Le slide che seguono sono state impiegate durante la conferenza “PEANO E L’ARITMETICA” (Siena, 6 Aprile 2019). Non hanno alcuna autonomia, essendo un semplice supporto visivo ad una lezione parlata, ma possono essere di aiuto per coloro che a tale lezione hanno assistito. Sarò lieto di approfondire via e-mail i punti che mi verranno indicati.

Fabio Bellissima (fabio.bellissima@unisi.it)

Dipartimento di Ingegneria dell’Informazione e Scienze Matematiche, Università degli Studi di Siena.

I primi postulati (o assiomi) in :

Geometria:

Euclide (300 a.C) , *Elementi*

Aritmetica:

Peano (1889), *Arithmetices Principia, nova methodo exposita*

Elementi, Libro I : Postulati della geometria.

Elementi, Libri VII-IX (Libri aritmetici): nessun cenno a postulati dell’aritmetica.

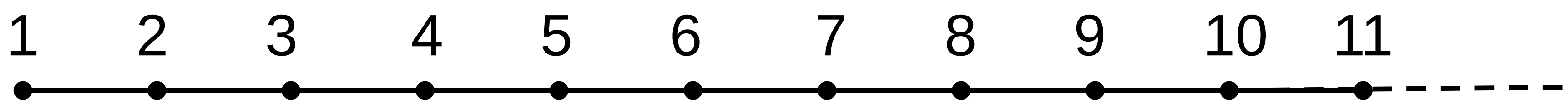
Teoremi primitivi (postulati)	concetti primitivi
$\Downarrow$ dimostrazioni	$\Downarrow$ definizioni
teoremi	concetti

Concetti primitivi con cui definire gli altri concetti e enunciarne le proprietà.

$$\Downarrow$$

Simboli primitivi del linguaggio formale con cui descrivere la teoria

Ciò che gli assiomi devono descrivere:



(la linea dei numeri)

Simboli primitivi: $\{ 1, S \}$

1 (uno): rappresenta un oggetto elementare

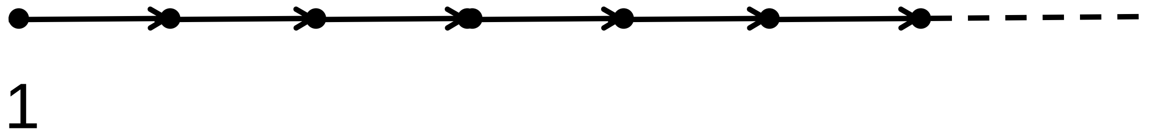
S (successore): rappresenta una funzione

(nel testo di Peano la funzione S è indicata con +1)

•

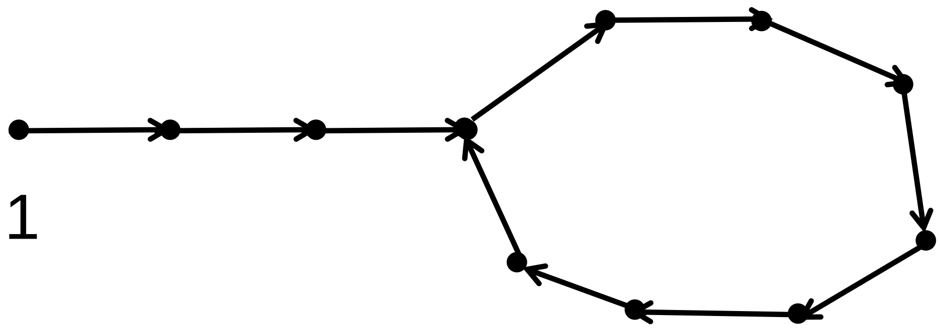
1

I Assioma: 1 è un numero



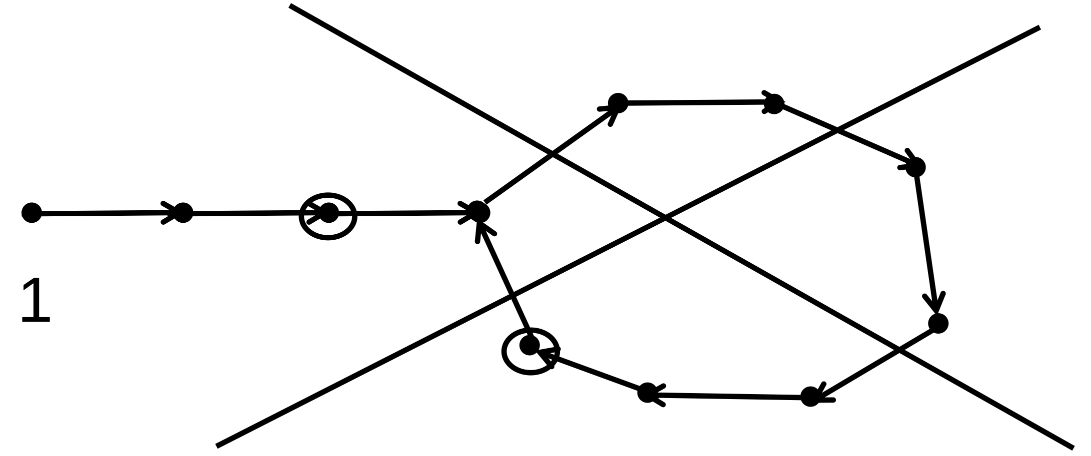
I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero ma anche



I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

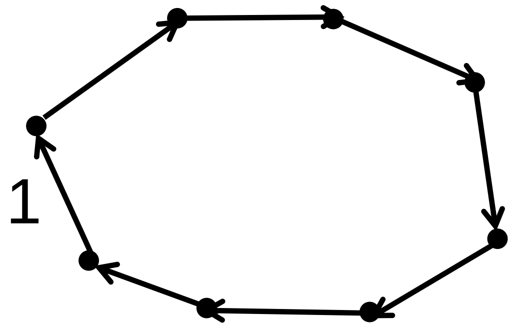


I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

III Assioma: numeri diversi hanno successori diversi ⟸

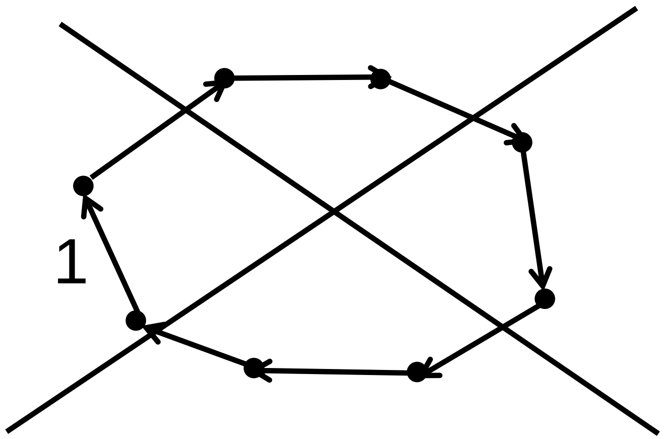
potremmo però avere



I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

III Assioma: numeri diversi hanno successori diversi

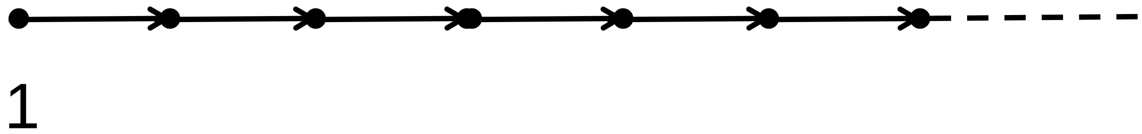


I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

III Assioma: numeri diversi hanno successori diversi

IV Assioma: 1 non è successore di alcun numero ⟸



I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

III Assioma: numeri diversi hanno successori diversi

IV Assioma: 1 non è successore di alcun numero

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens* a, sive a *plus* 1.
» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in N$.
2. $a \in N . \supset . a = a$.
3. $a, b \in N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b, c \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N$.
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k$.

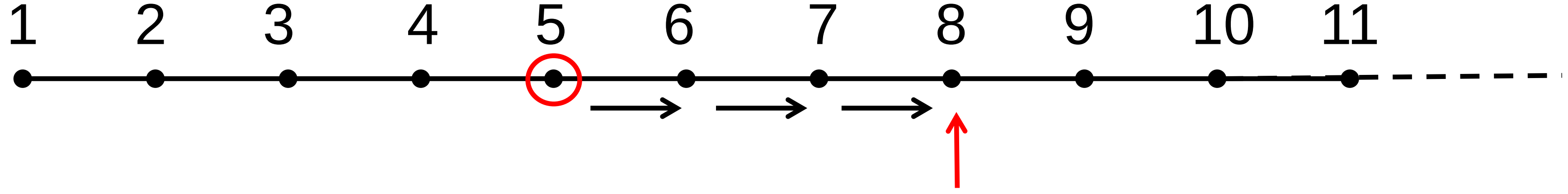
Definitiones.

10. $2 = 1 + 1 ; 3 = 2 + 1 ; 4 = 3 + 1 ;$ etc.

Gli assiomi dal 2 al 5 riguardano la relazione di identità e nelle presentazioni moderne sono associati agli assiomi della logica. L'assioma al punto 9, finalizzato a produrre dimostrazioni, lo tratteremo dopo.

Definizione di nuove operazioni

Somma: operazione in due variabili



5 + 3

Diverso ruolo dei due addendi:

5: punto di partenza

3: contapassi

Definizione della somma

$$\begin{cases} a + 1 = S(a) & \text{Base} \\ a + S(b) = S(a + b) & \text{Passo} \end{cases}$$

passi

$$5 + 3 = 5 + S(2) = S(5 + 2) = S(5 + S(1)) =$$

$$S(S(5 + 1)) = S(S(S(5)))$$

base

(Alla fine il simbolo + è sparito)

Somma: reiterazione dell'operazione di successore

$$\begin{cases} a + 1 = S(a) \\ a + S(b) = S(a + b) \end{cases}$$

$$a, b \in N \,.\supset .\, a + (b + 1) = (a + b) + 1 \,.$$

Prodotto: reiterazione della somma

$$\begin{cases} a \times 1 = a \\ a \times S(b) = (a \times b) + a \end{cases}$$

1. $a \in N \,.\supset .\, a \times 1 = a.$
2. $a, b \in N \,.\supset .\, a \times (b + 1) = a \times b + a.$

(Si osservi come, nel testo di Peano, l'impiego del simbolo +1 al posto di S nasconda in parte l'analogia esistente tra le definizioni di somma e prodotto)

Definitio.

18. $a, b \in N . \supset . a + (b+1) = (a+b) + 1 .$

Nota. — Hanc definitionem ita legere oportet: si a et b sunt numeri, et $(a+b)+1$ sensum habet (scilicet si $a+b$ est numerus), sed $a+(b+1)$ nondum definitus est, tunc $a+(b+1)$ significat numerum qui $a+b$ sequitur.

Ab hac definitione, et a praecedentibus deducitur:

$$a \in N . \supset \therefore a + 2 = a + (1+1) = (a+1) + 1 .$$
$$a \in N . \supset \therefore a + 3 = a + (2+1) = (a+2) + 1 , \text{ etc.}$$

Theoremata.

19. $a, b \in N . \supset . a + b \in N .$

Dem. $a \in N . P\,6 : \supset : a + 1 \in N : \supset : 1 \in [b \in]\ \mathrm{Ts}.$ (1)

$a \in N . \supset :: b \in N . b \in [b \in]\ \mathrm{Ts} : \supset : a + b \in N . P\,6 : \supset : (a+b) +$
$1 \in N . P\,18 : \supset : a + (b+1) \in N : \supset : (b+1) \in [b \in]\ \mathrm{Ts}.$ (2)

$a \in N . (1) . (2) . \supset :: 1 \in [b \in]\ \mathrm{Ts} \therefore b \in N . b \in [b \in]\ \mathrm{Ts} : \supset : b + 1 \in [b \in]$
$\mathrm{Ts} \therefore ([b \in]\ \mathrm{Ts})\ [k]\ P\,9 :: \supset : N \supset [b \in]\ \mathrm{Ts}. (L\,50) :: \supset : b \in N . \supset$
$\mathrm{Ts}.$ (3)

$(3) . (L\,42) : \supset : a , b \in N . \supset . \text{Thesis}.$ (Theor.).

L’ultimo assioma (qui impiegato per dimostrare che la somma di due numeri è un numero).

1

I Assioma: 1 è un numero

II Assioma: il successore di un numero è un numero

III Assioma: 1 non è successore di alcun numero

IV Assioma: numeri diversi hanno successori diversi

V Assioma: se una proprietà vale per 1 e, se vale per n, vale per S(n), allora vale per tutti i numeri

(Tale assioma è conosciuto come *Principio di Induzione matematica*)

Scriviamo P(n) per indicare che il numero n soddisfa la proprietà P

Se vale P(1) (1)

e se, per ogni n, P(n) implica P(S(n)) (S)

allora per ogni n vale P(n)

Se vale P(1)

e se, per ogni n, P(n) implica P(n+1)

allora per ogni n vale P(n)

(Un esempio)

P(n) : la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2

Vale P(1) $\quad 1 = 1^2$

Supponiamo valga P(n)…..

(Ci fermiamo. Per sfruttare questa ipotesi dobbiamo sapere chi è l’ennesimo numero dispari)

Chi è l’ n-esimo numero dispari?

1°: 1;   2°: 3;   3°: 5;   4°:7,…

Sembra plausibile che l’ n-esimo numero dispari sia $2n – 1$.

Dimostriamo anche questa proprietà impiegando l’Assioma 5.

Se vale Q(1)

e se, per ogni n, Q(n) implica Q(S(n))

allora per ogni n vale Q(n)

Q(n): “2n – 1 è l’ n-esimo numero dispari”.

Vale Q(1). Infatti $2\times1 - 1$, cioè 1, è il 1° numero dispari.

Supponiamo Q(n), cioè che 2n – 1 sia l’ n-esimo numero dispari.

Allora l’ (n+1)-esimo numero dispari è (2n – 1) + 2,

cioè 2(n+1) – 1. Quindi vale Q(n+1).

Per l’Assioma 5, Q(n) vale per tutti i numeri.

Se vale P(1)

e se, per ogni n, P(n) implica P(S(n))

allora per ogni n vale P(n)

(Torniamo alla dimostrazione precedentemente interrotta)

P(n) : la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2

Vale P(1) $1 = 1^2$

Supponiamo valga P(n), cioè che $1 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(Ora che sappiamo chi è l'ennesimo numero dispari, possiamo sviluppare l'ipotesi)

Allora la somma dei primi n+1 numeri dispari è $n^2 + (2n + 1)$, cioè $(n+1)^2$. Quindi vale P(n+1), cioè P(S(n)).

Per l'Assioma 5, P(n) vale per tutti i numeri.

(Attenzione: il nome “induzione”, associato ad un assioma matematico e quindi impiegato per dedurre, è parzialmente in contrasto con il senso comunemente attribuito al termine).

Il ragionamento, nel senso in cui il termine è sinonimo di inferenza, si dice comunemente che è di due generi: il ragionamento che va dai particolari al generale e il ragionamento che va dal generale ai particolari; il primo si chiama induzione, il secondo argomentazione o sillogismo [deduzione]; (...) più propriamente, si ha induzione quando dall'osservazione di un numero di casi individuali saliamo ad una proposizione generale o quando, combinando più proposizioni generali, concludiamo ad un'altra proposizione ancor più generale; (...) si ha invece argomentazione quando da una proposizione generale combinata con altre proposizioni inferiamo una proposizione dello stesso grado di generalità, o una proposizione meno generale, o anche una proposizione individuale.

J.S.Mill, *System of Logic, 1843*