moneta tale che la probabilità che esca testa è p. Qual è la probabilità che escano tre teste?

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = p^3$$

Infatti gli eventi T_1, T_2, T_3 si possono considerare indipendenti poiché tra di essi non vi è "interazione fisica".

• Si lancia due volte un dado equo. Sia A l'evento: "il punteggio dei due lanci è lo stesso", B l'evento: "il punteggio del primo dado è 3". I due eventi sono indipendenti?

Esercizi - 12

• Si lancia tre volte una moneta tale che la probabilità che esca testa è p. Qual è la probabilità che escano tre teste?

$$P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = p^3$$

Infatti gli eventi T_1, T_2, T_3 si possono considerare indipendenti poiché tra di essi non vi è "interazione fisica".

• Si lancia due volte un dado equo. Sia A l'evento: "il punteggio dei due lanci è lo stesso", B l'evento: "il punteggio del primo dado è 3". I due eventi sono indipendenti?

$P(A \cap B) = P(\{(3,3)\}) = 1/36;$
$P(A) = P(\{(i,i),\ \text{con } 1 \leq i \leq 6\}) = 1/6;$
$P(B) = P(\{(3,i),\ \text{con } 1 \leq i \leq 6\}) = 1/6.$

• Anna e Marco tentano il test per entrare alla facoltà di . . . . Entrambi hanno probabilità 0.8 di farcela, e lavorano autonomamente, senza copiare l'uno dall'altra.

a) Qual è la probabilità che lo superino entrambi?

b) Qual è la probabilità che lo superi almeno uno dei due?

Osservazioni

1. Attenzione a non confondere l'indipendenza con l'incompatibilità! Verificate che, se due eventi sono incompatibili non possono essere indipendenti, e viceversa.

Osservazioni

1. Attenzione a non confondere l'indipendenza con l'incompatibilità! Verificate che, se due eventi sono incompatibili non possono essere indipendenti, e viceversa.

2. Se A e B sono indipendenti, cosa possiamo dire di A^c e B? E di A e B^c? E di A^c e B^c?

Osservazioni

1. Attenzione a non confondere l'indipendenza con l'incompatibilità! Verificate che, se due eventi sono incompatibili non possono essere indipendenti, e viceversa.

2. Se A e B sono indipendenti, cosa possiamo dire di A^c e B? E di A e B^c? E di A^c e B^c?

Possiamo verificare che anche queste coppie di eventi sono indipendenti (come del resto è sensato aspettarsi); per esempio:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B) \cdot [1 - P(A)] = P(B) \cdot P(A^c) \end{aligned}$$

Dunque anche A^c e B sono indipendenti.

Esercizio 13

Abbiamo 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Le monete sono indistinguibili; se ne sceglie a caso una e la si lancia.

a) Calcolare la probabilità di ottenere testa.

b) Supponiamo che dopo aver lanciato 10 volte la moneta si siano ottenute 10 teste. Calcolare la probabilità di ottenere testa anche all'11-esimo lancio.

Esercizio 13

Abbiamo 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Le monete sono indistinguibili; se ne sceglie a caso una e la si lancia.

a) Calcolare la probabilità di ottenere testa.

b) Supponiamo che dopo aver lanciato 10 volte la moneta si siano ottenute 10 teste. Calcolare la probabilità di ottenere testa anche all'11-esimo lancio.

a) Per la formula delle probabilità totali,

$$P(T_1) = P(T_1|Equa)P(Equa) + P(T_1|Equa^c)P(Equa^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 0.7$$

Esercizio 13

Abbiamo 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Le monete sono indistinguibili; se ne sceglie a caso una e la si lancia.

a) Calcolare la probabilità di ottenere testa.

b) Supponiamo che dopo aver lanciato 10 volte la moneta si siano ottenute 10 teste. Calcolare la probabilità di ottenere testa anche all'11-esimo lancio.

a) Per la formula delle probabilità totali,

$$P(T_1) = P(T_1|Equa)P(Equa) + P(T_1|Equa^c)P(Equa^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 0.7$$

b) I lanci non sono indipendenti, perché tutti legati dalla scelta iniziale della moneta. (Il simbolo di $\cap$ è omesso per brevità di notazione.)

$$P(T_{11}|T_1 T_2 \ldots T_{10}) = \frac{P(T_1 T_2 \ldots T_{10} T_{11})}{P(T_1 T_2 \ldots T_{10})}$$

Esercizio 13

Abbiamo 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Le monete sono indistinguibili; se ne sceglie a caso una e la si lancia.

a) Calcolare la probabilità di ottenere testa.

b) Supponiamo che dopo aver lanciato 10 volte la moneta si siano ottenute 10 teste. Calcolare la probabilità di ottenere testa anche all'11-esimo lancio.

a) Per la formula delle probabilità totali,

$$P(T_1) = P(T_1|Equa)P(Equa) + P(T_1|Equa^c)P(Equa^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{2}{5} = 0.7$$

b) I lanci non sono indipendenti, perché tutti legati dalla scelta iniziale della moneta. (Il simbolo di $\cap$ è omesso per brevità di notazione.)

$$P(T_{11}|T_1T_2\dots T_{10}) = \frac{P(T_1T_2\dots T_{10}T_{11})}{P(T_1T_2\dots T_{10})} = \frac{(\frac{1}{2})^{11}\cdot\frac{3}{5} + 1^{11}\cdot\frac{2}{5}}{(\frac{1}{2})^{10}\cdot\frac{3}{5} + 1^{10}\cdot\frac{2}{5}} = 0.9993$$

Indipendenza condizionata

Due eventi A e B si dicono indipendenti condizionatamente a un terzo evento C se

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Indipendenza condizionata

Due eventi A e B si dicono indipendenti condizionatamente a un terzo evento C se

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Nell'esempio delle monete,

$P(T_1 \cap T_2|Equa) = P(T_1|Equa)P(T_2|Equa) = \frac{1}{4}$,

dunque T_1 e T_2 non sono indipendenti, ma lo sono condizionatamente alla scelta della moneta!

Indipendenza condizionata

Due eventi A e B si dicono indipendenti condizionatamente a un terzo evento C se

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Nell'esempio delle monete,

$P(T_1 \cap T_2|Equa) = P(T_1|Equa)P(T_2|Equa) = \dfrac{1}{4}$,

dunque T_1 e T_2 non sono indipendenti, ma lo sono condizionatamente alla scelta della moneta!

L'indipendenza condizionata non implica l'indipendenza!

Cosa possiamo dire dell'implicazione inversa?

Esercizio 14

Si lancia due volte un dado equo. Sia A l'evento: "il punteggio dei due lanci è lo stesso", B l'evento: "il punteggio del primo dado è 3", C l'evento "il punteggio del secondo dado è pari." Sappiamo già che A e B sono indipendenti. Mostrare A e B sono indipendenti ma che non lo sono condizionatamente a C.

Esercizio 14

Si lancia due volte un dado equo. Sia A l'evento: "il punteggio dei due lanci è lo stesso", B l'evento: "il punteggio del primo dado è 3", C l'evento "il punteggio del secondo dado è pari." Sappiamo già che A e B sono indipendenti. Mostrare A e B sono indipendenti ma che non lo sono condizionatamente a C.

L'indipendenza non implica l'indipendenza condizionata!

Esercizio 15

Un tribunale deve decidere in merito a un evento E, che si ritiene abbia probabilità di accadere $p = 10^{-3}$.

Il processo ha due testimone chiave, A e B. Ciascuno dei due, si suppone, dice la verità nel 90% dei casi, e comunque indipendentemente dall'altro.

Qual è la probabilità che E si sia verificato se entrambi i testimoni hanno affermato che si è verificato?

Esercizio 15

Un tribunale deve decidere in merito a un evento E, che si ritiene abbia probabilità di accadere $p = 10^{-3}$.

Il processo ha due testimone chiave, A e B. Ciascuno dei due, si suppone, dice la verità nel 90% dei casi, e comunque indipendentemente dall'altro.

Qual è la probabilità che E si sia verificato se entrambi i testimoni hanno affermato che si è verificato?

Suggerimento: il testo fornisce $P(E), P(A|E), P(B|E)$, dove A è l'evento "il testimone A dichiara che l'evento E si è verificato", e analogamente per B. Si richiede $P(E|A \cap B)$.

Esercizi - 16

Consideriamo i seguenti tre problemi, e andiamo a discuterne le caratteristiche comuni.

Esercizi - 16

Consideriamo i seguenti tre problemi, e andiamo a discuterne le caratteristiche comuni.

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

Esercizi - 16

Consideriamo i seguenti tre problemi, e andiamo a discuterne le caratteristiche comuni.

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo. Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito (tutti ammessi o tutti respinti)? Con che probabilità almeno 2 di loro ce la faranno?

Esercizi - 16

Consideriamo i seguenti tre problemi, e andiamo a discuterne le caratteristiche comuni.

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo. Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito (tutti ammessi o tutti respinti)? Con che probabilità almeno 2 di loro ce la faranno?

• Un sistema ingegneristico composto da n componenti si dice $k - su - n$ se funziona quando almeno k delle sue componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino in modo indipendente dalle altre, ognuna con probabilità p. Per $p = 2/3$ determinare l'affidabilità di un sistema $2 - su - 4$.

Prove di Bernoulli

In tutti gli esempi precedenti possiamo individuare

• un esperimento (prova) che può risolversi in due soli esiti possibili (successo$=1$/fallimento$=0$);

Nel primo degli esempi precedenti, l'esperimento è il lancio di una moneta, il successo, diciamo, è testa, il fallimento è croce.

Prove di Bernoulli

In tutti gli esempi precedenti possiamo individuare

• un esperimento (prova) che può risolversi in due soli esiti possibili (successo$=1$/fallimento$=0$);

Nel primo degli esempi precedenti, l'esperimento è il lancio di una moneta, il successo, diciamo, è testa, il fallimento è croce.

• sia p la probabilità del *successo* in ciascuna prova;

Nel primo degli esempi precedenti, $p = 1/2$.

Prove di Bernoulli

In tutti gli esempi precedenti possiamo individuare

• un esperimento (prova) che può risolversi in due soli esiti possibili (successo$=1$/fallimento$=0$);

Nel primo degli esempi precedenti, l'esperimento è il lancio di una moneta, il successo, diciamo, è testa, il fallimento è croce.

• sia p la probabilità del *successo* in ciascuna prova;

Nel primo degli esempi precedenti, $p = 1/2$.

• consideriamo n ripetizioni *identiche e indipendenti* della prova.

Nel primo degli esempi precedenti, $n = 10$.

Prove di Bernoulli

In tutti gli esempi precedenti possiamo individuare

• un esperimento (prova) che può risolversi in due soli esiti possibili (successo$= 1/$fallimento$= 0$);

Nel primo degli esempi precedenti, l'esperimento è il lancio di una moneta, il successo, diciamo, è testa, il fallimento è croce.

• sia p la probabilità del *successo* in ciascuna prova;

Nel primo degli esempi precedenti, $p = 1/2$.

• consideriamo n ripetizioni *identiche e indipendenti* della prova.

Nel primo degli esempi precedenti, $n = 10$.

Prove di Bernoulli

Allora lo spazio campionario può essere descritto come

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n),\ \text{con } a_i = 0 \text{ oppure } 1,\ \text{per ogni } i\}$$

Per esempio nel primo dei problemi precedenti, lo spazio campionario è costituito da oggetti del tipo $(1,1,1,0,0,1,0,1,0,1) = TTTCCTCTCT$ *oppure* $(1,1,1,0,0,0,1,1,1,0) = TTTCCCTTTC$.

Prove di Bernoulli

Allora lo spazio campionario può essere descritto come

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n),\ \text{con } a_i = 0 \text{ oppure } 1,\ \text{per ogni } i\}$$

Per esempio nel primo dei problemi precedenti, lo spazio campionario è costituito da oggetti del tipo $(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) = TTTCCTCTCT$ *oppure* $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) = TTTCCCTTTC$.

Per ogni elemento $\omega \in \Omega$, dato che le prove sono indipendenti, avremo $P(\{\omega\}) = p^{\#\text{successi}}(1-p)^{\#\text{fallimenti}} = p^{\#\text{successi}}(1-p)^{n-\#\text{successi}}$

Nel primo dei problemi precedenti, abbiamo ad esempio $P(1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) = P(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) = (1/2)^6 \cdot (1/2)^4$

Ora, qual è la probabilità che k delle n prove si risolvano in un successo (evento $A_{k,n}$)?

Prove di Bernoulli

Ora, qual è la probabilità che k delle n prove si risolvano in un successo (evento $A_{k,n}$)?

• Tutti gli elementi ω dello spazio campionario che soddisfano $A_{k,n}$ hanno probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$;

• Quanti sono gli elementi di $A_{k,n}$?

Prove di Bernoulli

Ora, qual è la probabilità che k delle n prove si risolvano in un successo (evento $A_{k,n}$)?

• Tutti gli elementi ω dello spazio campionario che soddisfano $A_{k,n}$ hanno probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$;

• Quanti sono gli elementi di $A_{k,n}$? Sono $\binom{n}{k}$ = numero di modi in cui k successi possono collocarsi in una sequenza di n prove.

Prove di Bernoulli

Ora, qual è la probabilità che k delle n prove si risolvano in un successo (evento $A_{k,n}$)?

• Tutti gli elementi ω dello spazio campionario che soddisfano $A_{k,n}$ hanno probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$;

• Quanti sono gli elementi di $A_{k,n}$? Sono $\binom{n}{k}$ = numero di modi in cui k successi possono collocarsi in una sequenza di n prove.

Dunque $P(A_{k,n}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$

Nel primo dei problemi precedenti, abbiamo ad esempio
$P(A_{6,10}) = P(\textit{6 teste in 10 lanci}) = \binom{10}{6}(1/2)^6 \cdot (1/2)^4 = \binom{10}{6}(1/2)^{10}$

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo.

Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito?

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}(\frac{1}{2})^8(\frac{1}{2})^2 = \binom{10}{8}(\frac{1}{2})^{10}$

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo.

Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito?

$n = 5$; $p = 0,8$;

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo.

Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito?

$n = 5$; $p = 0,8$;

$$P(A_{0,5}) + P(A_{5,5}) = (0,2)^5 + (0,8)^5 = 0.328$$

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo.

Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito?

$n = 5$; $p = 0,8$;

$$P(A_{0,5}) + P(A_{5,5}) = (0,2)^5 + (0,8)^5 = 0.328$$

Con che probabilità almeno 2 di loro ce la faranno?

Soluzioni Esercizi 16

• Una moneta è tale che la probabilità che esca testa è $1/2$. La si lancia 10 volte. Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 8 volte?

$$P(A_{8,10}) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

• Andrea e altri suoi 4 amici desiderano iscriversi a medicina. Sono ragazzi onesti, dunque possiamo supporre che non si aiuteranno l'uno con l'altro durante il test; inoltre sono diligenti, e per ciascuno si stima pari all'80% la probabilità del successo.

Con che probabilità otterranno tutti e 5 lo stesso esito?

$n = 5$; $p = 0,8$;

$$P(A_{0,5}) + P(A_{5,5}) = (0,2)^5 + (0,8)^5 = 0.328$$

Con che probabilità almeno 2 di loro ce la faranno?

$$1 - P(A_{1,5}) - P(A_{0,5}) = 1 - 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2^4 - 0.2^5 = 0.9933$$

Soluzioni Esercizi 16

• Un sistema ingegneristico composto da n componenti si dice $k - su - n$ se funziona quando almeno k delle sue componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino in modo indipendente dalle altre, ognuna con probabilità p. Per $p = 2/3$ determinare l'affidabilità di un sistema $2 - su - 4$.

Soluzioni Esercizi 16

• Un sistema ingegneristico composto da n componenti si dice $k - su - n$ se funziona quando almeno k delle sue componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino in modo indipendente dalle altre, ognuna con probabilità p. Per $p = 2/3$ determinare l'affidabilità di un sistema $2 - su - 4$.

$$P(A_{2,4}) + P(A_{3,4}) + P(A_{4,4}) = 0.8889$$

Soluzioni Esercizi 16

• Un sistema ingegneristico composto da n componenti si dice $k - su - n$ se funziona quando almeno k delle sue componenti funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino in modo indipendente dalle altre, ognuna con probabilità p. Per $p = 2/3$ determinare l'affidabilità di un sistema $2 - su - 4$.

$$P(A_{2,4}) + P(A_{3,4}) + P(A_{4,4}) = 0.8889$$

Sapendo che la prima componente funziona, qual è la probabilità che il sistema $2 - su - 4$ funzioni? [0.9630]

Quesito 4, Esame di Stato 2016

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui una sola è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 8 domande.

Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Dall'Esame di Stato

Quesito 8, Esame di Stato 2017

Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia.

Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.