Orientamatica 2016/2017
Appunti sulle equazioni alle differenze e differenziali

proff. Angelo Guerraggio e Jacopo De Tullio

Centro PRISTEM - Università Bocconi

1 Equazioni alle differenze

Le equazioni alle differenze e le equazioni differenziali possono essere considerate lo strumento più utile e comune nella costruzione dei modelli matematici. Per certi versi sono simili e da qui in poi ci soffermeremo in particolare a sottolineare le loro analogie (e le loro differenze).
Cominciamo con l'analisi delle equazioni alle differenze (finite).
Queste possono essere introdotte a partire da alcune loro caratteristiche:
a) le equazioni alle differenze sono *equazioni funzionali*: in un'equazione alle differenze la quantità ignota è una funzione y;
b) la variabile indipendente di tale funzione assume solo valori *discreti*; indicheremo questa variabile con $n : n = 1, 2, 3...$; la funzione y sarà dunque $y(n)$ o meglio ancora y_n;
c) ci interessa trovare y_n sfruttando le informazioni date dall'equazione alle differenze: questa uguaglianza collega il valore incognito y_n con i valori assunti dalla funzione y per i valori precedenti della variabile indipendente: $n-1, n-2, ...$.
Per chiarirci le idee ricorriamo all'esempio di un gioco matematico chiamato la torre di Hanoi.

Esempio 1 *Siano dati 3 paletti e n dischi, ciascuno di diametro differente, inizialmente tutti posti sul primo paletto in maniera tale che il disco con il diametro maggiore sia posto alla base, poi quello con diametro inferiore e così via fino alla cima del paletto dove è posto il disco con il diametro più piccolo. L'obiettivo del gioco è trovare il numero minimo di mosse necessarie per trasferire gli n dischi dal primo paletto ad un altro paletto (ad esempio* *il secondo) sempre mantenendo l'ordine e rispettando due regole: 1) si può spostare un solo disco alla volta; 2) in nessun istante del gioco un disco può essere posto sotto un disco di diametro maggiore.*

Per provare a risolvere il gioco, indichiamo con M il numero di mosse; naturalmente è facile rendersi conto che il numero delle mosse dipenderà da quanti dischi bisogna spostare. Dunque il numero di mosse sarà $M(n)$ o (meglio) M_n, con $n = 1, 2, \dots$. Stiamo dunque trattando un'equazione alle differenze: abbiamo, infatti, una quantità incognita che è una funzione dipendente da una variabile che assume solo valori interi positivi.
Come calcolare M_n? Supponiamo di iniziare a trasferire $n-1$ dischi dal primo paletto (lasciando in questo solo quello che era posto alla base) su un secondo paletto. Per quanto detto, per raggiungere lo scopo saranno necessarie M_{n-1} mosse. Per spostare il disco lasciato sul primo paletto sul paletto lasciato libero sarà necessaria un'ulteriore mossa. Infine, per trasferire gli $n-1$ dischi sul disco di diametro maggiore saranno necessarie altre M_{n-1} mosse. Ricapitolando: per risolvere il gioco e trasferire tutti gli n dischi sono necessarie $M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1$ mosse.
Abbiamo dunque ottenuto la seguente equazione alle differenze:

$$M_n = 2M_{n-1} + 1$$

che vedremo come si risolverà. Ricordiamo che si tratta di una equazione alle differenze del *primo ordine* (lineare): l'ordine dell'equazione alle differenze è dato dalla differenza tra il valore assegnato alla variabile indipendente e il valore iniziale. In questo caso: $n - (n-1) = 1$.
La soluzione dell'equazione alle differenze $M_n = 2M_{n-1} + 1$ si ricava grazie al seguente teorema (ci limitiamo al caso delle equazioni alle differenze del primo ordine a coefficienti costanti).

Teorema 2 *Data l'equazione del primo ordine lineare*

$$y_n = ay_{n-1} + b$$

la sua soluzione generale risulta:

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per ricorrenza. Data l'equazione $y_n = ay_{n-1} + b$ si ha che:

$$\begin{aligned}
&y_1 = ay_0 + b \\
&y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2y_0 + ab + b \\
&y_3 = ay_2 + b = a\left(a^2y_0 + ab + b\right) + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b
\end{aligned}$$

Generalizzando:

$$y_n = a^n y_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + ... + a^2 b + ab + b$$

Riscriviamo quanto ottenuto:

$$\begin{aligned} y_n &= a^n y_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + ... + a^2 b + ab + b = \\ &= a^n y_0 + b\left(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^2 + a + 1\right) \end{aligned}$$

Il termine tra le parentesi $a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^2 + a + 1$ è la somma dei primi n termini della successione geometrica di ragione a. Sappiamo che questa (per $a \neq 1$) somma vale $\frac{a^n-1}{a-1}$, quindi otteniamo:

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

■

Osservazione 3 *Abbiamo assunto $a \neq 1$ (caso generale). Nel caso particolare si abbia $a = 1$ (e $b \in \mathbb{R}$) si ottiene:*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + b \\ y_2 &= y_1 + b = (y_0 + b) + b = y_0 + 2b \\ y_3 &= y_2 + b = (y_0 + 2b) + b = y_0 + 3b \\ &\ ... \\ y_n &= y_0 + nb \end{aligned}$$

Esempio 4 *Si risolva la seguente equazione $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 1 = 0$.*
Si tratta di un'equazione alle differenze lineare del primo ordine $(n + 2 - (n + 1) = 1)$ a coefficienti costanti. Se la riscriviamo come $y_{n+2} = 5y_{n+1} - 1$, grazie al teorema appena enunciato, si ricava la soluzione:

$$y_n = 5^n y_0 - \frac{5^n-1}{5-1} = 5^n y_0 - \frac{1}{4}5^n + \frac{1}{4} = 5^n\left(y_0 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

Osserviamo che la soluzione generale dipende dal valore iniziale y_0.

Abbiamo visto che dal gioco della torre di Hanoi si ricava l'equazione alle differenze lineare del primo ordine a coefficienti costanti $M_n = 2M_{n-1} + 1$. Dunque la soluzione generale risulta: $M_n = 2^{n-1}M_1 + \frac{2^n-1}{2-1}$.

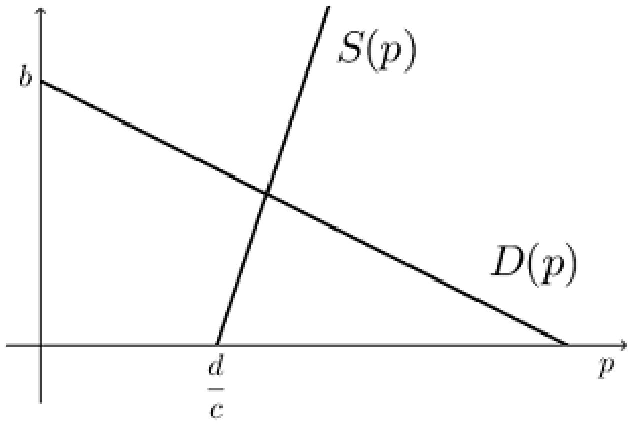
Poiché il gioco ha senso per $n \geq 1$ e $M_1 = 1$ (è necessaria una sola mossa quando si gioca con un solo disco) otteniamo:

$$\begin{aligned} M_n &= 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 = \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Ad esempio, per trasferire 4 dischi, sono necessarie $2^4 - 1 = 15$ mosse.

1.1 Il modello della ragnatela

Un ulteriore esempio dell'applicazione delle equazioni alle differenze è il cosiddetto **modello della ragnatela** (cobweb model). Questo modello, attribuito all'economista ungherese Nicholas Kaldor, rappresenta la versione dinamica del tradizionale modello del prezzo di equilibro.
Consideriamo, nel modello istantaneo tradizionale, un mercato con un singolo bene. Si supponga che la funzione domanda $D(p)$ sia linearmente dipendente dal prezzo p (una retta nel piano). Questa particolare caratteristica è tipica nella costruzione di un modello matematico: in probabilità i dati empirici spesso assegnano un'altra forma e altre proprietà alla funzione domanda, ma è ragionevole pensare, in prima approssimazione, che la funzione domanda abbia un'espressione analitica semplice, cioè sia lineare (è comunque possibile implementare il modello considerando funzioni più complicate e quindi più realistiche). Poiché $D(p)$ è una funzione lineare, possiamo scriverla nella forma $D(p) = -ap + b$ $(a, b > 0)$ dove il coef-ficiente angolare negativo esprime il fatto che D è decrescente in funzione del prezzo: se p cresce, i consumatori sono meno invogliati all'acquisto di un bene. Osserviamo infine che $D(0) = b$, ovvero b rappresenta la domanda massima (quando il prezzo è nullo).
Analogamente, introduciamo la funzione offerta $S(p)$ anch'essa linearmente dipendente dal prezzo: $S(p) = cp - d$ $(c, d > 0)$. La funzione offerta è crescente in funzione del prezzo e il valore negativo $S(0) = -d$ significa che la produzione di un bene inizia a patto che $S(p) \geq 0$ ossia $p \geq \frac{d}{c}$.



Il prezzo di equilibrio si ottiene quando $D(p) = S(p)$, ovvero per $p^* = \frac{b+d}{a+c}$.

Fino a questo punto non abbiamo considerato la variabile temporale. Per questo il modello, nella sua versione tradizionale, è di tipo statico: tutto quanto - la produzione, l'offerta, la domanda e l'uguaglianza - avviene nello stesso istante. Nella realtà le cose sono differenti.
Possiamo però supporre che ci sia contemporaneità nella funzione domanda, ovvero un consumatore decide di acquistare nello stesso istante n in cui conosce il prezzo del bene:

$$D_n = -ap_n + b$$

Invece per l'offerta è diverso. Pensiamo, ad esempio, a un agricoltore che stabilisce le quantità da produrre in anticipo. Ovvero la funzione domanda al tempo n dipende dal prezzo al tempo $n-1$:

$$S_n = cp_{n-1} - d$$

La condizione di equilibrio $D_n = S_n$ nel caso dinamico ci porta a una equazione alle differenze lineare del primo ordine:

$$-ap_n + b = cp_{n-1} - d$$

$$p_n = -\frac{c}{a}p_{n-1} + \frac{b+d}{a}$$

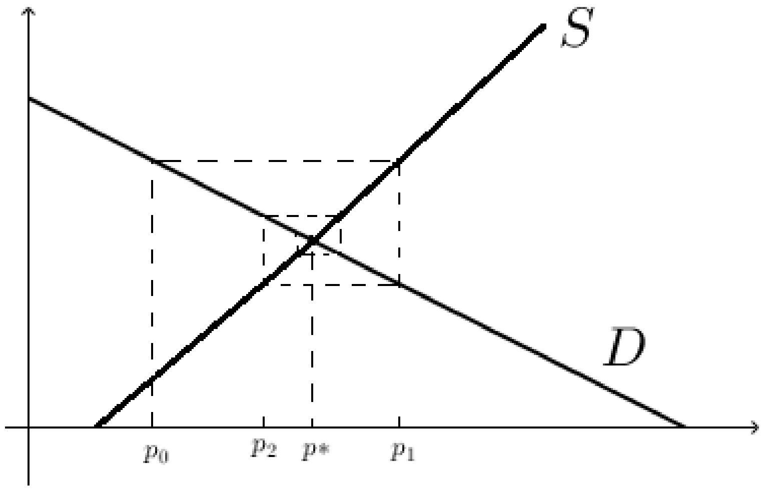
La sua soluzione generale, che conosciamo grazie al teorema visto, è data da:

$$
\begin{aligned}
p_n &= \left(-\frac{c}{a}\right)^n \cdot p_0 + \frac{b+d}{a} \cdot \frac{\left(-\frac{c}{a}\right)^n - 1}{\left(-\frac{c}{a}\right) - 1} = \\
&= \left(-\frac{c}{a}\right)^n \cdot p_0 - \frac{b+d}{a+c} \cdot \left[\left(-\frac{c}{a}\right)^n - 1\right] = \\
&= \left(-\frac{c}{a}\right)^n \cdot p_0 - p^* \left(-\frac{c}{a}\right)^n + p^* = \\
&= \left(-\frac{c}{a}\right)^n (p_0 - p^*) + p^*
\end{aligned}
$$

L'andamento del prezzo p_n dipende dal valore $-\frac{c}{a}$:

- se $\left|-\frac{c}{a}\right| < 1$, o $c < a$, si ha $\lim_{n\to+\infty} p_n = p^*$
- se $\left|-\frac{c}{a}\right| > 1$, o $c > a$, si ha $\lim_{n\to+\infty} p_n = \infty$
- se $\left|-\frac{c}{a}\right| = 1$, o $c = a$, si ha che p_n oscilla intorno a p^*

Si ricava dunque che il mercato tende al prezzo di equilibrio soltanto nel caso in cui $\left|-\frac{c}{a}\right| < 1$.
Quest'ultimo risultato può essere illustrato geometricamente. Cominciamo con il caso $c < a$: la retta dell'offerta è meno inclinata rispetto a quella della domanda (e la retta $p_n = -\frac{c}{a}p_{n-1} + \frac{b+d}{a}$ è meno inclinata rispetto alla bisettrice del primo e quarto quadrante).



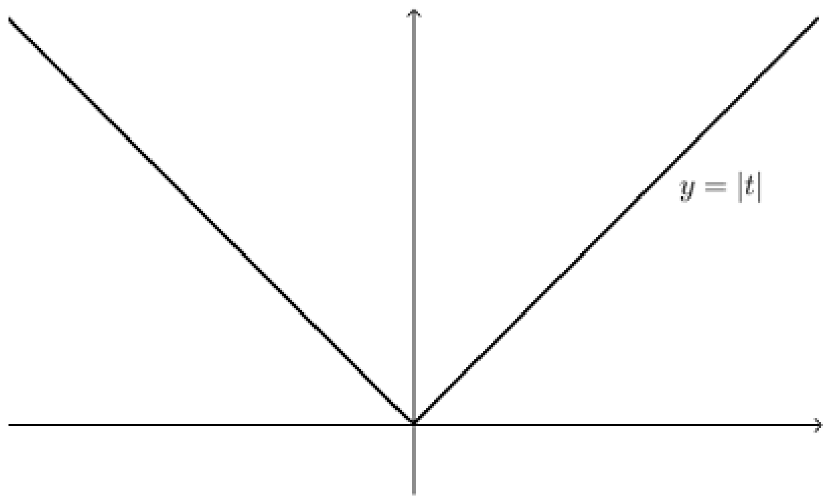
Consideriamo un prezzo iniziale p_0, ad esempio minore di p^*. A questo corrisponde un certo valore dell'offerta che determina un surplus di domanda, dunque il produttore aumenta il prezzo portandosi in p_1, ma per questo prezzo la domanda è troppo bassa e quindi si riduce il prezzo (passando a p_2) per far crescere la domanda. Proseguendo in questo caso ($c > a$) si osserva che la sequenza di prezzi $\{p_0, p_1, p_2, ...\}$ converge a p^*.

2 Una parentesi: la derivabilità di una funzione

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cioè tale che a un valore reale associa un valore reale) è *derivabile* in un punto t_0 appartenente al dominio della funzione e in cui la funzione è continua, se esiste finito il limite del rapporto incrementale della funzione nel punto. Il valore di tale limite è detto derivata prima di f in t_0 e si scrive:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

Geometricamente la derivata prima di una funzione f in un punto t_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f passante per il punto $(t_0, f(t_0))$.
Possiamo quindi affermare che una funzione f è derivabile in un punto x_0 se e solo se la funzione ammette la *retta tangente* al grafico nel punto $(t_0, f(t_0))$. Quest'ultima caratterizzazione ci consente di affermare che il concetto di derivabilità è un concetto più forte della continuità. Infatti se pensiamo alla funzione $f(t) = |t|$, sappiamo benissimo che tratta di una funzione continua nel suo dominio ($\mathbb{R}$) ma si osserva altrettanto facilmente che in $x_0 = 0$ questa non ammette retta tangente al grafico, dunque la funzione valore assoluto di t pur essendo ovunque continua in $t_0 = 0$ non è derivabile.



Dalla suddetta definizione di derivata prima è possibile ricavare, in forma generale, le derivate delle funzioni elementari e le regole per eseguire le operazioni con le derivate. Qui di seguito ricordiamo solo alcune derivate che ci serviranno in seguito:

$f(t) = k$	$f'(t) = 0$
$f(t) = t$	$f'(t) = 1$
$f(t) = t^2$	$f'(t) = 2t$
$f(t) = t^n$	$f'(t) = nt^{n-1}$
$f(t) = e^t$	$f'(t) = e^t$
$f(t) = \ln t$	$f'(t) = \frac{1}{t}$

Ricordiamo inoltre le due seguenti operazioni:
derivata della somma due funzioni $(f(t) + g(t))$: $f'(t) + g'(t)$
derivata del prodotto di una funzione per uno scalare $(k \cdot f(t))$: $k \cdot f'(t)$

Esempio 5 *Calcolare la derivata prima nel punto* $t_0 = 1$ *della funzione* $f(t) = 3t^4 - 5 \ln t - 4e^t - 6$.
Si tratta di una funzione continua nel suo dominio $(0, +\infty)$*, calcoliamo prima la forma generale della derivata prima:*

$$f'(t) = 12t^3 - \frac{5}{t} - 4e^t.$$

A questo punto la derivata prima nel punto $t_0 = 1$ *(che coincide con il valore del coefficiente angolare della retta tangente al grafico di* f *passante per il punto* $(1, f(1)) = (1, -3 - 4e)$*) risulta* $f'(1) = 7 - 4e$.

3 Equazioni differenziali

Come già anticipato, le equazioni alle differenze e le equazioni differenziali sono per certi aspetti simili. Entrambe rappresentano gli strumenti matematici più diffusi nella cosiddetta modellizzazione matematica ed entrambe sono equazioni funzionali. La principale differenza tra le due è che nel caso delle equazioni differenziali la quantità incognita è una funzione di variabile continua (non più discreta come nel caso delle equazioni alle differenze). Parleremo di equazione differenziale *ordinaria* per sottolineare il fatto che la funzione incognita dipende solo da una variabile.
Per introdurre le equazioni differenziali ordinarie in maniera analoga a quanto fatto per le equazioni alle differenze, possiamo dire che un'equzione differenziale è:

- un'equazione funzionale
- in cui la funzione incognita y dipende da una variabile continua t
- e per la quale dobbiamo trovare la funzione $y(t)$ partendo da una informazione (equazione) riguardante la sua derivata $y'(t)$.

3.1 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Consideriamo la loro forma generale:

$$y' = f(t, y)$$

dove $f(t, y)$ è una funzione dipendente dalla variabile indipendente t e dalla quantità incognita $y(t)$. Le eventuali soluzioni di un'equazione siffatta si dicono *soluzioni generali* (o *integrali generali*).

La coppia formata dall'equazione differenziale ordinaria del primo ordine $y' = f(t, y)$ e la condizione di passaggio per un determinato punto (t_0, y_0):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è detto *problema di Cauchy* associato all'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Se verificate alcune condizioni, un problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione.
Ricordiamo (anche se per ora di difficile comprensione) di seguito un teorema di esistenza locale della soluzione di un problema di Cauchy:

Teorema 6 *Se la funzione f è continua rispetto a t e a y e derivabile con continuità rispetto a y in un intorno del punto (t_0, y_0), allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette una unica soluzione in un intorno del punto (t_0, y_0).

Analizziamo d'ora in poi solo alcune tipologie di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

3.1.1 Primitive di una funzione

Consideriamo un caso molto speciale (e molto semplice) di equazione differenziale del primo ordine, le cosiddette *primitive* di una funzione. Ricercare una primitiva di una data funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ significa trovare l'insieme delle funzioni $G(t)$ tali che abbiano come derivata la funzione $g(t)$, ovvero $G'(t) = g(t)$.
In questo caso la forma dell'equazione differenziale del primo ordine si semplifica e diventa:

$$y'(t) = f(t)$$

ovvero la funzione f dipende soltanto dalla variabile indipendente t.
Ad esempio risolvere la l'equazione $y'(t) = 1$ significa ricercare quella funzione $y(t)$ tale che la sua derivata prima sia 1.
Ma $y = t, y = t-1, y = t+1, y = t+2$... sono tutte soluzioni! Possiamo dunque affermare che tutte le soluzioni sono della forma $y(t) = t+c$ ($c \in \mathbb{R}$).
In Matematica, per risolvere un problema di ricerca di primitive del tipo $y' = f(t)$, si usa una particolare notazione:

$$\int f(t)dt = G(t) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

e si legge *integrale di* $f(t)$ *in* dt *uguale a* $G(t) + c$. Se volessimo individuare univocamente la funzione primitiva (detta soluzione particolare) allora è necessario aggiungere una condizione in più. Ad esempio chiedere il passaggio per il punto $(1, 3)$ ovvero chiedere che $y(1) = 3$; allora. imponendo il passaggio per il punto all'insieme delle primitive $y(t) = t + c$, si otterrebbe la soluzione $y = t + 2$.
Ma cercare l'insieme delle primitive e imporre il passaggio per un punto equivale a risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = t \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Esempio 7 *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(t) = 3e^t - 2t \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Partiamo col risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = 3e^t - 2t$*, che si presenta come un problema di ricerca delle primitive del tipo:*

$$\int \left(3e^t - 2t\right) dt = 3e^t - t^2 + c.$$

Imponendo la condizione di passaggio per il punto $(0, -2)$ *si ricava la soluzione del problema di Cauchy:*

$$y(t) = 3e^t - t^2 - 5$$

3.1.2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Un altro caso particolare di equazione differenziale del primo ordine sono le cosiddette equazioni a variabili separabili che si presentano nella forma:

$$y'(t) = p(t)q(y)$$

dove p e q sono funzioni continue (la prima dipendente solo da t e la seconda solo da y).

Per risolverle si procede separando, a destra e sinistra dell'uguaglianza, le funzioni attraverso due passaggi:
1) risolvere, se possibile, l'equazione $q(y) = 0$ la cui soluzione è una soluzione particolare dell'equazione differenziale;
2) dopo aver posto $q(y) \neq 0$, procedere nel seguente modo:

$$\frac{1}{q(y)} y' = p(t)$$

poiché possiamo scrivere che $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ (cioè derivata della funzione $y(t)$ rispetto alla variabile t)

$$\frac{1}{q(y)} \frac{dy}{dt} = p(t)$$

da cui

$$\frac{1}{q(y)} dy = p(t) dt$$

infine

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(t) dt$$

A questo punto ci siamo ricondotti a risolvere due problemi di ricerca di primitive a sinistra rispetto alla y e a destra rispetto alla t.

Esempio 8 *Risolvere l'equazione differenziale* $y' = 2e^{-y}t$.
Nell'equazione data possiamo procedere con la separazione delle variabili (con $q(y) = e^{-y}$ *e* $p(t) = 2t$*).*
Osserviamo che in questo caso $q(y)$ *è sempre non nulla, possiamo procedere dunque con la separazione:*
$\frac{dy}{dt} = e^{-y} 2t$
$e^{y} dy = 2t dt$
da cui
$\int e^{y} dy = \int 2t dt$
$e^{y} + k = t^2 + h$
$e^{y} = t^2 + c$ *(con* $t^2 + c > 0$*)*
da cui
$y(t) = \ln \left(t^2 + c \right)$

Esempio 9 *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = y \left(t + 2t^3 \right) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Cominciamo col risolvere l'equazione differenziale associata al problema

$y' = y\left(t + 2t^3\right)$. *Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili con* $q(y) = y$ *e* $p(t) = t + 2t^3$.
Per prima cosa studiamo il caso $q(y) = 0$, *ovvero* $y = 0$. *Questa rappresenta una soluzione particolare dell'equazione differenziale.*
Poniamo $q(y) \neq 0$, *cioè* $y \neq 0$ *e procediamo con la separazione:*
$\frac{dy}{dt} = y\left(t + 2t^3\right)$
$\frac{1}{y}dy = \left(t + 2t^3\right)dt$
da cui
$\int \frac{1}{y}dy = \int \left(t + 2t^3\right)dt$
$\ln|y| = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + c$
da cui
$|y(t)| = e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + c}$
Imponiamo dunque la condizione di passaggio per il punto $(1, 1)$. *La soluzione particolare trovata* $y = 0$ *non rispetta il passaggio per il punto, quindi, pur essendo soluzione dell'equazione differenziale, non è soluzione del problema di Cauchy. Imponiamo il passaggio per il punto alla soluzione generale* $y(t) = e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} + c}$ *e ricaviamo che* $c = -1$, *quindi la soluzione del problema di Cauchy è:* $y(t) = e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2} - 1}$.

3.2 Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

Per quanto riguarda le equazioni differenziali del secondo ordine, ci occupiamo soltanto di quelle che si presentano nella forma:

$$y''(t) = f(t)$$

la cui soluzione generale (che dipenderà ora da due parametri reali) si calcola con il metodo di ricerca di una primitiva eseguita due volte.
Facciamo subito un esempio per chiarirci le idee; data:
$y''(t) = 3e^t$
cercando le primitive di $3e^t$ troviamo la struttura di $y'(t)$, in questo caso otteniamo $y'(t) = 3e^t + c$.
Ricercando nuovamente le primitive di $y'(t)$ troviamo la struttura della soluzione generale dell'equazione di secondo ordine: $y(t) = 3e^t + ct + b$.
Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine prevede due condizioni iniziali (una per la funzione $y(t)$ e una per la sua derivata prima $y'(t)$) e si presenta nella forma:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Esempio 10 *Detta $s(t)$ la legge oraria di un moto, sappiamo che la sua variazione rispetto alla variabile temporale è la velocità, cioè $s'(t) = v(t)$. Analogamente la variazione rispetto alla variabile temporale della velocità è l'accelerazione, cioè $v'(t) = a(t)$. Detta g l'accelerazione di gravità, risolvere e interpretare il seguente problema di Cauchy:* $\begin{cases} s''(t) = -g \\ s(0) = 0 \\ s'(0) = 0 \end{cases}$.

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo $s'' = -g$, procedendo con la ricerca delle primitive si ricava che: $s'(t) = -gt + c$ e $s(t) = -g\frac{t^2}{2} + ct + b$.

Imponendo le condizioni del problema di Cauchy si ricava che $c = 0$ e $b = 0$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ che non è altro che l'equazione del moto di caduta verticale.

3.3 Modello di Malthus

Alla fine del '700, l'opera del pastore anglicano Thomas Robert Malthus aprì una nuova fase dell'applicazione degli strumenti matematici nel campo demografico, fino ad allora oggetto di analisi solo tramite metodi statistici. Nel suo *An Essay on the Principle of the Population as It Affects the Future Improvement of Society* (1798) espresse l'opinione che l'aumento demografico avrebbe condotto a scenari catastrofici. Malthus affermava che la razza umana cresceva in progressione geometrica (1,2,4,8,16,32,..) mentre la disposizione di viveri in progressione aritmetica (1,2,3,4,5,...). Da qui la necessità di introdurre un rigido controllo delle nascite anche attraverso metodi estremi come guerre e carestie.

Il modello malthusiano di studio dell'evoluzione nel tempo della popolazione può essere così descritto: sia $P = P(t)$ la funzione che indica il numero una popolazione al tempo t (che assumiamo continuo per meglio applicare i risultati matematici appena visti). Assumiamo inoltre che la funzione $P(t)$ sia continua e derivabile (in effetti considerando la variabile temporale continua il numero di nascite e morti nel corso del tempo fa sì che la funzione si evolva con continuità) e denotiamo con $P_0 = P(0)$ il numero iniziale della popolazione.

Il modello prevede ulteriori ipotesi sulla popolazione, deve essere isolata (cioè nessuna immigrazione o emigrazione) e non ci devono essere problemi di risorse che impediscono lo sviluppo della popolazione.

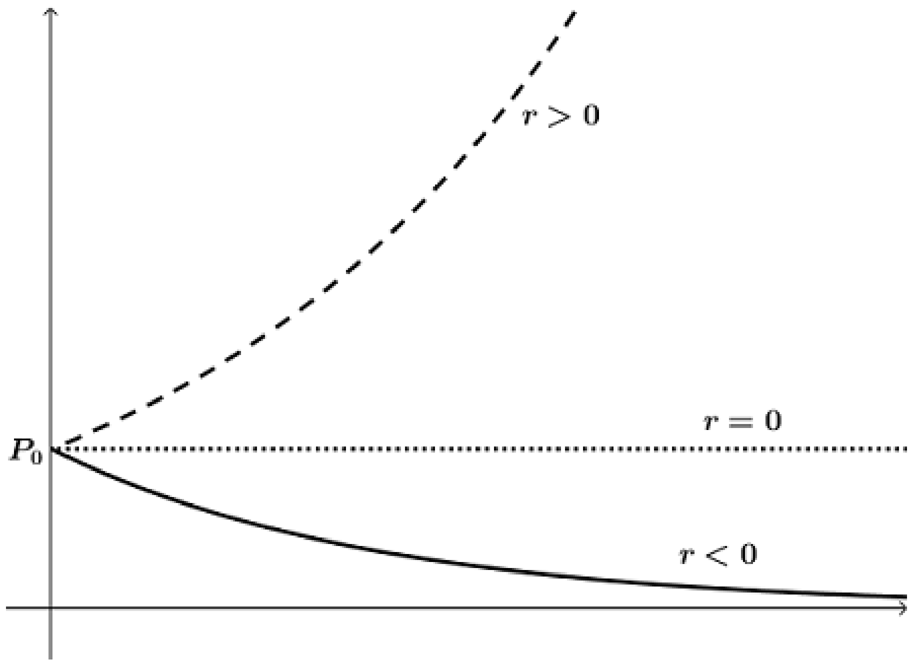
Per quanto supposto possiamo affermare che l'evoluzione della popolazione dipenda linearmente dal numero della stessa:

$$P'(t) = rP(t)$$

dove r è una costante, detta *potenziale biologico*, che indica il tasso di riproduzione della popolazione.
L'equazione $P' = rP$ è nota come *legge Malthusiana* della crescita di una popolazione.
Si tratta di un'equazione a variabili separabili ($P(t) > 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP \\
\frac{dP}{P} &= r\ dt \\
\int \frac{1}{P} dP &= \int r\ dt \\
\log P &= rt + c \\
P &= e^{rt+c} \\
P &= Ce^{rt} \quad (C = e^c)
\end{aligned}$$

Poiché, per $t = 0$, sappiamo che $P(0) = C$, si ricava che $C = P_0$. La soluzione generale della legge Malthusiana è dunque $P(t) = P_0 e^{rt}$. Ovvero una crescita della popolazione di carattere esponenziale sempre più rapida all'aumentare del tasso r.
Osserviamo che al variare del tasso r ci ritroviamo dinanzi a tre scenari possibili.



- **Caso 1**: $r > 0$.

Se il potenziale biologico è positivo (il numero delle nascite supera quello delle morti) la popolazione è destinata alla crescita con velocità esponenziale.

- **Caso 2**: $r = 0$.

  Se il potenziale biologico è nullo (il numero delle nascite è pari a quello delle morti) la popolazione è destinata a rimanere di numero costante.

- **Caso 3**: $r < 0$.

  Se il potenziale biologico è negativo (il numero delle morti supera quello delle nascite) la popolazione è destinata all'estinzione.