ORIENTAMATICA a.a. 2017/18
9 marzo 2018

Matematica per l'esame: quesiti e problemi - 1

Maria Grazia Grandi

Integrale e non solo!

- Calcolo di aree e di volumi
- Distribuzione statistica di Gauss per il calcolo della probabilità
- Prove esperte e contestualizzazione in fisica

Quesiti

Maria Grazia Grandi

Calcolo delle aree

- L'integrale definito per il calcolo delle aree delle regioni di piano finite

- Area dell'ellisse

Volume di solidi di rotazione

- Volume di un solido di rotazione attorno all'asse delle ascisse
- Volume del toro
- Volume del tronco di cono (quesito NES 2017)

I Teoremi di Guldino

- Archimede (287 a.C.- 212 a.C.) determina i centri di gravità* delle figure piane e solide
- 19 secoli dopo un matematico svizzero PAUL GULDIN (1557-1643)

scrive nel 1640 un trattato «CENTROBARICA» in cui vi sono due teoremi per il calcolo delle aree e dei volumi collegati al centro di gravità*.

**Centro di gravità o baricentro è il punto in cui è applicata la forza-peso. Se si sospende la figura per quel punto (con una forza opposta alla forza-peso) si ha una condizione di equilibrio indifferente.*

I Teorema di Guldino

L'area della superficie generata dalla rotazione di una linea piana finita attorno a una retta complanare ad essa e che non la intersechi, è uguale al prodotto della lunghezza della linea per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro

Quesiti: calcolo delle superfici

- Superficie laterale del cono
- Superficie laterale del tronco di cono

- Baricentro della semicirconferenza

II Teorema di Guldino

Il volume del solido generato dalla rotazione di una figura piana finita attorno a una retta complanare ad essa e che non la intersechi, è uguale al prodotto dell'area della figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro

Quesiti

- Volume del toro
- Volume del tronco di cono

- Baricentro del semicerchio

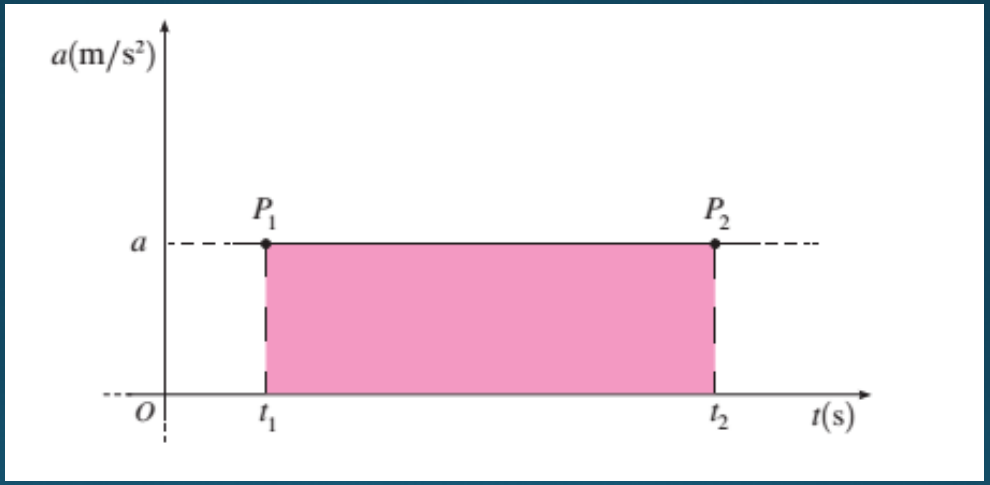
Contestualizzazione di quesiti e problemi: il calcolo delle aree in Fisica

Maria Grazia Grandi

Un caso semplice

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato, l'accelerazione è costante nel tempo e si ha:

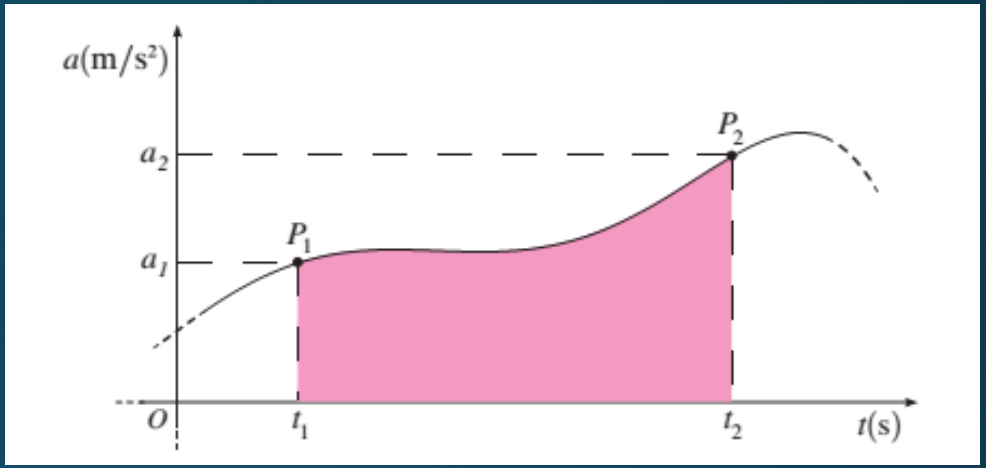
$$\Delta v = a\,\Delta t$$



La variazione della velocità è rappresentata dall'area del rettangolo colorato nel grafico tempo-accelerazione

Integrale definito

Come esempio di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, considero l'accelerazione non costante di un punto materiale su una traiettoria rettilinea in un intervallo di tempo.



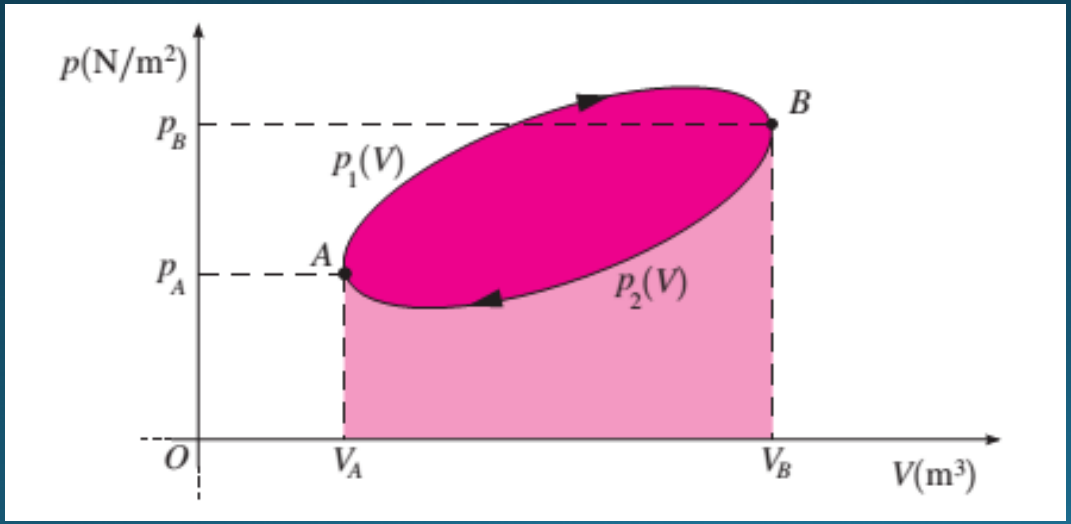
L'area sottesa dalla curva rappresenta la variazione di velocità tra i due istanti di tempo considerati

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$$

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

Applicazione:
lavoro di un ciclo termodinamico

Considero una trasformazione termodinamica ciclica
quasi-statica individuata dalle funzioni p1 e p2 che si intersecano in A e in B.
Calcolo il lavoro lungo la linea chiusa percorsa in verso antiorario
(dallo stato termodinamico A e ritorno allo stato A)



Derivate e integrali: infinite applicazioni!

Valori medi	Derivata prima	Integrale definito
$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \frac{ds}{dt}$	$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$a = \frac{dv}{dt}$	$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$
$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$F = \frac{dp}{dt}$	$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$
$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$	$P = \frac{dE}{dt}$	$W = \Delta E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$
$\bar{i} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	$i = \frac{dq}{dt}$	$\Delta q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$

Calcolo di aree in Statistica

Maria Grazia Grandi

Distribuzione di probabilità con variabile aleatoria continua

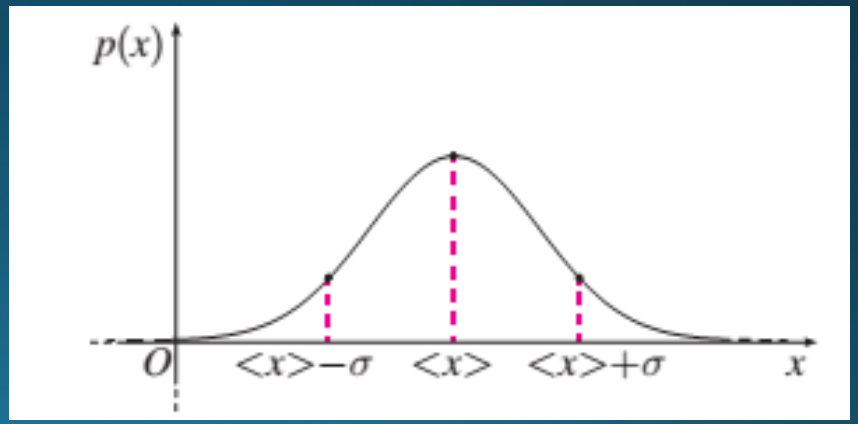
Dato un evento, E, governato dalla legge del caso, ripetendo l'esperimento «numerose» volte, da un istogramma di frequenze si ottiene una curva continua a campana, *curva di Gauss**, con densità di probabilità p(x)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-<X>)^2}{2\,\sigma^2}}$$

in funzione della varianza e

dello scarto quadratico medio.

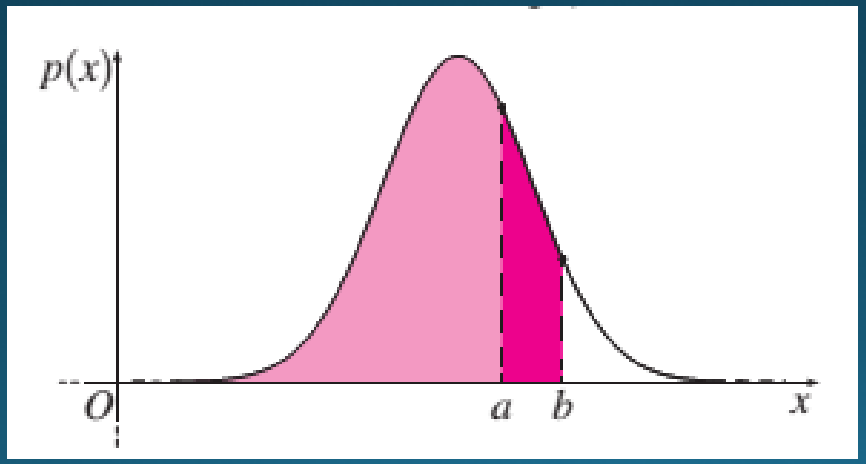
***Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855)**



Probabilità: differenza di aree

La probabilità che la variabile aleatoria X assuma valori nell'intervallo $[a, b]$ si calcola con l'integrale definito

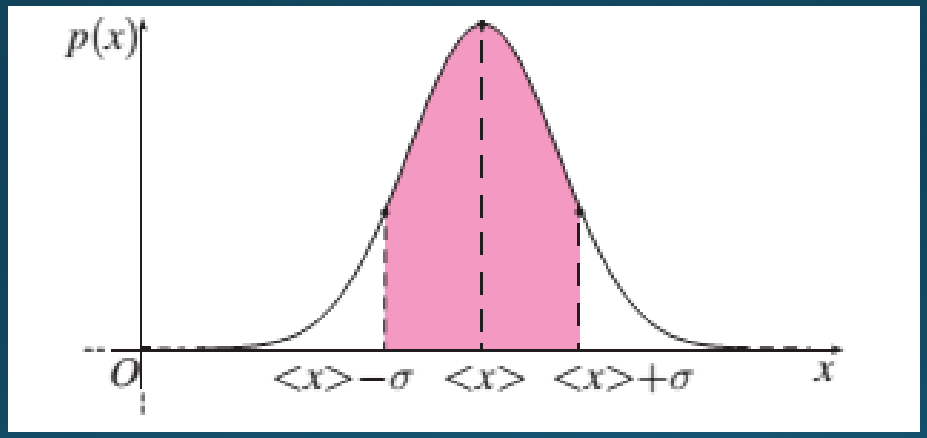
$$p\,(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)dx = F(b) - F(a)$$



Probabilità note

La probabilità di alcuni intervalli è collegata allo scarto quadratico medio

$$p\left((< X > - \sigma) < x \leq (< X > + \sigma)\right) = 68{,}3\%$$



$$p\left((< X > - 2\sigma) < x \leq (< X > + 2\,\sigma)\right) = 95{,}4\%$$

$$p\left((< X > - \ 3\sigma) < x \ \leq \ (< X > + \ 3\sigma)\right) = 99{,}7\%$$

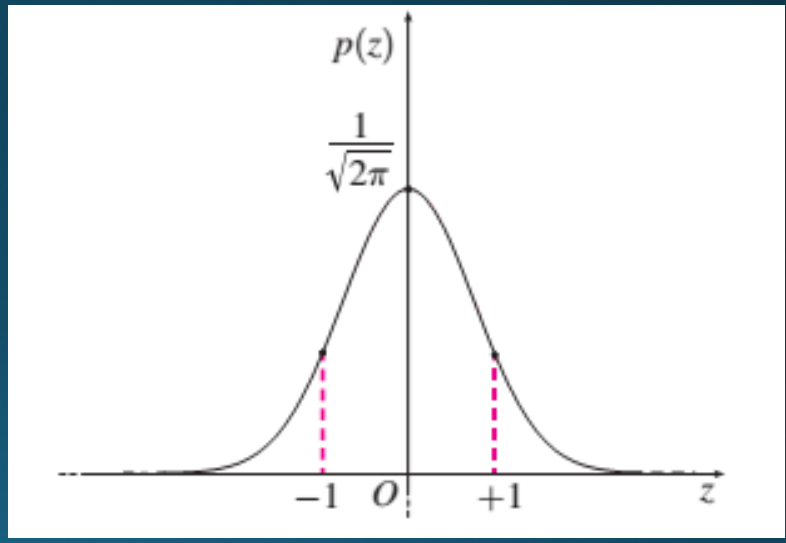
Gaussiana standard

Una variabile aleatoria, X, una volta standardizzata, ha una *distribuzione normale*

Ponendo

$$z = \frac{x - < X >}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \; < z > = 0 \;\; \wedge \;\; \sigma^2 = 1$$



Ascissa dei flessi: $\sigma = \pm 1$

Distribuzione normale

Densità di probabilità

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

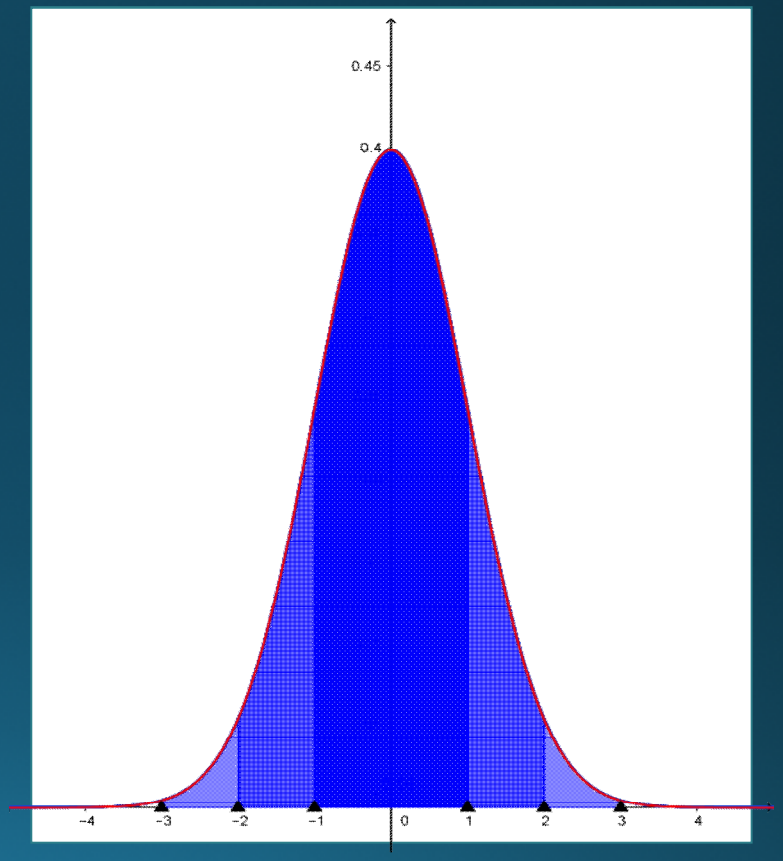
Condizione di normalizzazione

L'area sottesa dalla curva di Gauss è la probabilità totale uguale a uno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 1$$

Il massimo della distribuzione di probabilità si ha per z=o

$$p(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



Distribuzione normale standard

La probabilità che la variabile normale standardizzata assuma valori tra 0 e z è la funzione integrale

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

è *una funzione pari*

$\Phi(-z) = -\Phi(z)$

TAVOLE DI SHEPPARD: valori tabulati della probabilità

Problemi

Maria Grazia Grandi

Un problema di statistica

L'altezza di un campione di studenti del primo anno di liceo è distribuita normalmente con una media di 1,55 m e deviazione standard di 0,15 m.

Viene scelto a caso uno studente.

Calcolare la probabilità che la sua altezza:

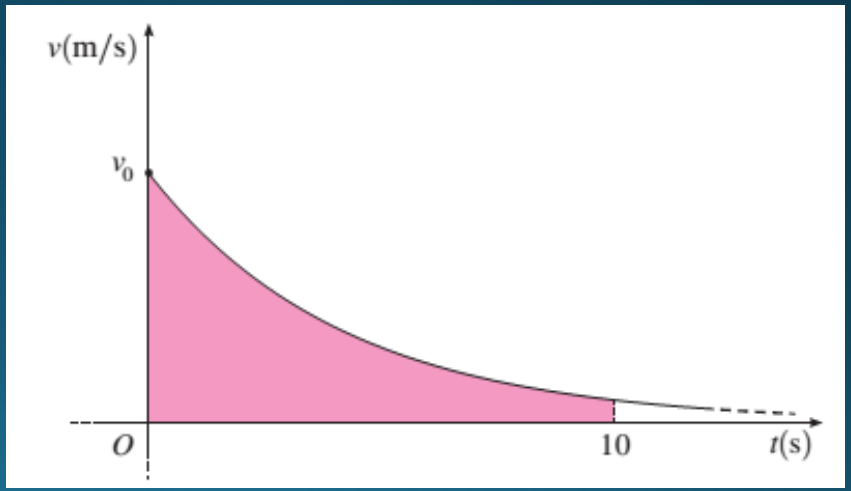
a. sia compresa tra 1,24 m e 1,60 m

b. superi 1,87 m

In autostrada

Ti trovi alla guida di un'automobile di grossa cilindrata su un'autostrada rettilinea alla velocità costante di 130 Km h^{-1}. Stai scrutando la strada semideserta quando ti accorgi che un camion davanti a te ha perso degli scatoloni che ora si trovano in mezzo all'autostrada. Mentre stai pensando a cosa fare non hai ancora rallentato e pensi che gli ostacoli siano a circa 50 m nell'istante in cui finalmente decidi di frenare.

Il tachimetro è dotato di uno schermo digitale dove puoi vedere il grafico della tua velocità istantanea in funzione del tempo, come il seguente:



In autostrada

La tua auto ha una massa di 1438 Kg ed è tra le migliori automobili classificate anche per la capacità di frenare in pochi secondi.

All'istante t=0s in cui hai iniziato a frenare la velocità inizia a decrescere con una curva esponenziale:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

dove il coefficiente fornito dal costruttore $\gamma = 1{,}21\ 10^3\ Kg\ s^{-1}$.

- Lo strumento a bordo ha calcolato quanti metri dovrai percorrere in tutto. Controlla il risultato e stabilisci se arriverai ad urtare gli scatoloni.
- Quanto tempo passa prima che la tua velocità scenda a 1 m/s?
- Quanto vale la forza frenante opposta alla velocità in questo istante t'?

I problemi proposti sono pubblicati nel testo a lato con una prefazione dedicata ai metodi matematici:

Prepararsi alla seconda prova scritta di fisica e matematica del Liceo scientifico

Maria Grazia Grandi

Ed. ETAS Rizzoli, 2015