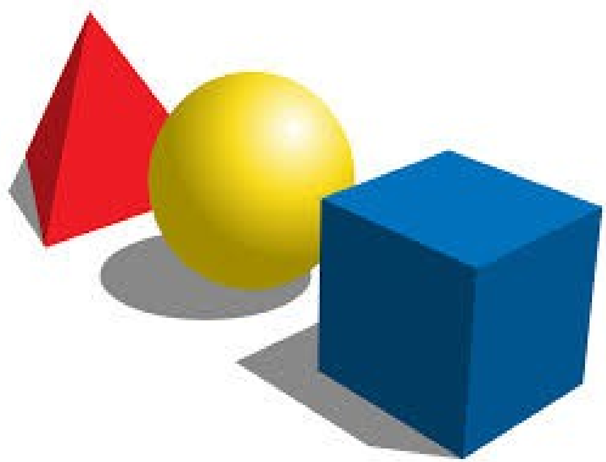
Quale matematica per la scuola primaria?



Siracusa, "I matematici risolvono problemi",

2 ottobre 2016

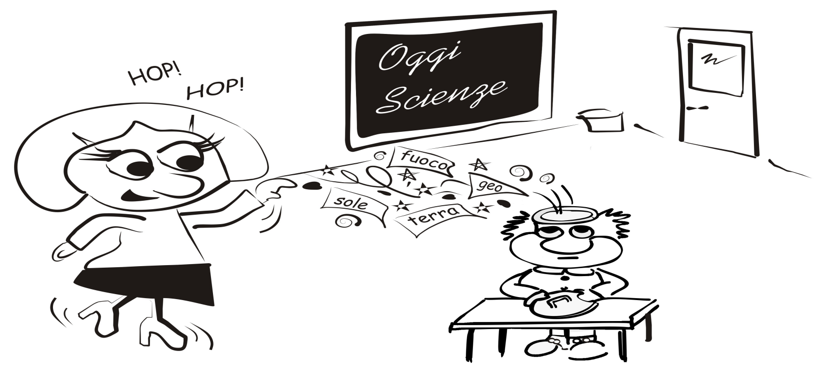
Il costruttivismo

- Senza una costruzione del sapere in prima persona non c'è autentico apprendimento: il bambino deve imparare per sé, non per far piacere all'insegnante o superare la verifica

- Abbandono del modello trasmissivo: i bambini non sono “sacchi vuoti” da riempire!

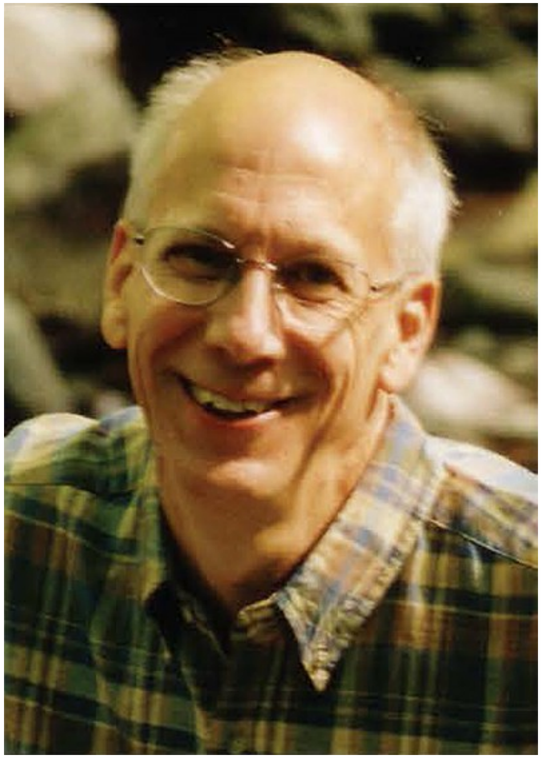
- I conflitti cognitivi sono fondamentali: portano a ristrutturare la conoscenza

- L'errore ha una funzione positiva, come fase intermedia e provvisoria di questo processo di ristrutturazione



John Van de Walle

Laureato in matematica presso l'Università di St. Louis, ha insegnato nella scuola primaria e poi, per oltre trent'anni, alla Virginia Commonwealth University e in corsi di formazione per insegnanti in servizio. Autore di numerosi volumi sull'educazione matematica, è stato membro del consiglio direttivo della NCTM. E' morto nel 2006.



Quali fattori agevolano una costruzione efficace del sapere?

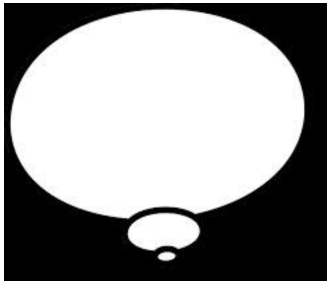
Il pensiero riflessivo

L’interazione con i compagni

L’uso di modelli e strumenti per l’apprendimento (materiali strutturati, software, disegni, linguaggio verbale)

Il pensiero riflessivo

- Ogni apprendimento ha una componente individuale; è importante che i bambini riflettano sulle idee da imparare.
- E' un processo attivo: per inquadrare i concetti in una rete di idee interconnesse, i bambini devono essere impegnati attraverso problemi che li spingono a usare le idee in loro possesso e a crearne di nuove strada facendo.



Una “comunità matematica di discenti”

1. Le idee sono importanti ed è importante sapere che si può imparare dalle idee degli altri. La condivisione è fondamentale
2. Ogni allievo deve rispettare le idee altrui, cercando di capirle e apprezzarle
3. Non c’è niente di male nel fare errori. Gli errori sono opportunità di crescita. Ogni allievo deve sapere che le sue idee, giuste o sbagliate, saranno rispettate in egual modo.
4. Non c'è più bisogno del verdetto dell'insegnante per giudicare la correttezza del risultato: è la matematica stessa a dare la risposta

Uso dei modelli

I modelli sono “giochi per pensare”, stimolano esplorazione e ragionamento. E’ difficile assimilare relazioni astratte solo a parole.

Permettere agli alunni di scegliere liberamente tra più modelli disponibili

Incoraggiare l’uso di un modello quando si ritiene utile per un allievo in difficoltà

I modelli possono essere interpretati in modo tradizionale, dicendo come usarli per ricavare le risposte giuste. Ma così si manda il cervello in ferie.

La “lezione in tre parti”

PRIMA

PREPARARE IL TERRENO

CHIARIRE I RISULTATI ATTESI

DURANTE

LASCIAR LAVORARE GLI ALLIEVI

ASCOLTARE

DARE SUGGERIMENTI

OSSERVARE E VALUTARE

DOPO

DISCUTERE

ACCETTARE LE SOLUZIONI SENZA GIUDICARLE

LASCIAR GIUSTIFICARE LE STRATEGIE USATE E I RISULTATI OTTENUTI

Insegnare per problemi: l'approccio centrato sull'allievo

- Un problema inizia là dove il bambino si trova: deve essere impegnativo e il suo contenuto dovrebbe collocarsi nella zona di sviluppo prossimale.

- Gli aspetti di "sfida" del problema devono essere relativi alla sua componente matematica. Il contesto o le componenti narrative non dovrebbero mettere in ombra la matematica da apprendere.

- E' bene richiedere giustificazioni e spiegazioni delle risposte date. La spiegazione del metodo usato e della risposta data fa parte integrante della soluzione del problema.

Perché insegnare per problemi?

1. Si focalizza l’attenzione sulle idee e sulla loro comprensione
2. Si rafforza l’autostima dei bambini
3. Si ottengono dati per la valutazione
4. Si tengono gli studenti impegnati, riducendo i problemi di disciplina
5. Si sviluppano le 5 abilità matematiche fondamentali (problem solving, ragionamento, comunicazione, capacità di collegamento, capacità di rappresentazione)
6. È divertente!!! (sia per il bambino, sia per l’insegnante)

Insegnare per problemi: FAQ

d. C’è qualcosa che posso dire senza aspettare che i bambini lo scoprano da soli?

r. Certo, purché il problema non venga risolto e rimanga per il bambino l’esigenza di riflettere e sviluppare propri metodi di soluzione

d. Come faccio ad insegnar loro tutte le abilità fondamentali?

r. I dati della ricerca dicono che questo approccio è addirittura più efficace di quello tradizionale

d. Perché gli studenti devono “spiegare” e l’insegnante no?

r. Perché le spiegazioni dell’insegnante vengono accettate per autorità, mentre quelle dei compagni vengono messe in discussione

Insegnare per problemi: FAQ

d. E’ un approccio che richiede tempo: come faccio a finire il programma?

r. L’approccio tradizionale spreca molto tempo a ripetere concetti non capiti; questo tempo si riduce nell’insegnamento per problemi

d. Devo insegnare per problemi ogni giorno?

r. Sì, le mescolanze sono pericolose

d. Che ne è degli esercizi e del far pratica?

r. Sono importanti quando le idee sono già state sviluppate e i bambini hanno un ampio bagaglio di strategie, ma non la necessaria velocità e accuratezza

d. Come usare questo approccio se il sussidiario è tradizionale?

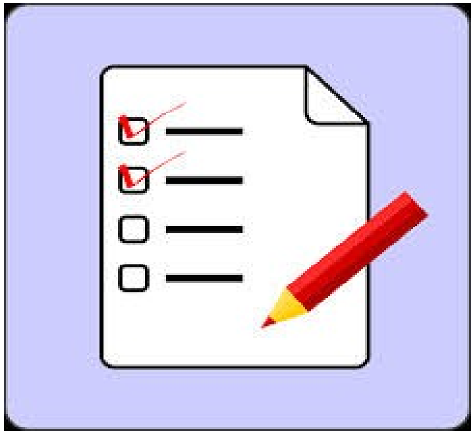
r. Travasarne i contenuti in unità didattiche o compiti basati su problemi

La valutazione

- La valutazione dovrebbe essere parte integrante dell’insegnamento, non separata da esso
- Dovrebbe valorizzare ciò che il bambino sa, non ciò che non sa
- Il materiale per la valutazione può venire da molte fonti (rubriche, colloqui diagnostici, test tradizionali)
- Dare la precedenza all’acquisizione delle idee fondamentali

Rischi dei test a risposta multipla

- Ipersemplificazione del pensiero
- Distorsione del curricolo
- Inflazione dei punteggi
- Orientamento alla prestazione



Relazioni tra i numeri 1-10

- Relazioni spaziali ("subitizzare" piccole quantità senza contarle)
- "Uno o due in più, uno o due in meno" (7 è uno in più di 6, 2 in meno di 9)
- Relazioni parte-tutto (7 è fatto da 3 e 4 o anche da 2 e 5)
- Numeri-ancora (5 e 10)

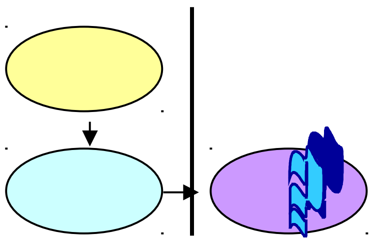
Sviluppare il senso delle operazioni

- Uso di problemi contestuali (o “realistic problems”)
- Attenzione alle parole chiave!
- Uso dei modelli
- Analisi dei problemi e spiegazioni

Problemi di unione

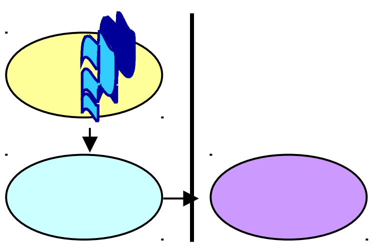
- Il cambio viene aggiunto alla q. iniziale e forma il tutto (la q. finale)

INCOGNITA: Q. FINALE



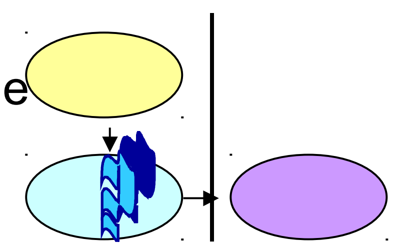
Sandra ha 8 palline. Giorgio gliene dà altre 4. Quante palline ha Sandra in tutto?

INCOGNITA: CAMBIO



Sandra ha 8 palline. Giorgio gliene dà alcune in più. Adesso Sandra ne ha 12. Quante palline le ha dato Giorgio?

INCOGNITA: Q. INIZIALE



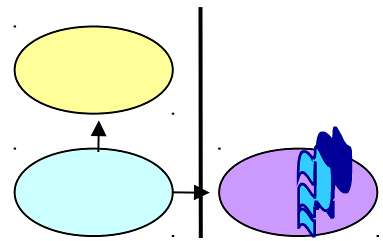
Sandra ha alcune palline. Giorgio gliene dà 4. Adesso Sandra ne ha 12. Quante palline aveva Sandra all'inizio?

Problemi di separazione

- Il cambio viene tolto dal tutto (la q. iniziale) e forma la q. finale

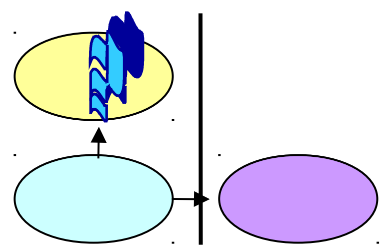
INCOGNITA: Q. FINALE

Sandra ha 12 palline. Ne dà 4 a Giorgio. Quante palline ha Sandra adesso?



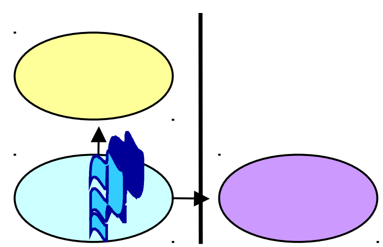
INCOGNITA: CAMBIO

Sandra ha 12 palline. Ne dà alcune a Giorgio. Adesso ne ha 8. Quante ne ha date a Giorgio?



INCOGNITA: Q. INIZIALE

Sandra ha alcune palline. Ne dà 4 a Giorgio. Adesso ne ha 8. Quante palline aveva Sandra all’inizio?

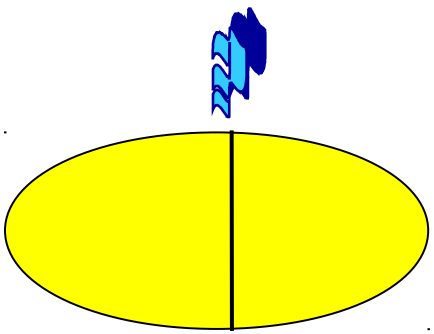


Problemi parte-tutto

- Due parti vengono combinate (fisicamente o mentalmente) in un tutto

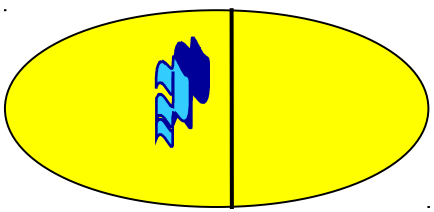
INCOGNITA: TUTTO +

Giorgio ha 4 Euro e Sandra 8 Euro. Mettono insieme i loro risparmi in un porcellino. Quanti Euro hanno messo nel porcellino?



INCOGNITA: PARTE −

Giorgio e Sandra mettono insieme i loro risparmi, 12 Euro, in un porcellino. Giorgio ci ha messo 4 Euro. Quanti Euro ci ha messo Sandra?

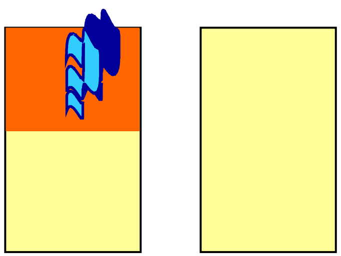


Problemi di confronto

- Due insiemi, uno più grande e uno più piccolo, vengono confrontati. La terza quantità è la differenza tra i due.

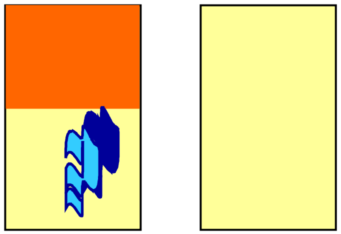
INCOGNITA: DIFFERENZA

Sandra ha 12 palline e Giorgio ne ha 8. Quante palline ha Sandra in più di Giorgio?



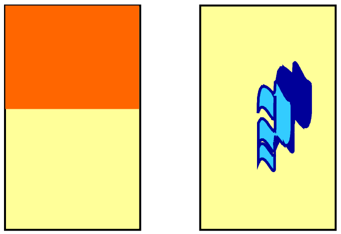
INCOGNITA: INSIEME PICCOLO

Sandra ha 4 palline in più di Giorgio. Sandra ne ha 12. Quante ne ha Giorgio?



INCOGNITA: INSIEME GRANDE

Sandra ha 4 palline in più di Giorgio. Giorgio ne ha 8. Quante ne ha Sandra?



Problemi di gruppi uguali

- Vi è un certo numero di gruppi ciascuno dei quali contiene un'uguale quantità di oggetti.

INCOGNITA: PRODOTTO (MOLTIPLICAZIONE)

Marco ha 4 sacchetti di mele. In ogni sacchetto ci sono 6 mele. Quante mele ha Marco in tutto?

INCOGNITA: QUANTITA' DI OGGETTI (DIVISIONE DI PARTIZIONE)

Marco ha 24 mele da distribuire in parti uguali ai suoi 4 amici. Quante mele riceverà ogni amico?

INCOGNITA: NUMERO DEI GRUPPI (DIVISIONE DI CONTENENZA)

Marco vuole mettere le sue 24 mele in cassette da 6 mele ciascuna. Quante cassette userà Marco?

Problemi di confronto moltiplicativo

- Vi è un insieme che consiste di più copie di un altro (l'insieme di riferimento), a sua volta formato da un certo numero di oggetti.

INCOGNITA: PRODOTTO (MOLTIPLICAZIONE)

Giulia ha 6 caramelle. Marco ha 4 volte le caramelle di Giulia. Quante caramelle ha Marco?

INCOGNITA: QUANTITA' DI OGGETTI NELL'INSIEME DI RIFERIMENTO (DIVISIONE DI PARTIZIONE)

Marco ha 24 caramelle. Marco ha 4 volte le caramelle di Giulia. Quante caramelle ha Giulia?

INCOGNITA: NUMERO DELLE COPIE (DIVISIONE DI CONTENENZA)

Marco ha 24 caramelle, Giulia 6. Quante volte le caramelle di Giulia ha Marco?

Metodi per lo sviluppo di strategie efficaci

1. Usare problemi mirati allo sviluppo di una determinata strategia
2. Progettare una lezione incentrata su una serie di fatti per cui una determinata strategia è adatta
3. Porre attenzione alla scelta delle strategie
4. Gestire la socializzazione delle strategie (accertarsi che i compagni le capiscano, scrivere le strategie alla lavagna, fare "cartellone delle strategie")
5. Individualizzare: bambini diversi possono arrivare alla soluzione in modi diversi

Gli algoritmi tradizionali…

…Servivano a fare a mano calcoli lunghi e complessi

La tecnologia odierna ha reso superflui questi metodi

Vi sono strategie alternative di calcolo che:

- Sono più semplici e veloci;
- Spesso possono essere eseguite a mente;
- Contribuiscono alla costruzione del senso del numero nell'allievo

Esempio

"Maria ha un album da 114 figurine. Per ora ne ha raccolte 89. Quante figurine le mancano per completare l'album?"

1) 89 + 11 fa 100. 11 + 14 fa 25.
2) Tolgo 14 e poi tolgo altri 11, in tutto 25
3) 89, 99, 109 e sono 20. 110, 111, 112, 113, 114 (conta sulle dita) e sono 25.

Strategie inventate *vs* algoritmi tradizionali

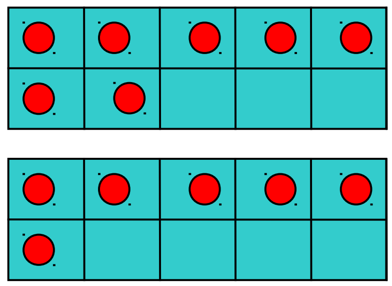
- Le strategie inventate sono orientate al numero, gli algoritmi tradizionali orientati alla cifra ("disinsegnano" il valore posizionale)
- Le strategie inventate partono da sinistra, gli algoritmi tradizionali da destra
- Le strategie inventate sono flessibili, gli algoritmi tradizionali sono rigidi

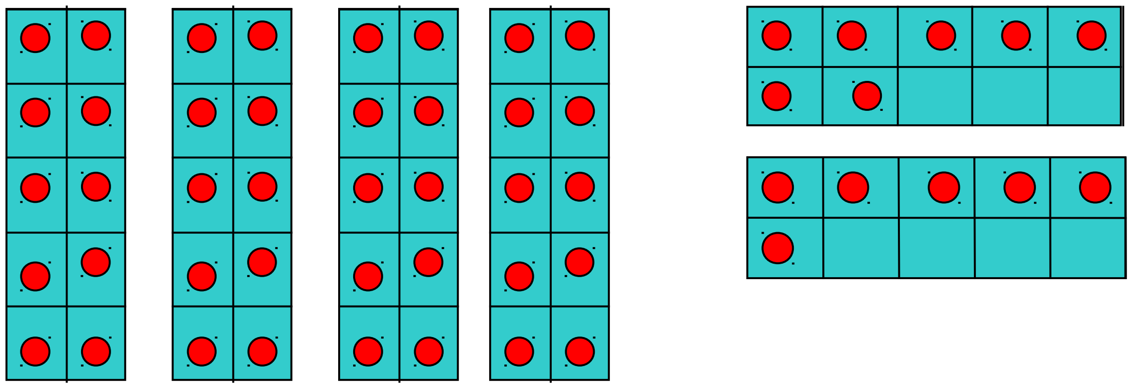
Benefici delle strategie inventate

- Facilitano l’apprendimento della numerazione posizionale in base 10
- Riducono la probabilità di errore
- Riducono la necessità di ripetere i concetti
- Forniscono le basi per il calcolo mentale e le stime
- Sono molto più veloci
- Danno vantaggi nei problemi, e non danno svantaggi nei test standardizzati

Addizione: primo addendo a due cifre, secondo addendo a una cifra

- "Tommaso è a pagina 47 del suo libro. Legge altre 6 pagine. Quante pagine ha letto in tutto?"





Addizione: addendi a due cifre

- Aggiungo le decine, aggiungo le unità, poi metto insieme

  46 + 38: 40 + 30 fa 70, 6 + 8 fa 14, 70 + 14 fa 84

$$\begin{array}{r} 46\ + \\ 38 \\ \hline 70 \\ 14 \\ \hline 84 \end{array}$$

- Aggiungo le decine e poi aggiungo le unità

  46 + 38: 46 + 30 fa 76. Devo aggiungere 8. 76 + 4 fa 80, più altri 4 fa 84

$$46 + 38 \longrightarrow 76 + 8 \longrightarrow 80,\ 84$$

Addizione: addendi a due cifre

- Arrotondo alla decina

  46 + 38: prendo 2 da 46 e li aggiungo al 38 per fare 40. Ora ho 44 + 40 = 84

- Uso un numero "simpatico" e compenso

  46 + 38: 46 + 40 fa 86. In questo modo ne ho 2 di troppo, quindi fa 84.

2

$\cancel{4}6 + 3\cancel{8}$

44 + 40

84

46 + 38

$\longrightarrow$

46 + 40

$\longrightarrow$

86 – 2

=84

Sottrazione “counting up”: operandi a due cifre

- Aggiungo decine per avvicinarmi al minuendo, poi unità

  73 – 46: 46 + 20 fa 66 (+ 30 sarebbe troppo). Più altri 4 fa 70, più altri 3 fra 73. Quindi: 20 più altri 7 cioè 27.

46
20
66
4
70
3
73

- Aggiungo decine fino a superare il minuendo, poi torno indietro

  73 – 46: 46 + 30 fa 76. Ma 30 sono 3 di troppo, quindi fa 27.

46 + 30
→
76 – 3
→
73

30 – 3 = 27

Sottrazione “take away”: operandi a due cifre

- Sottraggo decine in più, poi riaggiungo

  73 – 46: 73 – 50 → 23 + 4 → 27

- Aggiungo al minuendo, se necessario

  73 – 46 → 76 – 46 → 30 – 3 → 27

Sottrazione “take away”: operandi a due cifre

- Sottraggo decine da decine, poi tolgo le unità

  73 – 46: 70 - 40 fa 30. Ne tolgo 6 e fa 24. Rimetto i 3 che avevo tolto: 27.

  $70 - 40 \longrightarrow 30 - 6 \longrightarrow 24 + 3 = 27$

- Sottraggo le decine, poi le unità

  73 – 46: 73 - 40 fa 33. Ne devo togliere 6: meno 3 fa 30, meno altri 3 fa 27.

  $73 - 40 \longrightarrow 33 - 3 \longrightarrow 30 - 3 = 27$

Errori nell'addizione in colonna

Errori nell'addizione in colonna (Fuson, 1990). Riporto non eseguito (a); riporto eseguito ma non calcolato (b); riporto eseguito sempre sulla colonna più a sinistra (c); allineamento sbagliato nella versione estesa dell'algoritmo (d); cifre usate più volte o ignorate quando gli addendi hanno un numero diverso di cifre (e, f).

(a)

$$\begin{array}{cccl} 5 & 6 & 8 & + \\ 7 & 7 & 8 & = \\ \hline 12 & 13 & 16 & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccl} 5 & 6 & 8 & + \\ 7 & 7 & 8 & = \\ \hline 2 & 3 & 6 & \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{cccl} 1 & 6 & 8 & + \\ 1 & 5 & 6 & = \\ \hline 4 & 1 & 4 & \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{ccl} 8 & 7 & + \\ \underline{3} & \underline{9} & = \\ \hline 1 & 6 & + \\ 1 & 1 & = \\ \hline 2 & 7 & \end{array}$$

(e)

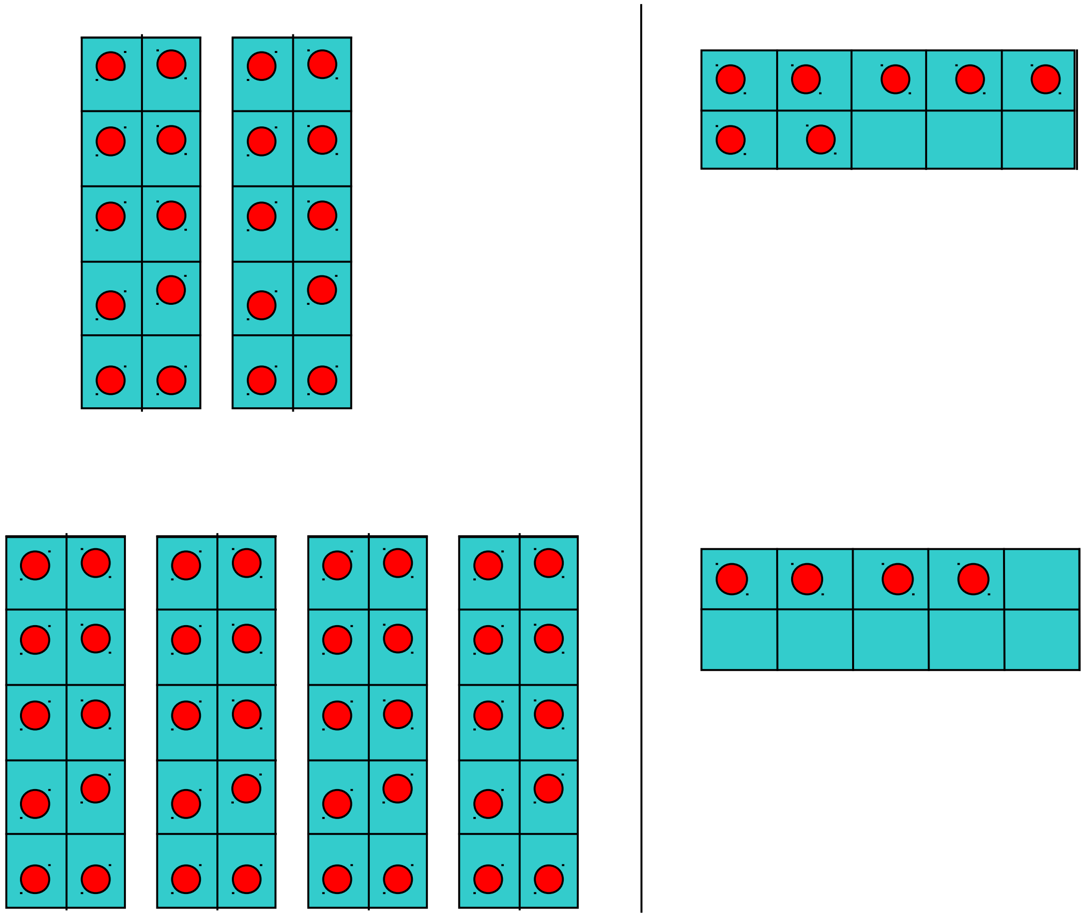
$$\begin{array}{ccl} 6 & 3 & + \\ & 2 & = \\ \hline 8 & 5 & \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ccl} 6 & 3 & + \\ & 2 & = \\ \hline & 5 & \end{array}$$

L’algoritmo tradizionale per l’addizione (1)

Iniziare con i modelli

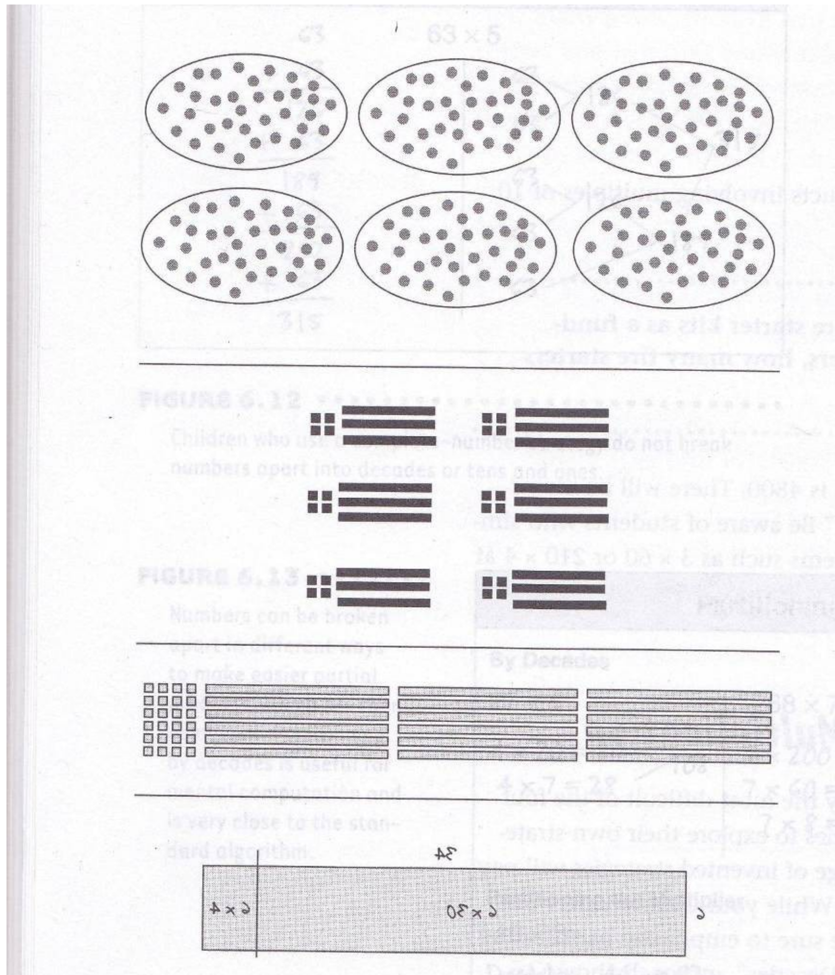


L’algoritmo tradizionale per l’addizione (2)

Registrare ogni passo:

```
358 +
276
-----
500
120
 14
-----
634
```

Moltiplicazione: rappresentazione dei fattori



Moltiplicazione: moltiplicatore a una cifra

- Strategie col numero completo
- 63 x 5 = 63 + 63 + 63 + 63 + 63 (si usano poi strategie per l’addizione a più cifre)

- Strategie di suddivisione
- 1) Per decine o centinaia: 27 x 4 = (20 x 4) + (7 x 4)
- 268 x 7 = (200 x 7) + (60 x 7) + (8 x 7)
- 2) Suddividere il moltiplicatore: 46 x 3 = due volte 46 (92) + 46 = 138
- 3) Altre suddivisioni: 27 x 8. 25 x 4 fa 100, quindi 25 x 8 fa 200. 2 x 8 fa 16, quindi ottengo 216.

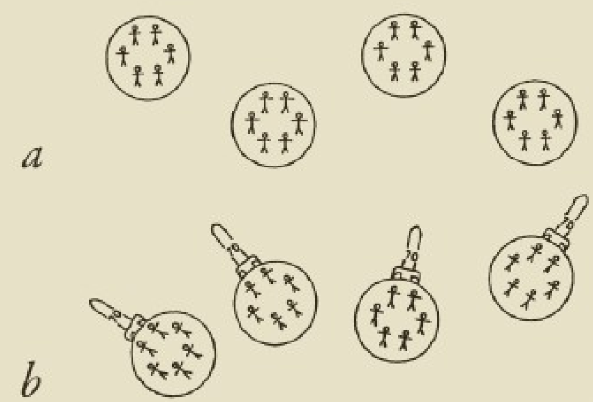
ATTIVITÀ 6.3 ✂

Obiettivo: Far scoprire strategie di scomposizione per la moltiplicazione a più cifre.

Materiali: Nessuno (oppure materiali strutturati per il modellamento diretto, se la classe non ha mai lavorato su questo tipo di problema).

Svolgimento: L'insegnante racconta la seguente storia: "C'erano quattro pianeti, e ognuno di questi pianeti aveva sei astronauti che l'esploravano", e disegna alla lavagna la figura riprodotta in FIG. 6.8a. Poi prosegue: "A un certo punto su ogni pianeta atterra un'astronave con altri settanta astronauti", e disegna alla lavagna la FIG. 6.8b. "Quanti astronauti c'erano su ogni pianeta? E quanti astronauti c'erano in tutto?". I bambini risolvono il problema; alla fine, l'insegnante coordina una discussione per far condividere le strategie usate e istituzionalizza la conoscenza costruita facendo scrivere il fatto aritmetico 76 × 4 = 304 sul quaderno o alla lavagna.

FIGURA 6.8



Fonte: Lampert (1986).

L'algoritmo tradizionale per la moltiplicazione: difficoltà

- I fattori vanno correttamente incolonnati
- Nell'eseguire le moltiplicazioni in croce, il moltiplicando è la corrispondente cifra del moltiplicatore del prodotto principale
- Quando una moltiplicazione parziale dà un prodotto a due cifre, occorre separare la multiunità più bassa dalla successiva (riporto)
- Il riporto va aggiunto alla moltiplicazione in croce successiva (si cambia operazione a metà del passaggio!)
- I prodotti in croce vanno scritti in parte a fianco di cifre già scritte, in parte sotto, incolonnandoli correttamente

Errori nella moltiplicazione in colonna

TABELLA 6.2

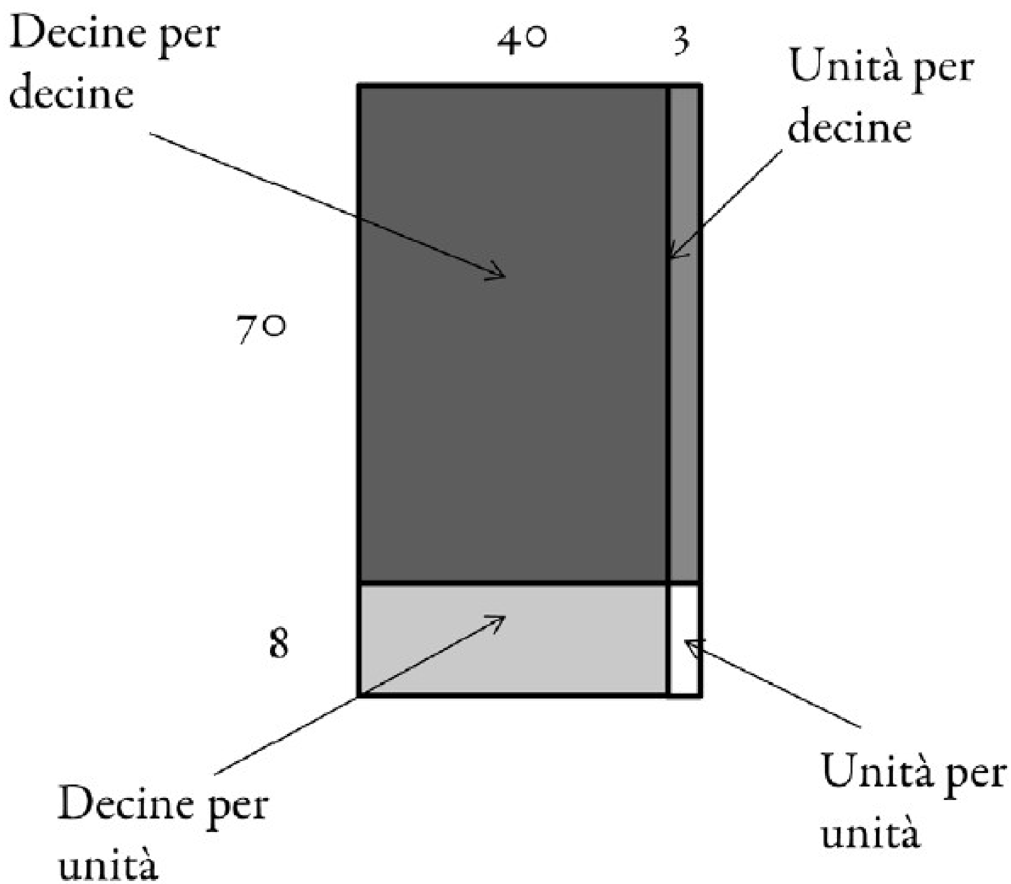
Errori nella moltiplicazione in colonna (Lampert, 1986). Nel prodotto unità per decine, si aggiunge la cifra del moltiplicatore anziché quella del riporto (a); si scrivono i due prodotti uno a fianco all'altro sulla stessa riga, senza eseguire il riporto (b); si procede da sinistra a destra, riportando la cifra delle unità nella colonna a destra, anziché quella delle decine nella colonna a sinistra (c).

(a)	(b)	(c)
$\begin{array}{r} 86\times \\ 3= \\ \hline 278 \end{array}$	$\begin{array}{r} 86\times \\ 3= \\ \hline 2418 \end{array}$	$\begin{array}{r} 86\times \\ 3= \\ \hline 222 \end{array}$

L’algoritmo tradizionale per la moltiplicazione

1. Usare il modello dell’area
2. Utilizzare uno schema di registrazione con i prodotti parziali, anziché col riporto
3. Passare da moltiplicandi a 2 cifre a moltiplicandi a 3 cifre, mantenendo il moltiplicatore a 1 cifra

Moltiplicazione: moltiplicatore a due cifre



La “moltiplicazione accessibile” di Fuson

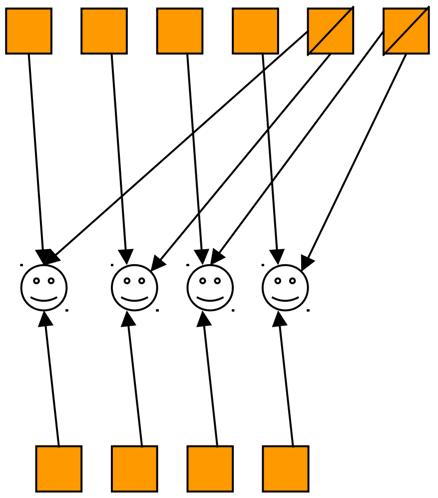
$$
\begin{array}{rcl}
78 & = & 70 + 8 \\
\underline{\times\ 43} & = & \underline{40 + 3} \\
2800 & = & 40 \times 70 \\
320 & = & 40 \times 8 \\
210 & = & 3 \times 70 \\
24 & = & 3 \times 8 \\
\hline
3354 & &
\end{array}
$$

Divisione: strategia del fattore mancante

Supponiamo di voler calcolare 3129: 46. Debbo cercare di capire quante volte il 46 sta nel 3129 trovando quante copie di un insieme di 46 oggetti posso togliere via da un insieme di 3129. A questo traguardo si arriva per approssimazioni successive. Poiché è facile vedere che $46 \times 100 = 4600$, se ne conclude che $46 \times 50 = 2300$. Togliendo via 50 copie del mio insieme da 46 dall'insieme da 3129, rimarranno $3129 - 2300 = 829$ oggetti. Da questi, posso togliere ancora $46 \times 10 = 460$ oggetti, e me ne rimangono 369. Siccome ho già calcolato che $46 \times 50 = 2300$, 46×5 farà 230, quindi togliendo altre 5 copie avremo $369 - 230 = 139$. Usando una strategia del tipo "raddoppia e aggiungi uno", si vede che $46 \times 3 = 138$, per cui posso togliere ancora tre copie, e mi rimarrà un solo oggetto. Il quoziente della divisione sarà dunque $50 + 10 + 5 + 3 = 68$, con resto 1.

Frazioni: ripartire un oggetto in parti uguali

- Il modello iniziale di frazione deriva dalla ripartizione di un'unità (o di *m* unità) in *n* parti uguali
- Per sviluppare questo modello sono utili i problemi-storia
- La strategia inizialmente usata dai bambini è il dimezzamento: quindi iniziare con $n = 2, 4, 8$
- Quando $n = 3, 6$ occorre ricorrere a strategie alternative
- Durante le discussioni successive, introdurre il linguaggio delle parti frazionarie ("un terzo", "un quarto" ecc.), senza simbolismo
- E' sbagliato credere che il problema sia tanto più difficile quanto più cresce il denominatore



Esempi di problemi-storia per introdurre le frazioni

ESEMPIO 7.1

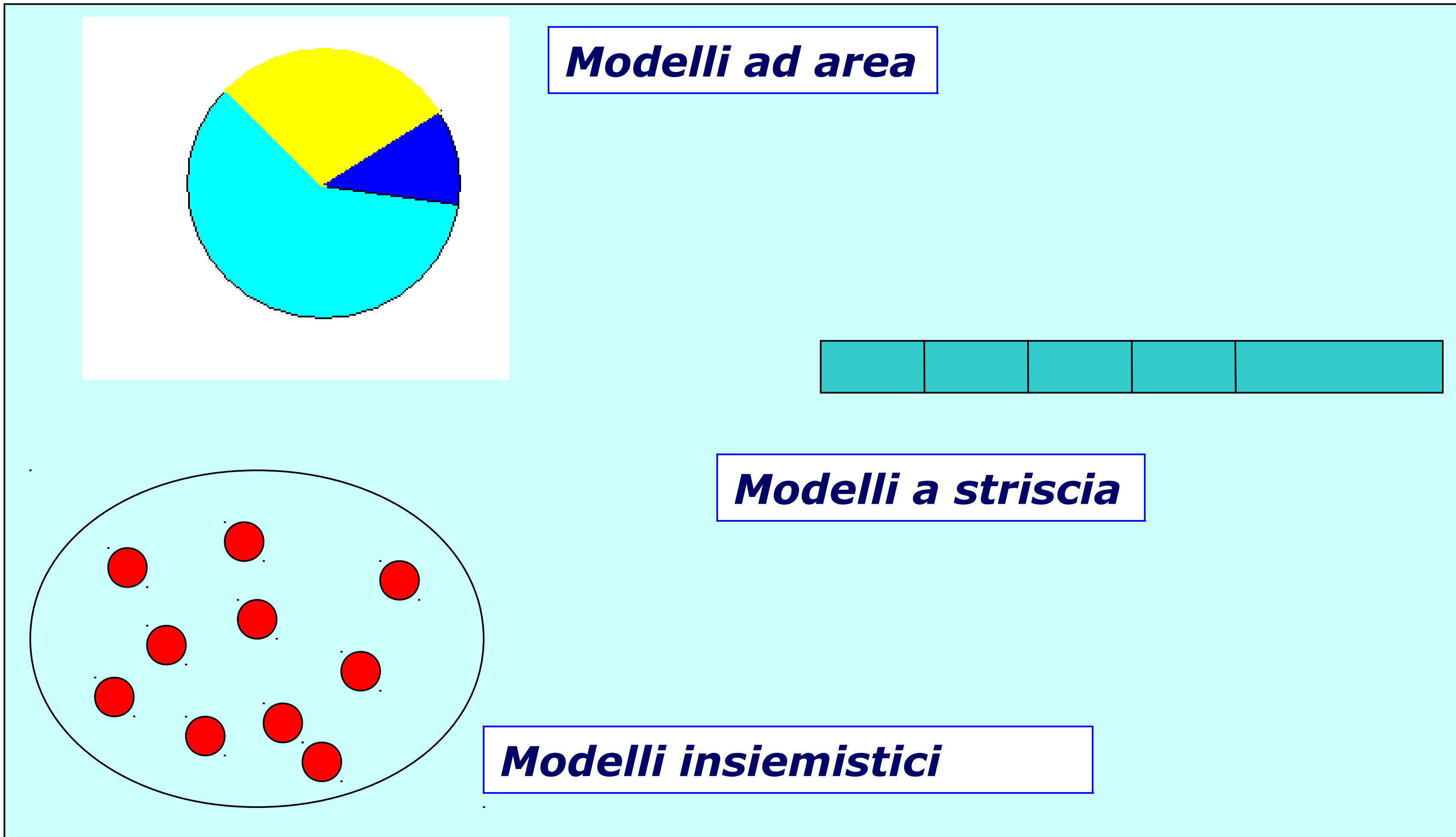
a) 4 bambini devono dividersi 12 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?

b) 4 bambini devono dividersi 10 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?

c) 12 bambini devono dividersi 4 biscotti in modo che a ciascuno tocchi la stessa quantità. Quanti ne avranno a testa?

Fonte: Van de Walle, Lovin (2006).

Modelli per le frazioni



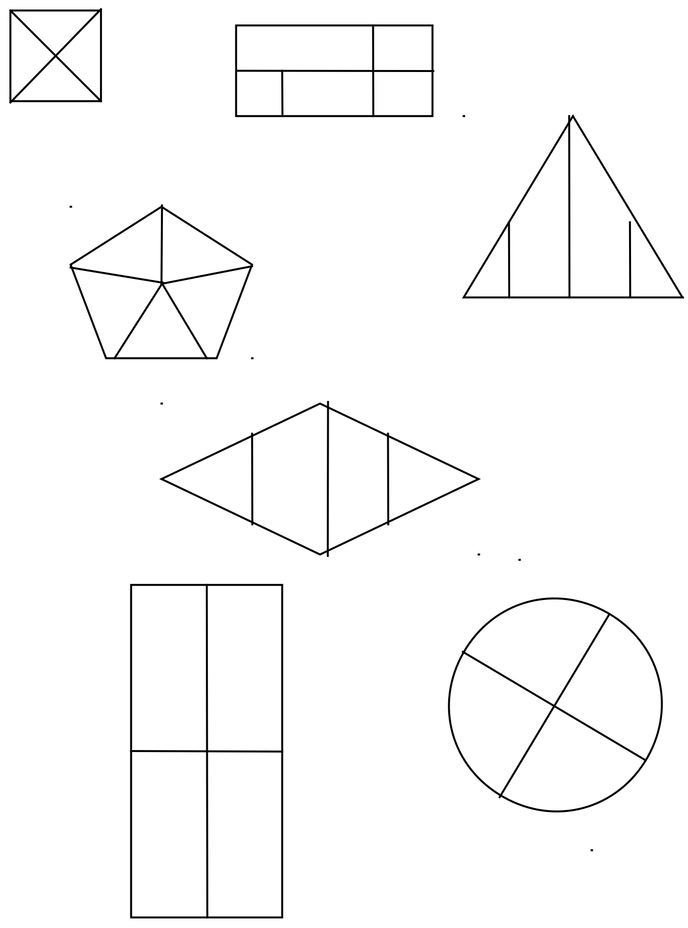
Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

- Saper identificare correttamente parti frazionarie

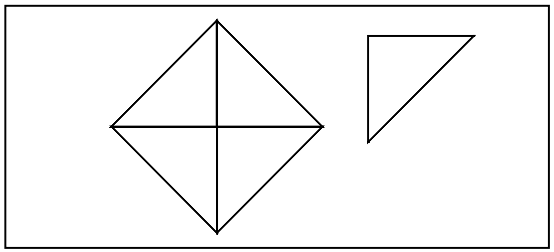
Le parti sono giuste?

- Saper riconoscere il rapporto tra un insieme di parti frazionarie e un intero

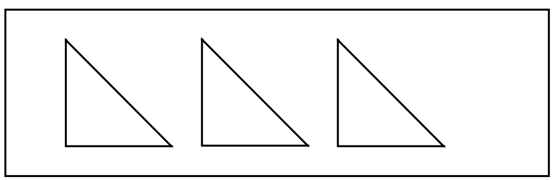
Più o meno di uno?



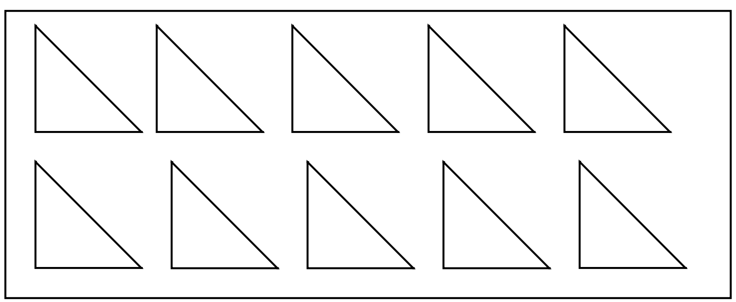
Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione



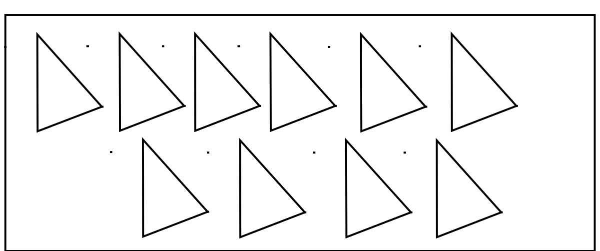
Più o meno di uno?



Quanto manca per fare un intero?



Wow! Dieci quarti! Ne abbiamo abbastanza per fare 2? Arriviamo a 3?



Quanti dodicesimi! E’ come avere dieci quarti? E’ più o meno di cinque quarti?

Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

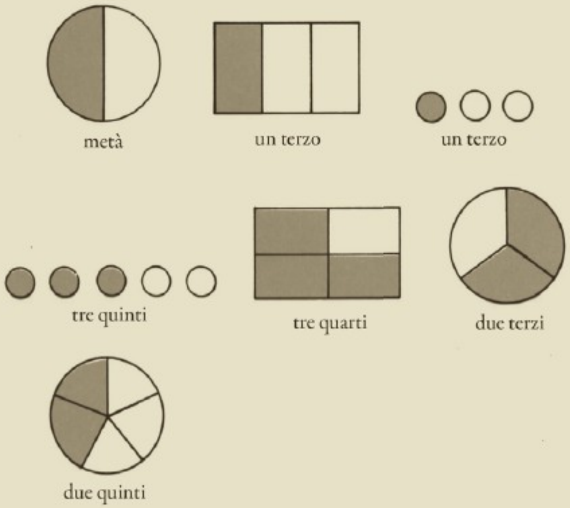
ATTIVITÀ 7.1

Obiettivo: Saper identificare e denominare correttamente parti frazionarie.

Materiali: Una quantità adeguata di materiali manipolativi di tipo diverso.

Svolgimento: L'insegnante pone il seguente problema: "Tania ha ricevuto una torta divisa in cinque fette uguali. Ne ha mangiati due pezzi. Che frazione della torta ha mangiato?". Poi invita i bambini a rappresentare questa situazione-problema con i materiali che preferiscono o con un disegno. Successivamente, chiede loro di denominare le parti frazionarie ombreggiate in ciascuna figura riprodotta in FIG. 7.6.

FIGURA 7.6

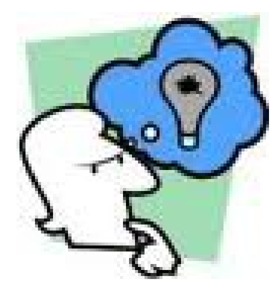


Fonte: Bezuk (1988).

Dalle parti frazionarie ai simboli di frazione

- La notazione standard per le frazioni è una convenzione arbitraria; però non va solo enunciata, bensì esemplificata in dettaglio
- Mostrare vari insiemi di parti frazionarie e scrivere la frazione corrispondente; includere frazioni improprie, apparenti, equivalenti
- Porre la domanda: cosa significa il numero in alto? Cosa significa il numero in basso?

Prova a rispondere tu!



Concetto tradizionale e iterativo di frazione

Concetto tradizionale

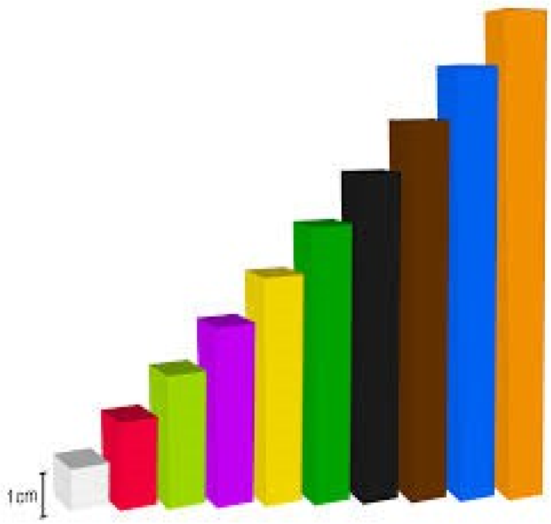
- Il numeratore esprime "quante parti consideriamo"
- Il denominatore esprime "quante parti ci vogliono per fare un intero"
- Corretto, ma fuorviante: a volte tagliamo 1/6 di torta senza tagliare i rimanenti 5/6, ma non ci vogliono 2 parti per fare un intero
- Oppure abbiamo una pizza tagliata in 12 pezzi; due pezzi fanno 1/6, ma non ci vogliono 6 parti per fare un intero

Concetto iterativo

- Il numeratore esprime "quante parti consideriamo"
- Il denominatore esprime "cosa contiamo": se è 4, contiamo "quarti", se è 6, contiamo "sesti", ecc.
- Questa concezione è perfettamente comprensibile alla luce delle attività viste sinora
- Ed è priva degli svantaggi indicati a sinistra…

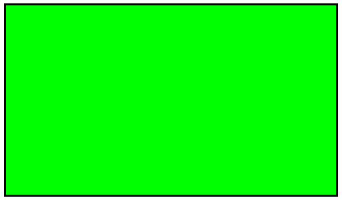
Dalle parti all'intero, e viceversa

- Difetti del modello ad area tradizionale (il "modello della torta", di forma circolare):
- Buono per lavorare sulle frazioni unitarie (frazioni a numeratore 1), carente sugli altri tipi di frazione
- Per lavorare su frazioni più complesse è preferibile usare modelli ad area diversi (rettangolari etc.) oppure modelli a striscia o modelli insiemistici



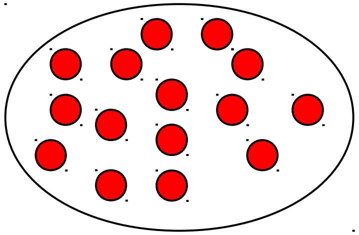
Dalle parti all'intero, e viceversa

- Dati l'intero e la frazione, trova la parte



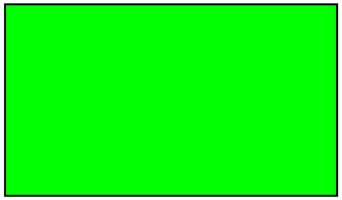
Se il rettangolo è l'intero, trova:
-un quarto
-Due terzi
-Cinque terzi

Se la striscia marrone è l'intero, trova un quarto; se la striscia gialla è l'intero, trova i due terzi



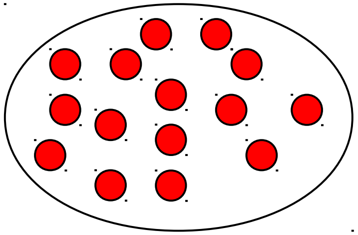
Se 15 gettoni sono l'intero insieme, quanti gettoni sono i tre quinti?

- Date la parte e la frazione, trova l'intero



Se il rettangolo è un terzo (oppure tre quarti, quattro terzi) come sarà l'intero?

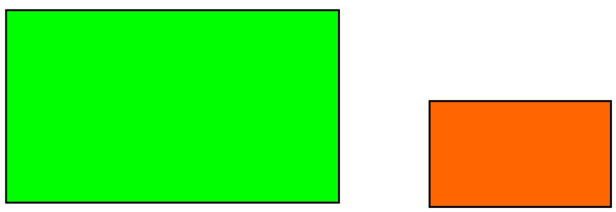
Se la striscia marrone è un terzo, trova l'intero; se la striscia gialla è due terzi, trova l'intero



Se 12 gettoni sono tre quarti dell'intero insieme, quanto è grande tutto l'insieme?

Dalle parti all'intero, e viceversa

- Dati l'intero e la parte, trova la frazione

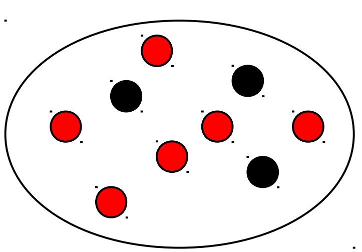


Che frazione del rettangolo verde è rappresentata dal rettangolo rosso?

Se il rettangolo rosso è un intero, che frazione rappresenta il rettangolo verde?

Se la striscia marrone è l'intero, che frazione rappresenta la striscia gialla?

Se la striscia gialla è l'intero, che frazione rappresenta la striscia marrone?



Che frazione di questo insieme rappresentano i gettoni neri?

Il senso del numero per le frazioni: le frazioni-ancora

- I bambini devono acquisire un "sesto senso" intuitivo per le frazioni: capire più o meno quanto è grande una certa frazione, e saper stimare con facilità quale tra due frazioni è più grande
- Le frazioni 0, ½ e 1 sono frazioni-ancora che servono come punti di riferimento. Il bambino impara che 3/20 è piccola, vicina a 0, mentre ¾ sta tra ½ e 1. Gli stessi punti di riferimento aiutano anche con le frazioni improprie

Zero, un mezzo o uno?

Sempre più vicino...

Circa quanto?

Il senso del numero per le frazioni: confronto di frazioni

- Un errore comune dei bambini: 7 è maggiore di 4, quindi i settimi sono più grandi dei quarti
- Un errore comune degli insegnanti: cercare di smontare quest'idea con regole arbitrarie ("Denominatori più grandi significano frazioni più piccole"). Il bambino deve costruire l'idea giusta in prima persona, altrimenti sarà vittima del modello parassita
- La regola usuale per il confronto di frazioni (ridurre a denominatore comune e confrontare i numeratori) è efficace per trovare la risposta giusta, ma non sviluppa il senso del numero per le frazioni
- E' preferibile proporre attività di confronto che elicitino le seguenti quattro strategie. ATTENZIONE: evitare di proporle come "i quattro modi per confrontare le frazioni". Così non sarebbero altro che quattro regole misteriose in più che i bambini imparerebbero a memoria senza affinare il loro senso numerico

Il senso del numero per le frazioni: confronto di frazioni

1. Più parti dello stesso intero. 5/8 è più di 3/8 perché e come avere cinque parti della stessa cosa anziché 3
2. Stesso numero di parti, ma di grandezza diversa. 3/4 è più di 3/7 perché se divido un intero in 7 parti, le parti stesse saranno più piccole che se lo divido in 4 parti
3. Più o meno di metà, più o meno di un intero. 3/7 è meno di 5/8 perché la prima frazione è minore di ½, l'altra maggiore; 5/4 è maggiore di 7/8 perché la prima frazione è maggiore di 1, l'altra minore
4. Distanza da ½ o da 1. Perché 9/10 è maggiore di ¾? Non perché 9 e 10 sono numeri grandi (anche se molti bambini risponderanno così), ma perché ognuna di esse dista dall'intero di una parte frazionaria, e i decimi sono più piccoli dei quarti.

Trasmettere regole o ampliare il senso del numero?

…La seconda che hai detto, naturalmente! Infatti:

- Le regole non aiutano il bambino a capire il significato delle operazioni
- Armati solo di regole, i bambini non sanno valutare se i risultati ottenuti hanno un senso
- Una padronanza apparente delle regole va presto perduta
- La miriade di regole sul calcolo delle frazioni diventa subito un guazzabuglio privo di senso
- Questo approccio alla matematica frustra il bambino

Devo fare il minimo comune multiplo o addizionare i numeri di sotto come nella moltiplicazione?

Quale numero inverto, il primo o il secondo?

Linee guida per il calcolo con le frazioni

Molto può essere lasciato alla scuola media! Molto, però, si può già fare:

1. Cominciare con problemi semplici di tipo contestuale
2. Collegare il significato del calcolo con le frazioni a quello delle operazioni su numeri naturali
3. Valorizzare le stime e i metodi informali per consentire lo sviluppo di strategie inventate
4. Usare modelli

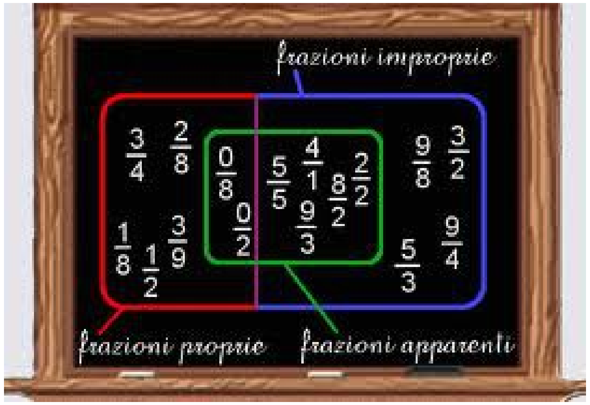
Addizione e sottrazione: approccio informale

ESEMPIO 7.2

a) Giovanni e Luigi hanno lo stesso tipo di auto. Tutti e due partono per la vacanza col serbatoio pieno di benzina, ma vanno in posti diversi. Quando arrivano, Giovanni ha consumato $\frac{5}{6}$ di serbatoio e Luigi metà serbatoio. La benzina che hanno consumato, tutti e due insieme, è più o meno di un serbatoio? Qual è la frazione che la rappresenta?

b) A Sara e Monica piacciono molto le gomme da masticare. Questa settimana, Sara ha mangiato $\frac{2}{5}$ di un pacchetto di gomme, mentre Monica ha mangiato $\frac{4}{3}$ di un pacchetto dello stesso tipo. Insieme, hanno mangiato più o meno di due pacchetti? Qual è la frazione che rappresenta la quantità di gomme che hanno mangiato?

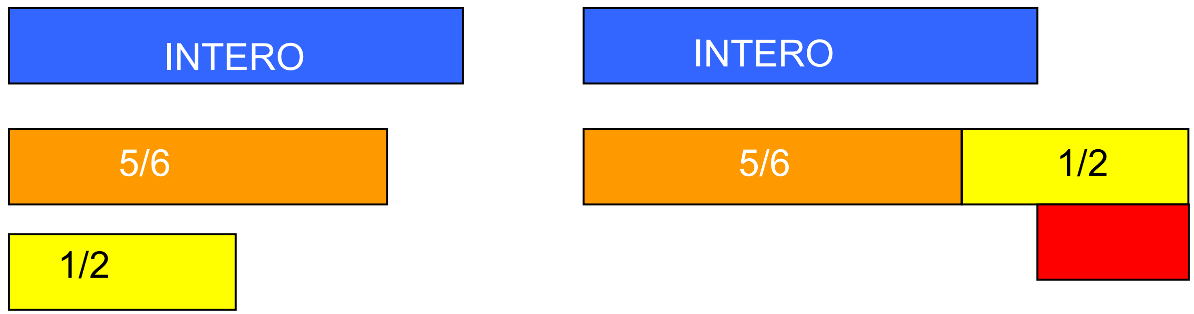
c) Giovanni e Luigi hanno lo stesso tipo di auto. Giovanni ha il serbatoio pieno per $\frac{7}{8}$, mentre Luigi è rimasto a secco. Giovanni, per aiutare Luigi, travasa della benzina dal proprio serbatoio fino a riempire il serbatoio di Luigi per metà. Quanta benzina rimane a Giovanni?



Addizione: approccio informale (1)

Modelli a striscia

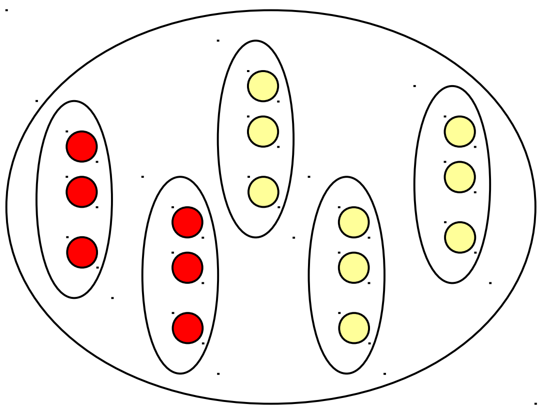
5/6 + 1/2



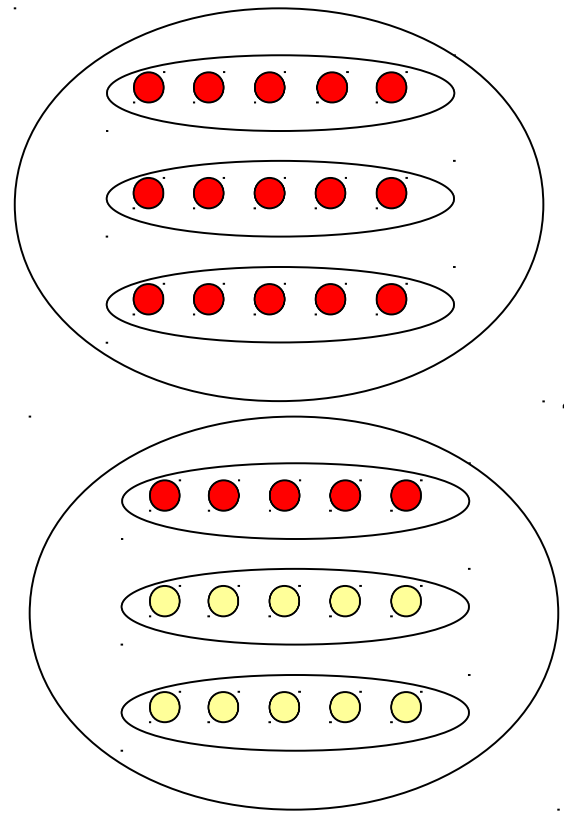
La somma è un intero più una striscia rossa. La striscia rossa è 1/3 dell’intero. Quindi 5/6 + ½ = 1 1/3.

Addizione: approccio informale (2)

Modelli insiemistici



2/5



4/3

2/5 + 4/3: quanto dev’essere grande l’insieme che usiamo per l’intero?

Come minimo, 15 gettoni

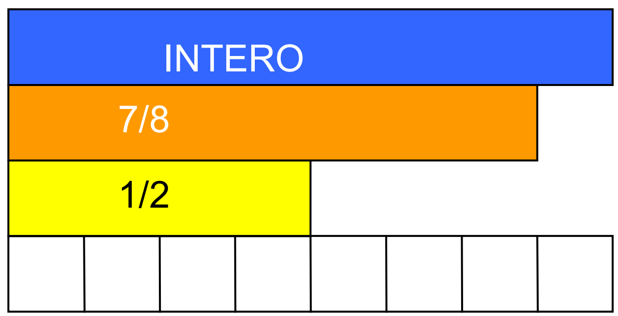
2/5 è 6 gettoni, 4/3 è 20 gettoni. Su un insieme di 15 gettoni, fa 26/15, o anche 1 11/15.

Sottrazione: approccio informale

Modelli a striscia

Trova una striscia che può essere divisa sia in ottavi che in mezzi

7/8 - 1/2



7/8 – ½ è la differenza tra un arancione e un giallo. Corrisponde a tre bianchi, ossia 3/8. Quindi 7/8 – ½ =3/8.

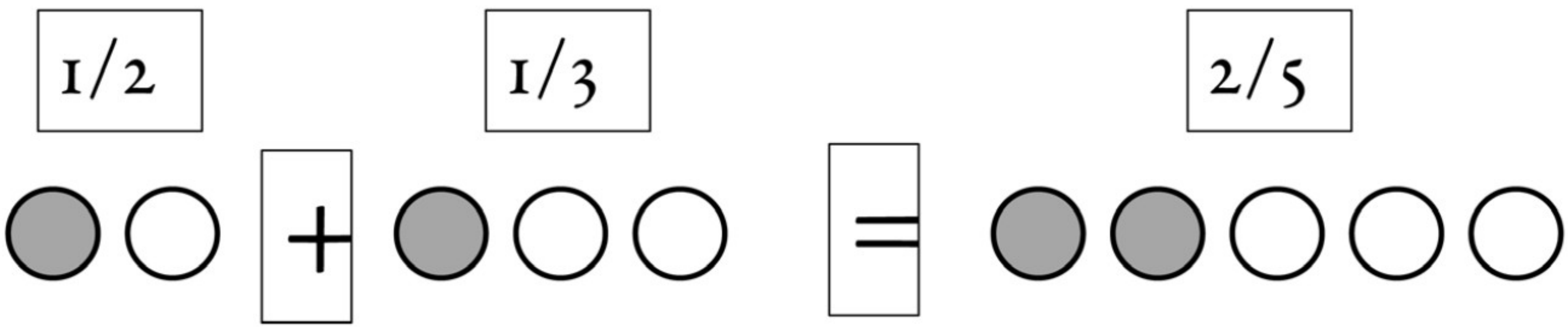
Addizione: il mito del denominatore comune

- “Per sommare o sottrarre frazioni, bisogna prima ridurre a comune denominatore”
- FALSO. Occorrerebbe dire:
- “Per usare l’algoritmo tradizionale per la somma o la sottrazione di frazioni, bisogna prima ridurre a comune denominatore”

- SPESSO STRATEGIE INVENTATE SONO EGUALMENTE EFFICACI

Addizione: il “metodo del mediante”

FIGURA 7.12
Possibile giustificazione della regola “Somma i numeratori e somma i denominatori”



Fonte: Van de Walle, Lovin (2006).

Moltiplicazione: approccio informale (1)

“Michele ha 15 macchinine. 2/3 di queste sono rosse. Quante macchinine rosse ha Michele?”

“Susanna ha 11 biscotti. Vuole dividerli con le sue tre amiche. Quanti biscotti toccheranno a ognuna?”

Trovare una parte frazionaria di un numero intero è come trovare una parte frazionaria di un intero.

PRIMO PROBLEMA: le 15 macch. sono l’intero e ne vogliamo 2/3. Troviamo i terzi dividendo 15 per 3 e poi ne contiamo 2.

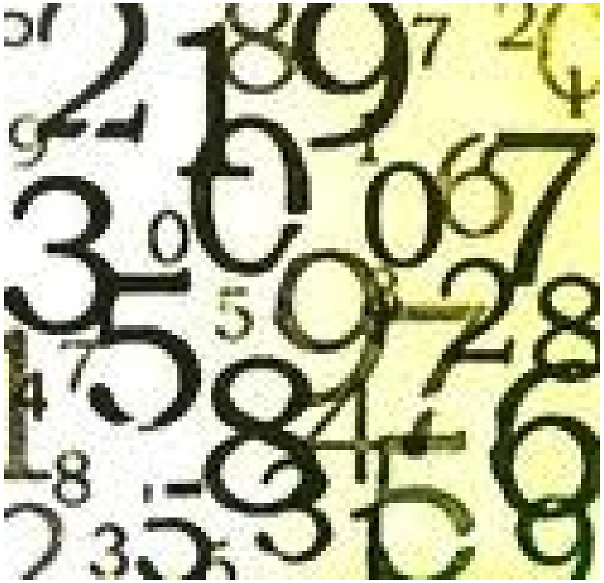
SECONDO PROBLEMA: gli 11 biscotti sono l’intero e ne vogliamo ¼. I biscotti possono essere spezzati, il che rende possibile una soluzione.

Moltiplicazione: approccio informale (2)

"Ti sono rimasti ¾ di una pizza. Se dai a tuo fratello 1/3 dell'avanzo, che parte di una pizza intera toccherà a tuo fratello?"

Le parti frazionarie in questo problema non devono essere ulteriormente suddivise! Si chiede di trovare 1/3 di tre cose.

E' importante lasciare i bambini liberi di risolvere il problema usando le strategie e i modelli che preferiscono, purché giustifichino i loro ragionamenti.



Moltiplicazione: approccio informale (3)

“A Giacomo rimangono da pitturare 2/3 della parete. Dopo pranzo, pittura ¾ di quello che gli rimaneva. Che parte dell’intera parete ha pitturato Giacomo dopo pranzo?”

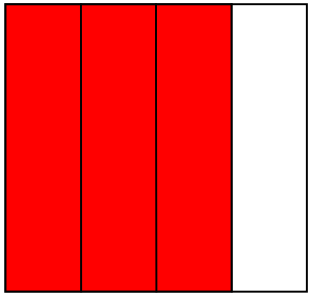
“Il guardiano di uno zoo ha un’enorme bottiglia di una bibita per animali. La scimmia ne beve 4/5, la zebra beve 2/3 del rimanente. Che parte dell’intera bottiglia ha bevuto la zebra?”

Quando i pezzi devono essere suddivisi in parti frazionarie più piccole, i problemi si fanno più impegnativi.

PRIMO PROBLEMA: bisogna trovare tre quarti di due cose (terzi). Se si taglia ciascun terzo a metà, ottengo sesti di intero, e ne conto 3 su 4: quindi ¾ di questa quantità sono 3/6 di intero

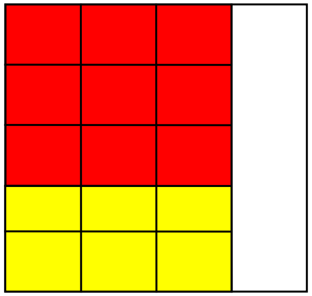
SECONDO PROBLEMA: bisogna trovare due terzi di una cosa (quinto). Se si taglia ciascun quinto in tre parti, ottengo quindicesimi di intero, e ne conto 2 su 3: quindi 2/3 di questa quantità sono 2/15 di intero.

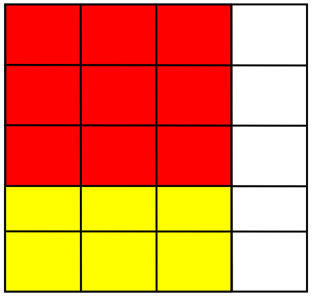
Moltiplicazione: l'algoritmo tradizionale



3/4

3/5





3/5 x ¾: bisogna trovare i 3/5 della regione rossa. Suddividiamola in quinti mediante linee orizzontali e poi suddividiamo in quinti l'intero rettangolo.

Il prodotto dei denominatori ci dice quante parti (quadratini) ci sono nell'intero

Il prodotto dei numeratori ci dice quante parti (quadratini) ci sono nella parte che vogliamo considerare (l'area rossa)

Divisione di frazioni: divisione di partizione

"Elisabetta ha comprato tre chili e 1/3 di pomodori e li ha pagati E. 2.50. Quanto ha pagato al chilo?"

In 3 1/3 ci sono dieci terzi, e il prezzo di 2.50 Euro va distribuito uniformemente su tutti e dieci

Quindi un terzo del prezzo vale 25 centesimi (2.50 : 10)

Ma devo trovare l'intero prezzo, quindi devo moltiplicare per tre: 75 centesimi

Divisione di frazioni: divisione di contenenza

"Giovanni ha 6 litri di coca-cola. Se serve ¾ di litro a ognuno dei suoi ospiti, quanti ospiti può servire?"

Riformulare il problema con numeri interi (6 litri, 2 litri a ciascun ospite)

I bambini capiranno la necessità di fare una divisione

I 6 litri vanno distribuiti uniformemente sui tre quarti di litro: 2 litri per ciascun quarto

Determinare la soluzione a questo problema equivale a determinare quanti insiemi di ¾ sono contenuti in un insieme di 6 oggetti