CORSO "ORIENTAMATICA" 2017/2018

Uno sguardo sulla Matematica e la Fisica del Novecento

Università Bocconi

12 gennaio 2018

LE FUNZIONI SONO ANCORA PIÙ SEMPLICI!

Jacopo De Tullio

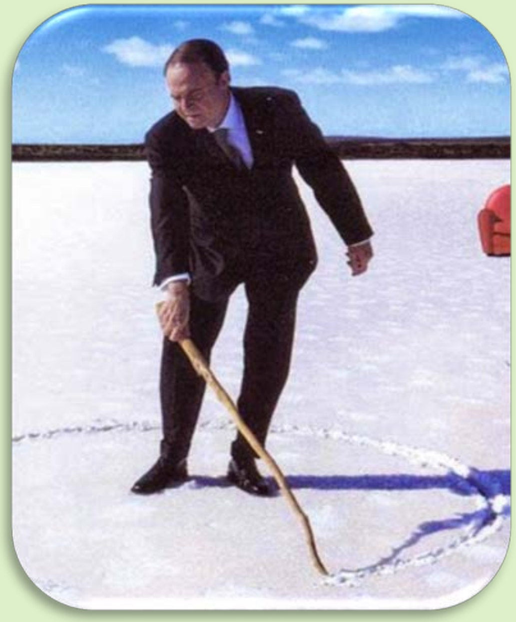
Spesso è interessante capire come si comporta una funzione "nei paraggi" di un certo punto che appartiene al dominio della funzione.

Cioè, considerata $f: D \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, sia $x_0 \in D$ ci interessa conoscere il comportamento di f per valori molto vicini a x_0.

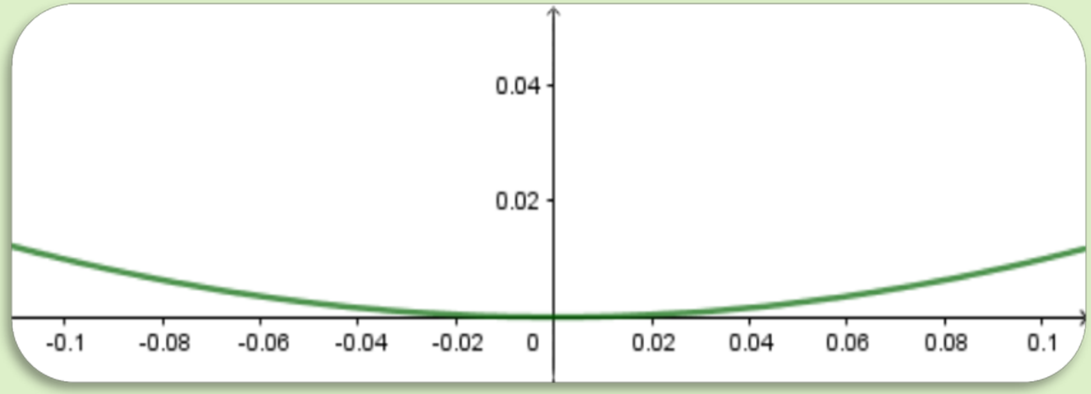
Valori molto vicini a x_0? Cosa vuol dire?!?!

Sappiamo che x_0 è un numero e i suoi valori molto vicini sono $x_0 + k$ e $x_0 - k$ dove k è un valore positivo molto piccolo. Cioè una volta fissato x_0 andiamo a vedere cosa succede poco (anzi pochissimo) dopo la sua destra e pochissimo dopo la sua sinistra.

In Matematica questo studio si dice "studio locale della funzione in un intorno di x_0".

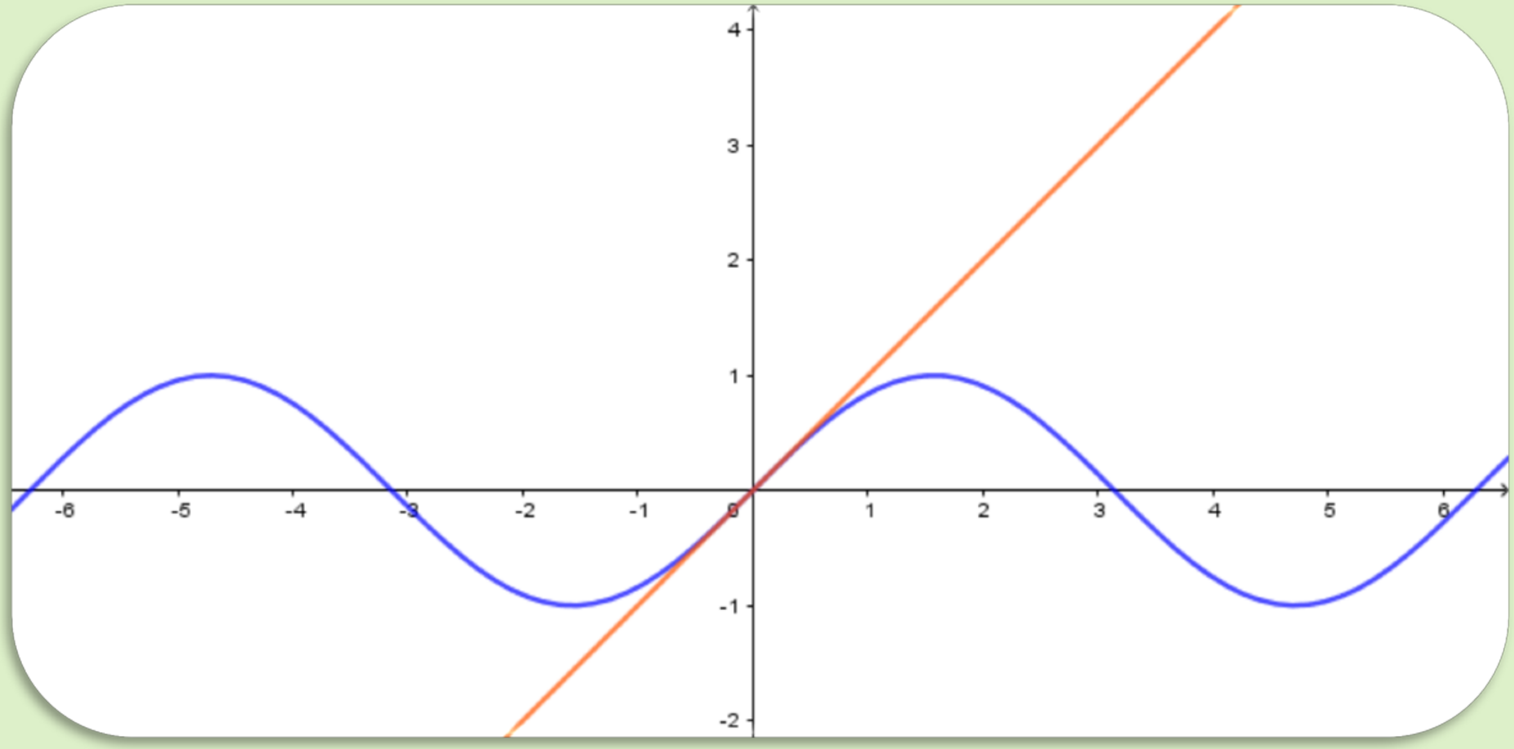


Ad esempio, data la funzione $f(x) = x^2$ e scelto $x_0 = 0$, andare a studiare il comportamento "nei paraggi" di $x_0 = 0$ significa chiedersi come si comporta f per valori quali $0.001, 0.01, 0.1, -0.001, -0.01, -0.1 \ldots$

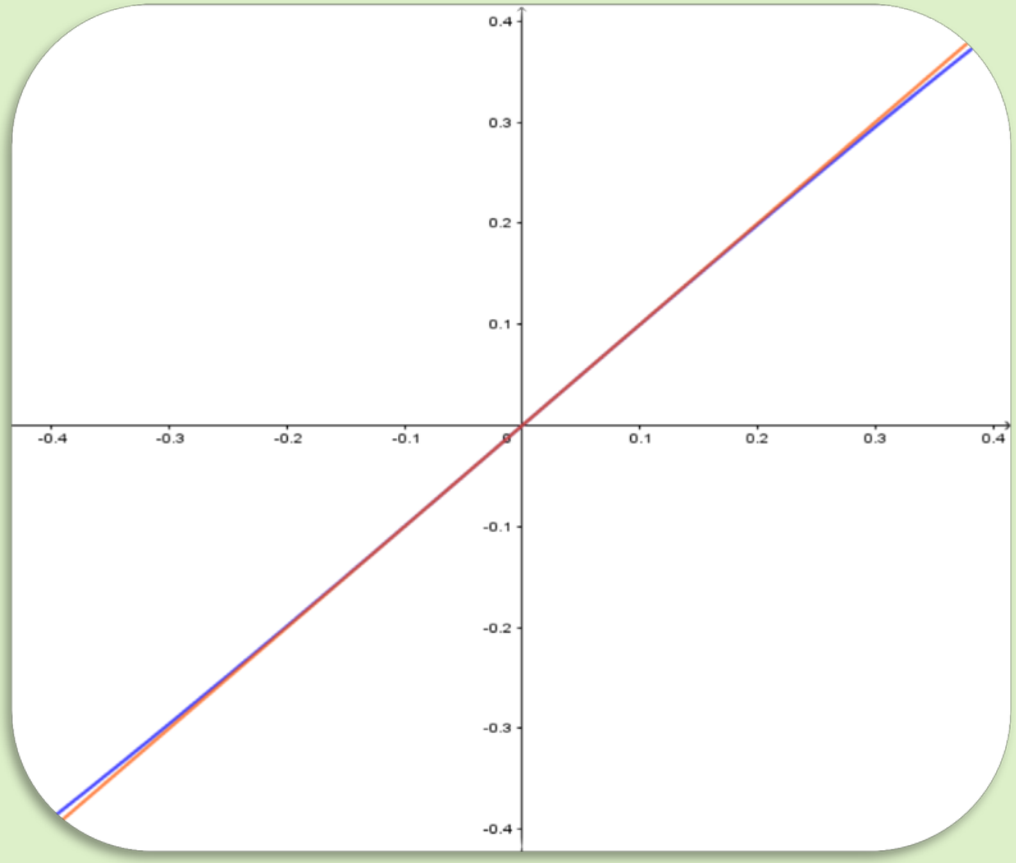


È facile osservare che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ la funzione assume valori positivi prossimi allo zero.

Consideriamo le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \sin x$:



Le due funzioni hanno globalmente un comportamento differente, ma se andiamo a vedere cosa succede "nei paraggi" di $x_0 = 0$…

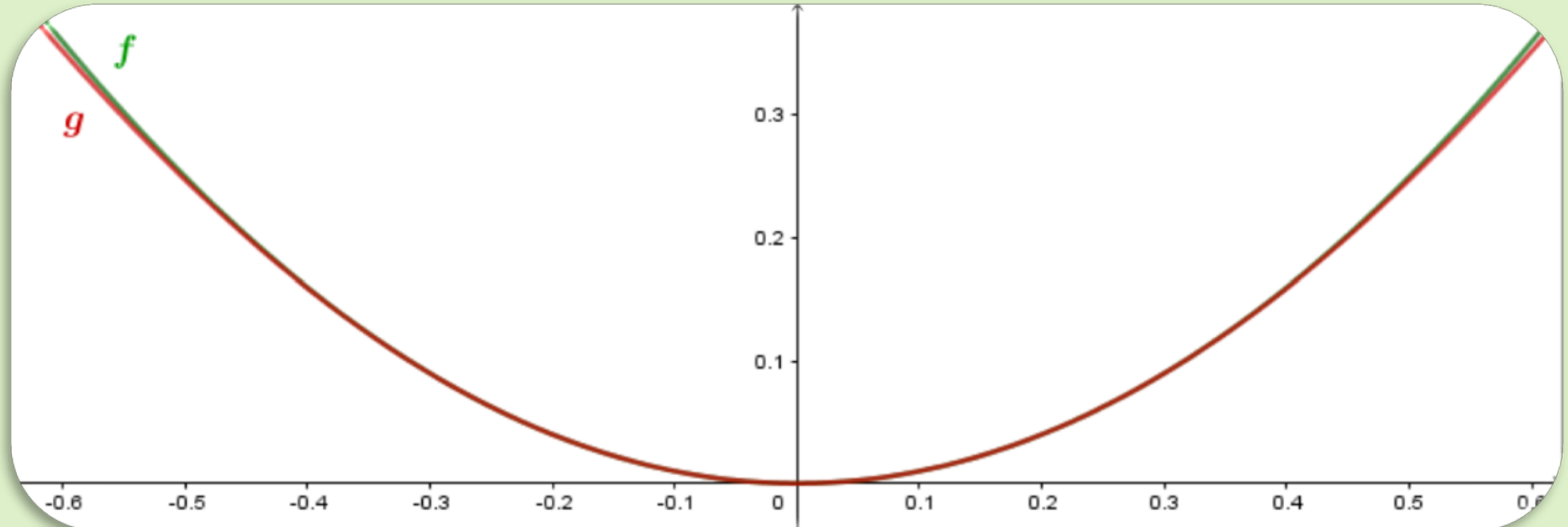


Le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \sin x$ hanno lo stesso comportamento! Si sovrappongono!

Possiamo quindi affermare che:

"nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0 = 0}$ si ha che $\boldsymbol{\sin x = x}$

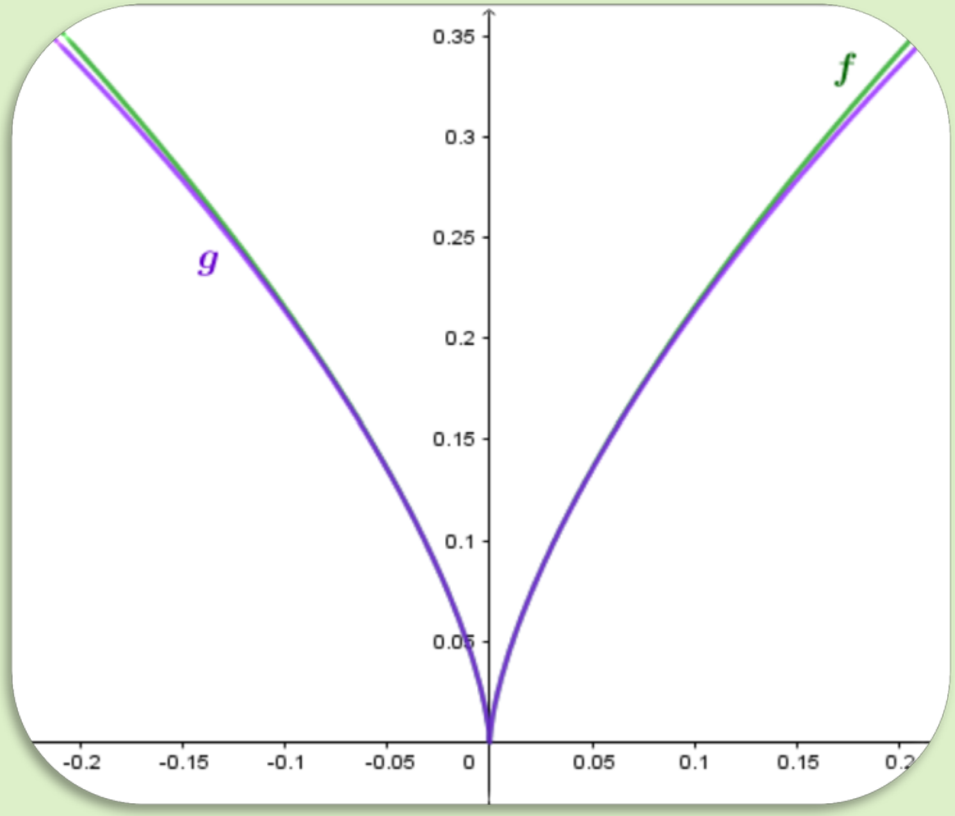
Proviamo adeso con le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x^2$:



Di nuovo si sovrappongono! Dunque affermiamo che:

"nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0 = 0}$ si ha che $\boldsymbol{\sin x^2 = x^2}$

E se considerassimo le funzioni $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ e $g(x) = \sin x^{\frac{2}{3}}$ "nei paraggi" di $x_0 = 0$:

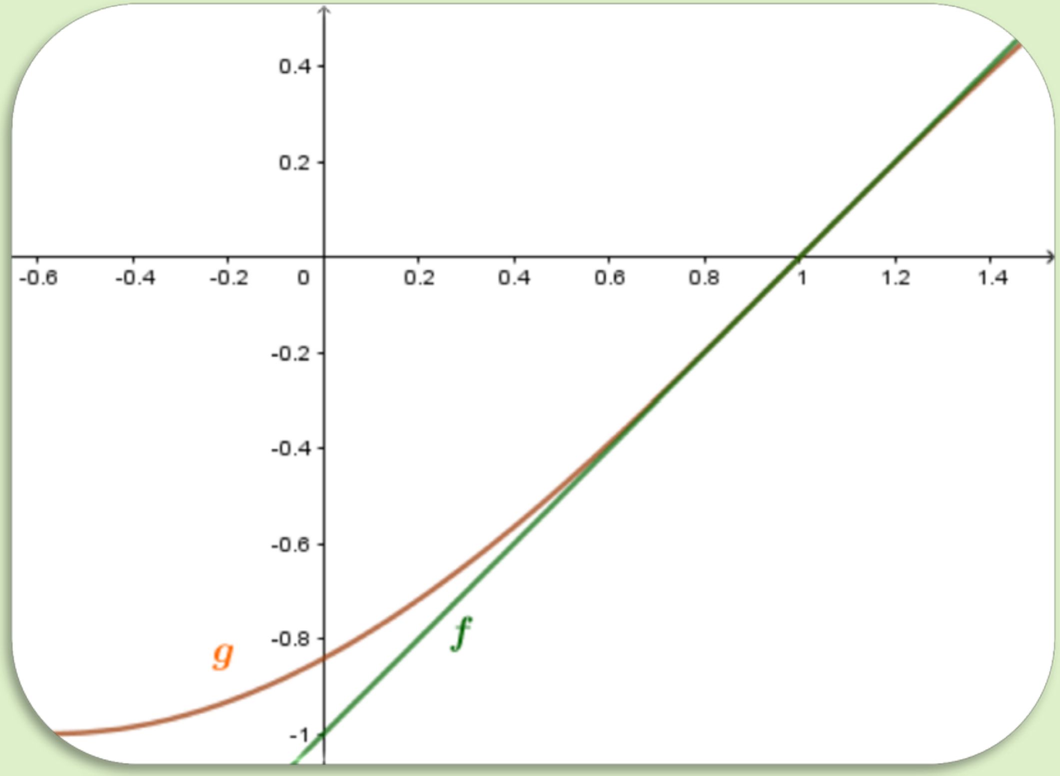


Possiamo nuovamente affermare che:

"nei paraggi" di $x_0 = 0$ si ha che $\sin x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

Allora possiamo affermare che, date $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \sin(x-1)$, "nei paraggi" di $x_0 = 0$ si ha che $\sin(x-1) = x - 1$?

NO!



Però ci accorgiamo che le due funzioni si comportano nello stesso modo "nei paraggi" di $x_0 = 1$ (in effetti abbiamo traslato orizzontalmente le funzioni x e $\sin x$).

Possiamo quindi affermare che:

"nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0 = 1}$ si ha che $\boldsymbol{\sin(x-1) = x-1}$

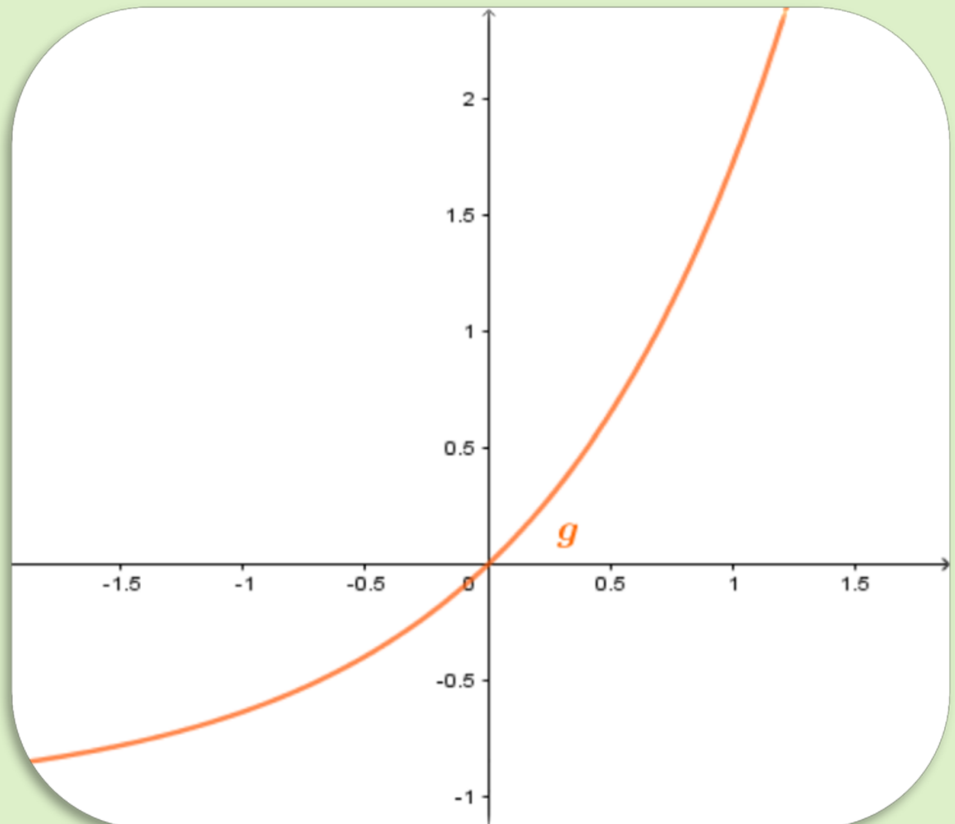
(cioè "nei paraggi" di un punto in cui la funzione assume valori prossimi allo zero)

In generale, abbiamo capito che:

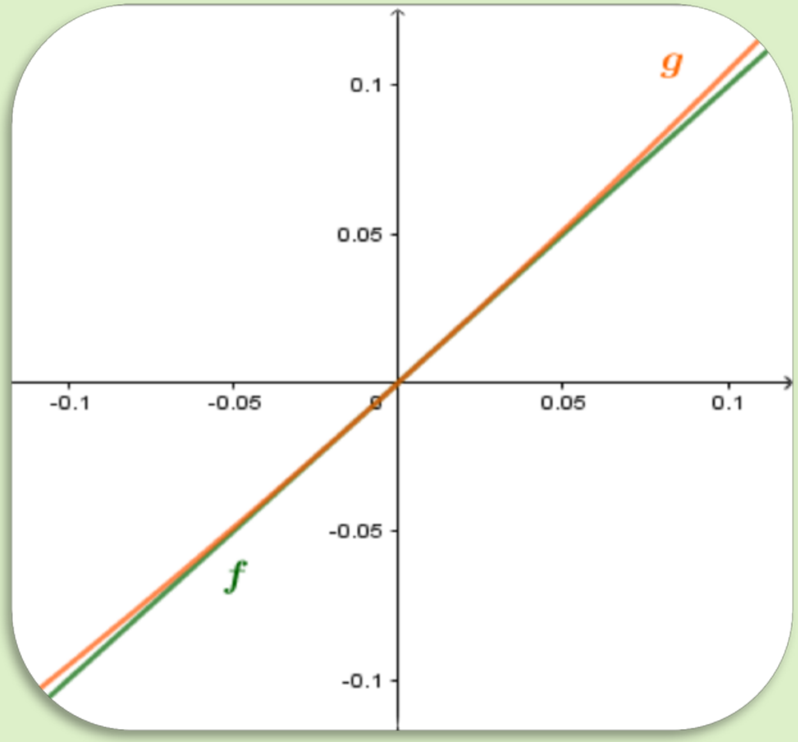
$\boldsymbol{\sin h(x) \ = h(x)}$ "nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0}$, dove $\boldsymbol{x_0}$ è un punto per cui $\boldsymbol{h(x)}$ assume valori prossimi allo zero

Analogamente possiamo ripetere lo stesso identico procedimento per la funzione (quasi elementare) $g(x) = e^x - 1$.

Sappiamo che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ la funzione assume valori prossimi allo zero.



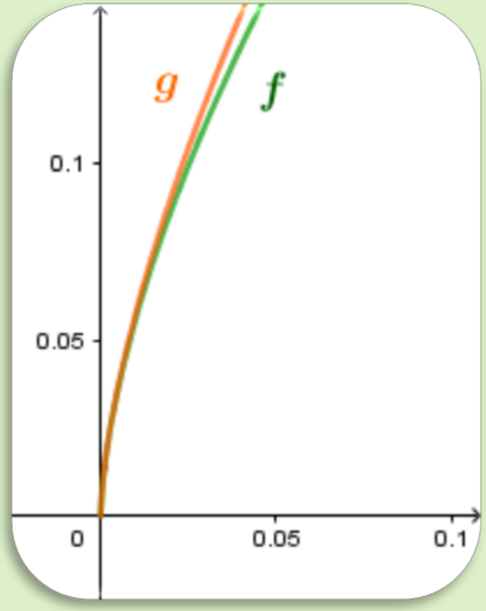
Confrontiamo la funzione $g(x) = e^x - 1$, "nei paraggi" di $x_0 = 0$, con la funzione $f(x) = x$.



Osserviamo che si sovrappongono, cioè hanno lo stesso comportamento! Possiamo quindi affermare che:

"nei paraggi" di $x_0 = 0$ si ha che $e^x - 1 = x$

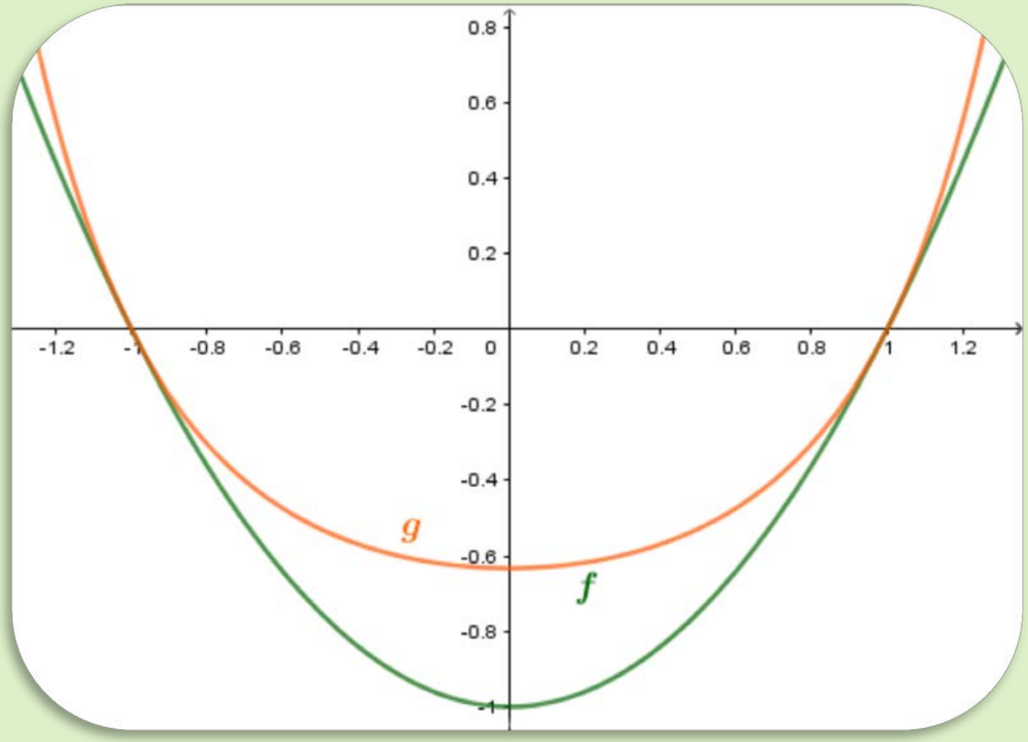
Se consideriamo le funzioni $f(x) = x^{\frac{5}{8}}$ e $g(x) = e^{x^{\frac{5}{8}}} - 1$ "nei paraggi" di $x_0 = 0$:



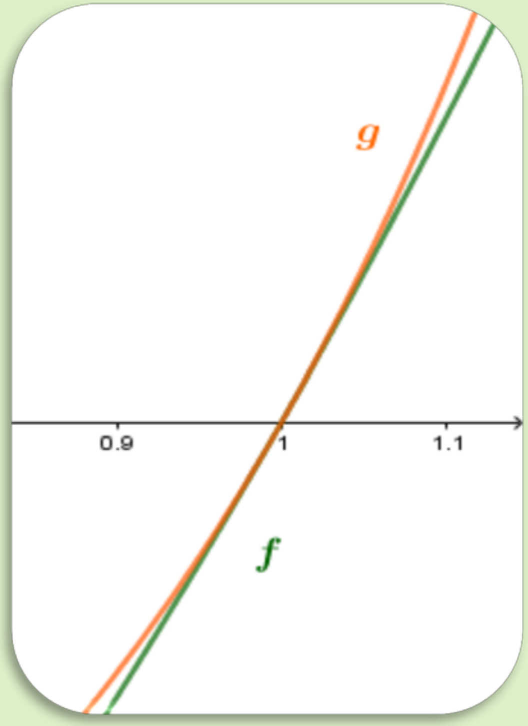
possiamo nuovamente affermare che:

"nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0 = 0}$ si ha che $\boldsymbol{e^{x^{\frac{5}{8}}} - 1 = x^{\frac{5}{8}}}$

Se invece consideriamo le funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = e^{x^2-1} - 1$, per quanto visto prima, ci aspettiamo che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ non abbiano lo stesso comportamento, ma che si sovrappongano "nei paraggi" di $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$ (laddove le due funzioni assumono valori prossimi allo zero):



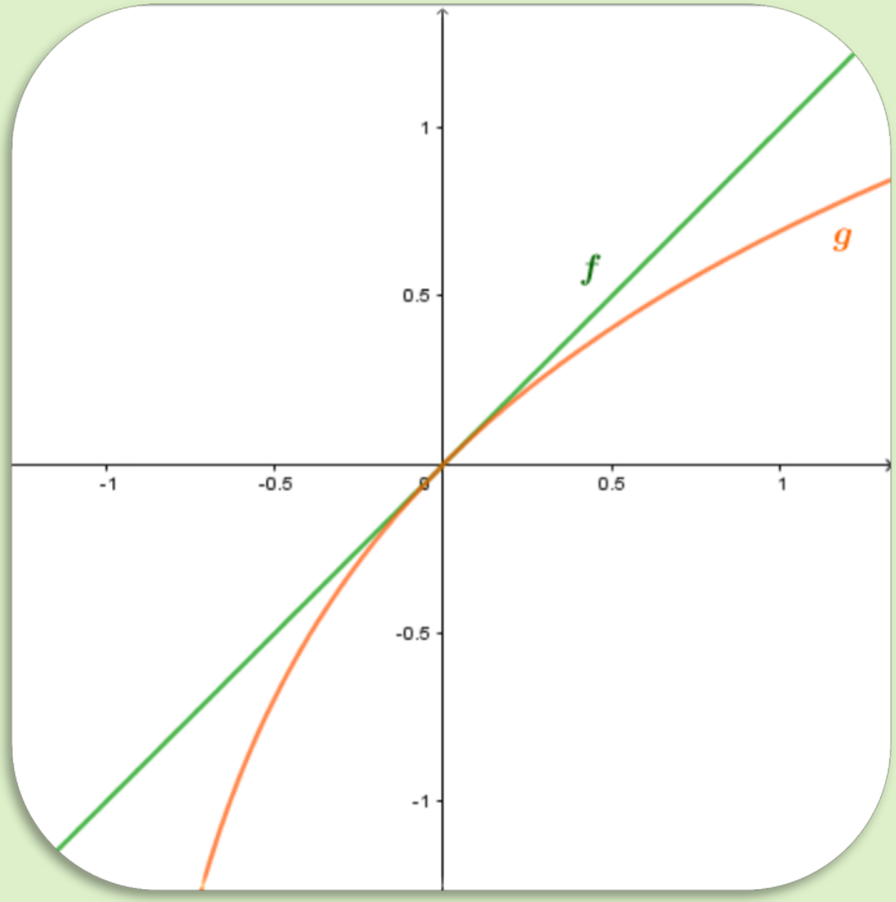
Ad esempio, "nei paraggi" di $x_0 = 1$:



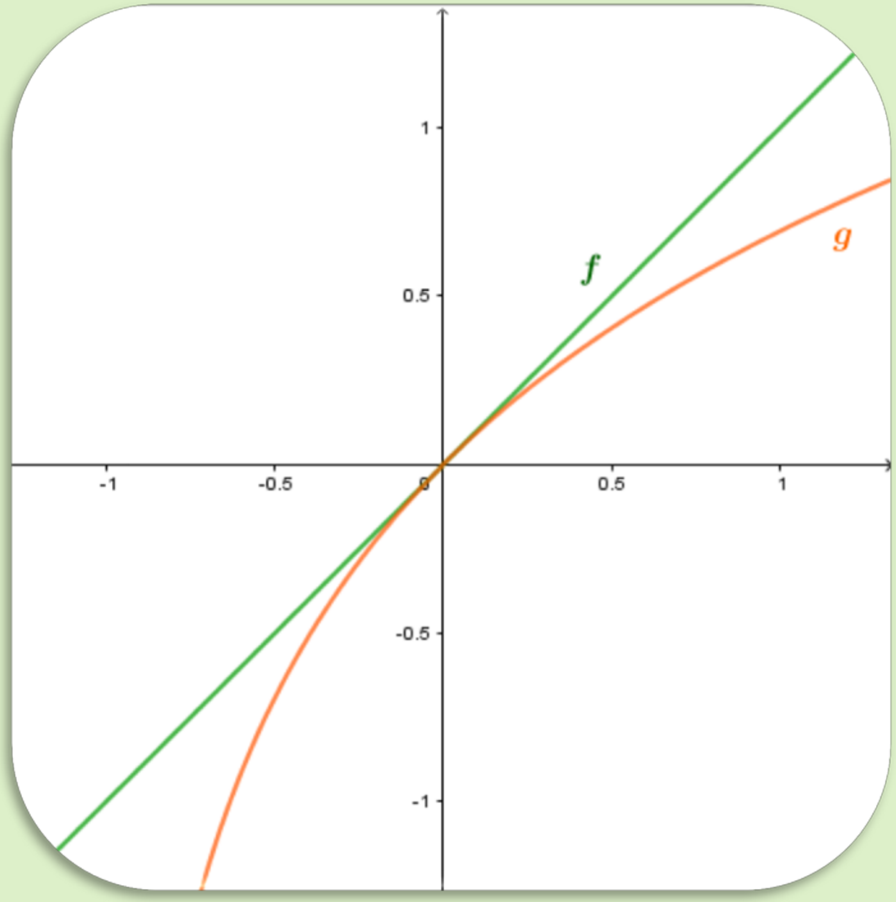
In generale, abbiamo capito che:

$e^{h(x)} - 1 = h(x)$ "nei paraggi" di x_0, dove x_0 è un punto per cui $h(x)$ assume valori prossimi allo zero

Consideriamo (cercando di ripetere il ragionamento fatto) la funzione quasi elementare $g(x) = \ln(1 + x)$, che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ assume valori prossimi allo zero, e confrontiamola con $f(x) = x$:

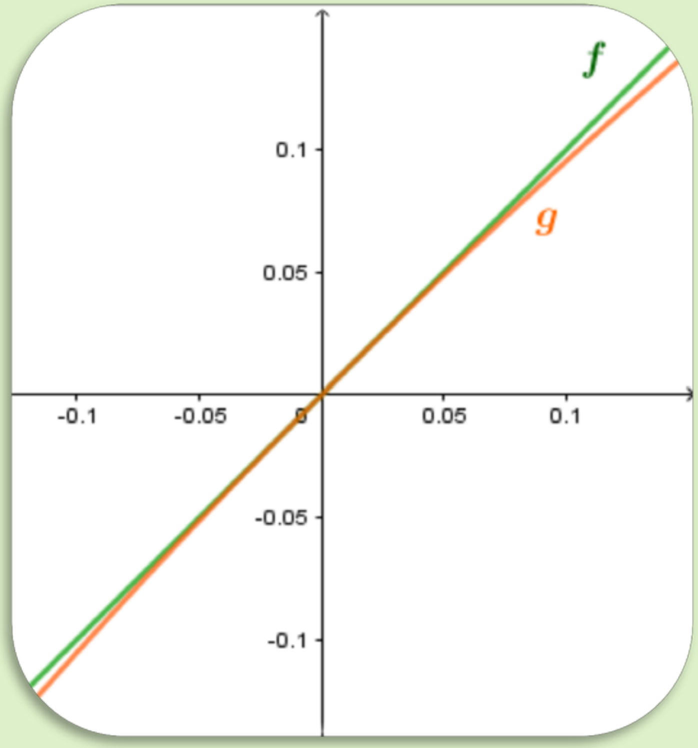


Consideriamo (cercando di ripetere il ragionamento fatto) la funzione quasi elementare $g(x) = \ln(1+x)$, che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ assume valori prossimi allo zero, e confrontiamola con $f(x) = x$:



Osserviamo che "nei paraggi" di $x_0 = 0$ le due funzioni si sovrappongono, cioè hanno lo stesso comportamento! Affermiamo che:

"nei paraggi" di $\boldsymbol{x_0 = 0}$ si ha che $\boldsymbol{\ln(1+x) = x}$



Dunque, in virtù dell'esperienza acquisita, siamo in grado di affermare, in forma generale, che:

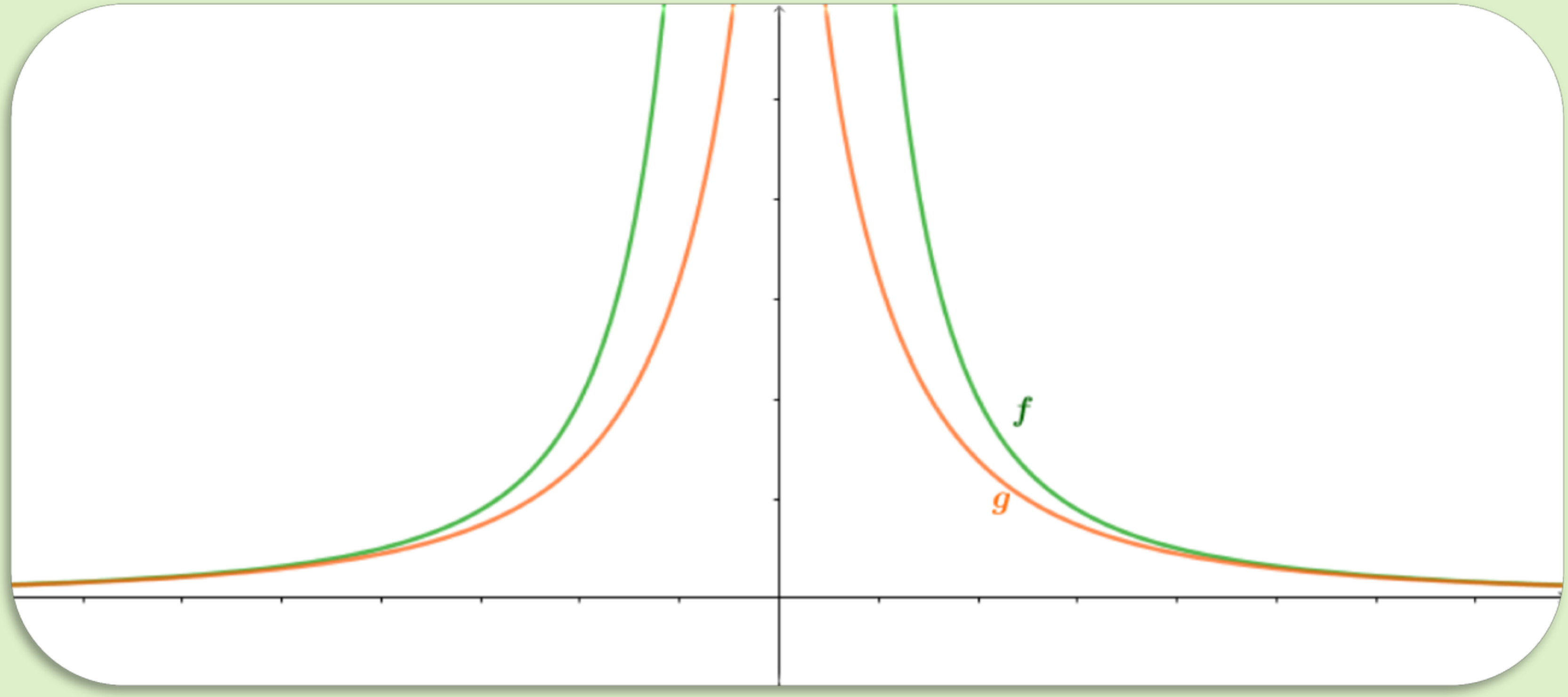
$\ln(1 + h(x)) = h(x)$ "nei paraggi" di x_0, dove x_0 è un punto per cui $h(x)$ assume valori prossimi allo zero

Mettiamoci subito alla prova considerando le funzioni $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Nei "paraggi" di quale punto le due funzioni date avranno lo stesso comportamento?

La "regola" afferma che $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$ per quei valori di x tali che $\frac{1}{x^2}$ assume valori prossimi allo zero.

Gli unici valori ammissibili sono dunque valori di x in modulo "molto grandi" (ad esempio 100, -100, 1000, $-\ 1000$, …).



Quando si parla di tutti quei valori di x "molto grandi" significa che siamo "nei paraggi" di infinito (∞).

In particolare se consideriamo valori di x "molto grandi" positivi siamo "nei paraggi di $+\infty$", se consideriamo valori di x "molto grandi" negativi siamo "nei paraggi di $-\infty$".

Dunque, nel caso appena visto, affermiamo che:

"nei paraggi" di $+\infty$ e $-\infty$ si ha che $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$

Fissiamo le idee

- Nei "paraggi" di quale punto si realizza l'uguaglianza $\sin(e^x) = e^x$? **L'uguaglianza si realizza laddove $\boldsymbol{h(x) = e^x}$ assume valori prossimi allo zero, cioè "nei paraggi di $-\infty$".**

- Nei "paraggi" di quale punto si realizza l'uguaglianza $\ln(1 + x^2 - 3x) = x^2 - 3x$? **L'uguaglianza si realizza laddove $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 3x}$ assume valori prossimi allo zero, cioè "nei paraggi di $\mathbf{0}$" e "nei paraggi di $\mathbf{3}$".**

- Nei "paraggi" di quale punto si realizza l'uguaglianza $e^{x^2+2} - 1 = x^2 + 2$? **L'uguaglianza non si realizza mai, poiché $\boldsymbol{h(x) = x^2 + 2}$ non assume valori prossimi allo zero!**

Quanto visto ci aiuta per conoscere il comportamento (e rappresentare) una funzione "nei paraggi" di un punto confrontandola con una funzione elementare.

QUALCHE ESEMPIO DI GRAFICO DI FUNZIONE

1) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3) + x^4$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

- COSA SUCCEDE A f "NEI PARAGGI" di $+\infty$?

  $\operatorname{sen}(x^3)$ ASSUME VALORI COMPRESI TRA -1 e 1

  x^4 ASSUME DEI VALORI "MOLTO GRANDI" POSITIVI (cioè $+\infty$)

  QUINDI "NEI PARAGGI" di $+\infty$ f ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$.

  INOLTRE "NEI PARAGGI" di $+\infty$ $\operatorname{sen}(x^3)$ È TRASCURABILE RISPETTO A x^4 (CHE ASSUME VALORI "MOLTO GRANDI")

  $\Longrightarrow$ "NEI PARAGGI" di $+\infty$ f SI COMPORTA COME $y = x^4$.

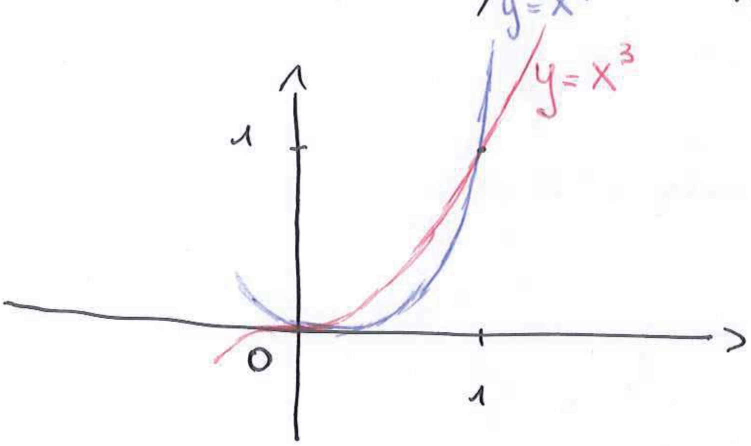
- COSA SUCCEDE A f "NEI PARAGGI" di $-\infty$?

  COME PRIMA, f ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$ E SI COMPORTA COME $y = x^4$.

- NOTIAMO CHE NELLA FUNZIONE APPARE IL TERMINE $\operatorname{sen}(x^3)$ CHE, "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$ (DOVE x^3 ASSUME VALORI PROSSIMI ALLO ZERO) È UGUALE A x^3.

DUNQUE, "NEI PARAGGI" di $x_0=0$ POSSIAMO RISCRIVERE LA FUNZIONE COME: $f(x) = x^3 + x^4$.

DOBBIAMO STABILIRE COME SI COMPORTA f "NEI PARAGGI" di $x_0=0$: SIA x^3 CHE x^4 ASSUMONO VALORI PROSSIMI ALLO ZERO, MA x^3 "DOMINA" x^4 (INFATTI NEI PARAGGI DI $x_0=0$ $y=x^3$ ASSUME VALORI MAGGIORI DI $y=x^4$)



QUINDI: "NEI PARAGGI" di $x_0=0$ f ASSUME VALORI PROSSIMI ALLO ZERO E SI COMPORTA COME $y=x^3$

→ RICAPITOLANDO

2) $g(x) = x^5 + e^x - 1$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

- COSA SUCCEDE A g "NEI PARAGGI" di $+\infty$?

x^5 ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

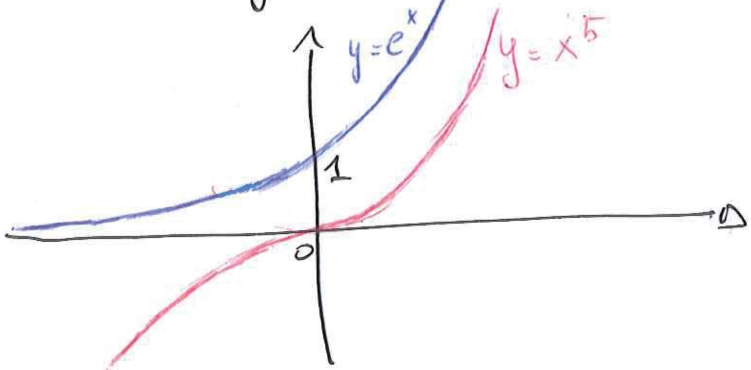
e^x ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

-1 RIMANE COSTANTE

QUINDI "NEI PARAGGI" di $+\infty$ g ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$.

CON CHE COMPORTAMENTO g "VA A $+\infty$"?

SIA $y=x^5$ CHE $y=e^x$ ASSUMONO VALORI PROSSIMI A $+\infty$



MA $y=e^x$ "DOMINA" $y=x^5$ QUINDI "NEI PARAGGI" di $+\infty$ g SI COMPORTA COME $y=e^x$

- COSA SUCCEDE A g "NEI PARAGGI" di $-\infty$?

x^5 ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty$

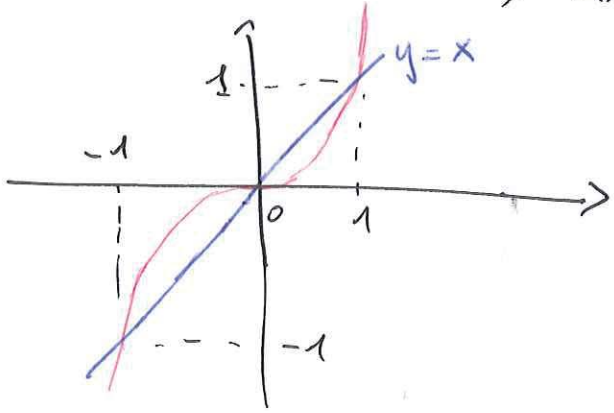
e^x ASSUME VALORI PROSSIMI A 0

-1 RIMANE COSTANTE

QUINDI "NEI PARAGGI" di $-\infty$ g ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty$ E SI COMPORTA COME $y = x^5$

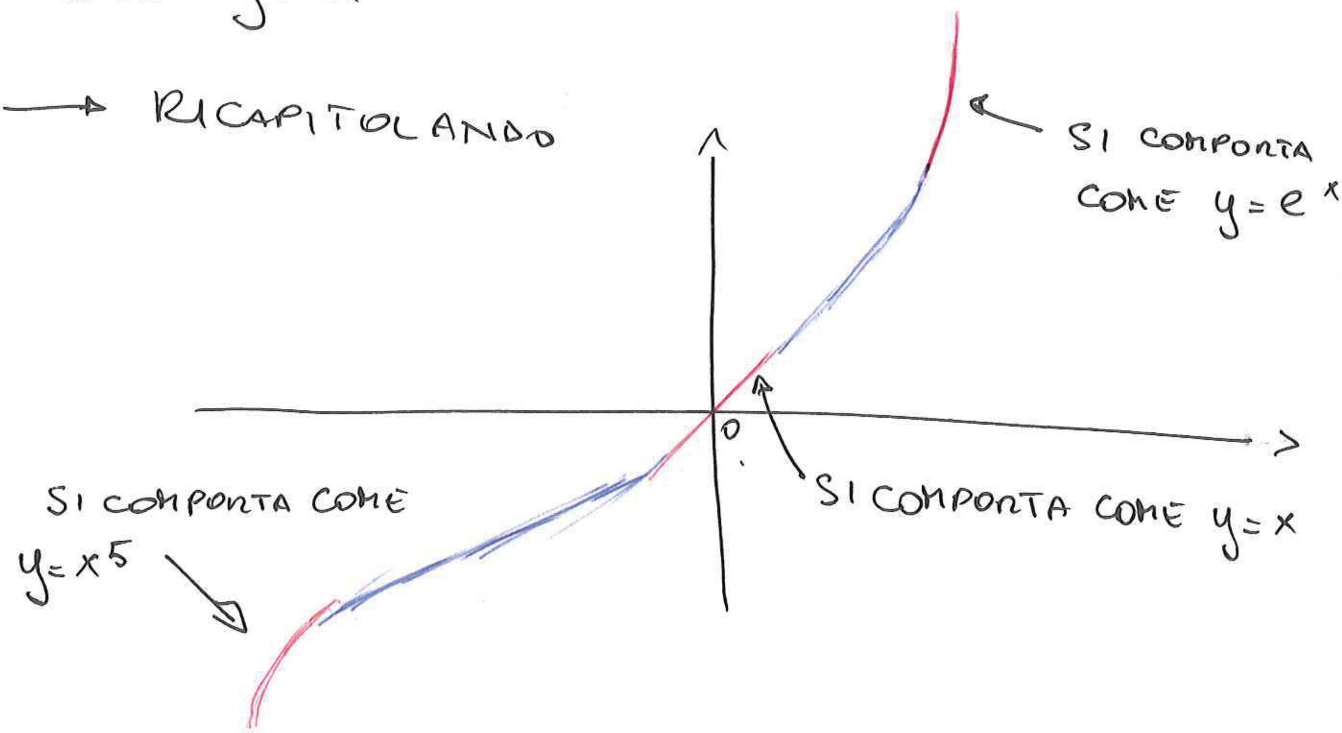
- OSSERVIAMO CHE NELLA FUNZIONE APPARE IL TERMINE $e^x - 1$ CHE, "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$, È UGUALE A x.
DUNQUE "NEI PARAGGI" DI $x_0 = 0$ POSSIAMO RISCRIVERE LA FUNZIONE: $g(x) = x^5 + x$.

SIA $y = x^5$ CHE $y = x$ "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$ ASSUMONO VALORI PROSSIMI A ZERO, MA $y = x$ "DOMINA" $y = x^5$



DUNQUE "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$ g SI COMPORTA COME $y = x$

→ RICAPITOLANDO



3) $t(x) = \sqrt[3]{x} + \ln(1+\sqrt[3]{x})$

DOMINIO $1+\sqrt[3]{x} > 0$, $\sqrt[3]{x} > -1$, $\boxed{x > -1}$

$(-1, +\infty)$

- COSA SUCCEDE A t NEI PARAGGI DI $+\infty$?

$\sqrt[3]{x}$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

$\ln(1+\sqrt[3]{x})$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

MA "NEI PARAGGI" DI $+\infty$ $y = \sqrt[3]{x}$ "DOMINA" $y = \ln(1+\sqrt[3]{x})$ (ci ricordiamo che le potenze "SONO MAGGIORI" DEI LOGARITMI)

QUINDI "NEI PARAGGI" di $+\infty$ t ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$ e SI COMPORTA COME $y = \sqrt[3]{x}$

- NEI PARAGGI di $x_0 = 0$ VALE L'UGUAGLIANZA

$$\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) = \sqrt[3]{x}$$

QUINDI t, NEI PARAGGI di $x_0 = 0$, ASSUME VALORI PROSSIMI A ZERO E SI COMPORTA COME $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$

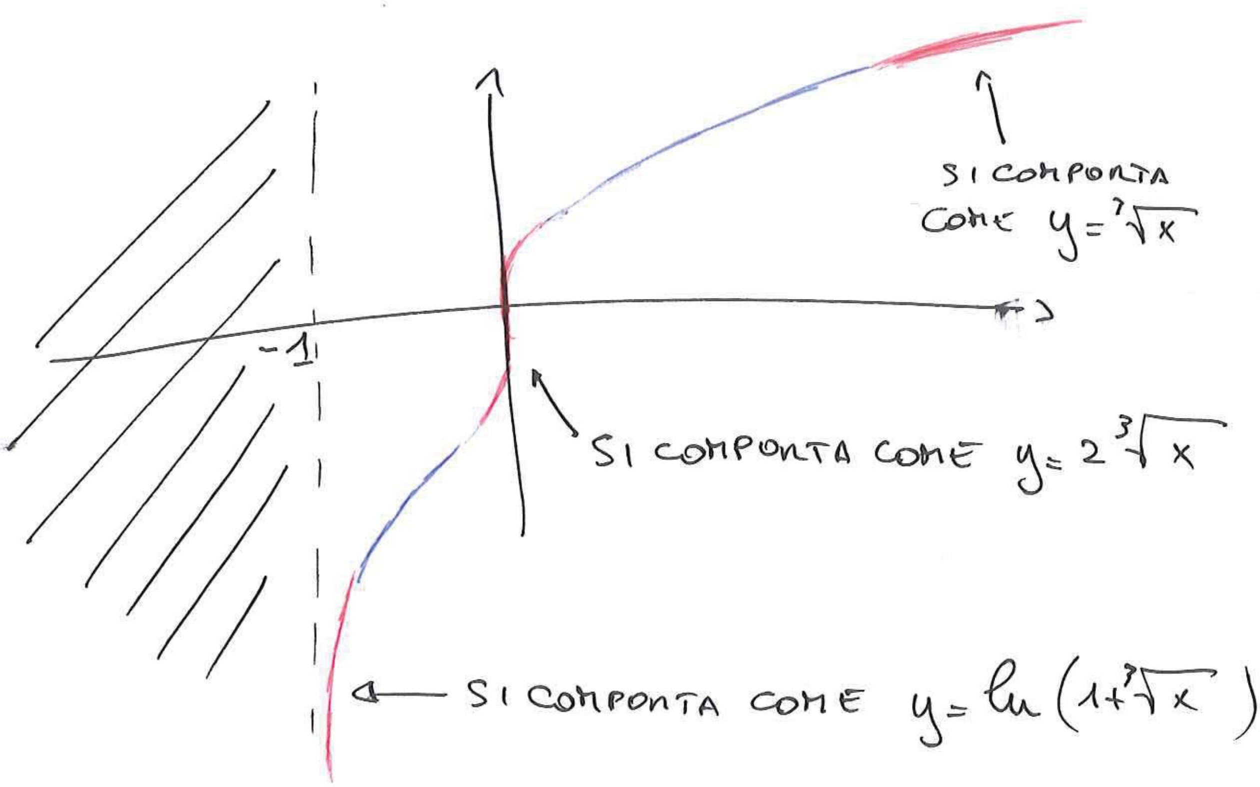
- "NEI PARAGGI" DI $x_0 = -1$

$\sqrt[3]{x}$ ASSUME VALORI PROSSIMI A -1

$\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty$

QUINDI t ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty$ E SI COMPORTA COME $y = \ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$

→ RICAPITOLANDO



4) $h(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

- COSA SUCCEDE "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$?

$\ln(1+x^2) = x^2$ (poichè $y = x^2$ ASSUME VALORI PROSSIMI A ZERO "NEI PARAGGI" di $x_0 = 0$)

$\Rightarrow$ $h(x)$ SI COMPORTA COME $x \cdot x^2 = x^3$

- COSA SUCCEDE NEI PARAGGI DI $+\infty$?

x ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

$\ln(1+x^4)$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

$\Rightarrow$ $h(x)$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty \cdot +\infty = +\infty$

- COSA SUCCEDE NEI PARAGGI DI $-\infty$?

x ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty$

$\ln(1+x^2)$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $+\infty$

$\Rightarrow$ $h(x)$ ASSUME VALORI PROSSIMI A $-\infty \cdot +\infty = -\infty$

$\rightarrow$ RICAPITOLANDO