



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La scuola italiana di geometria algebrica: caratteri distintivi e influenza sull'insegnamento della matematica

Enrico Rogora
rogora@mat.uniroma1.it

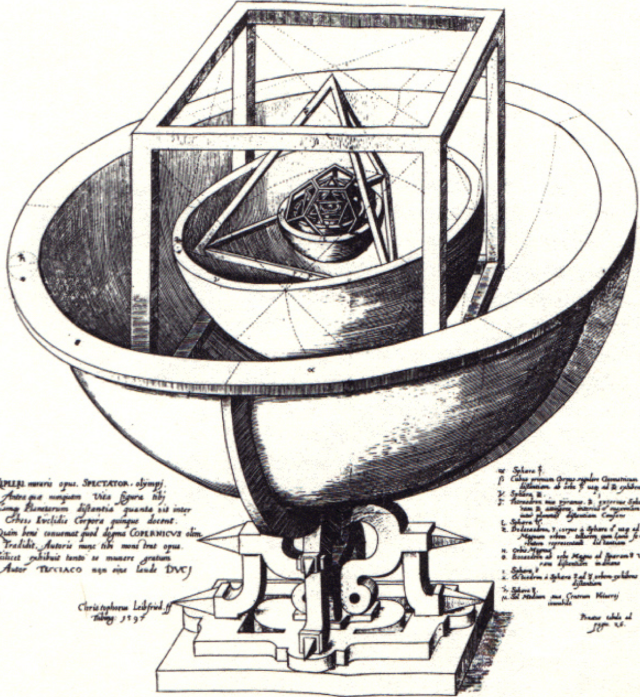
Università di Roma

16 Aprile 2016 - Pisa

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



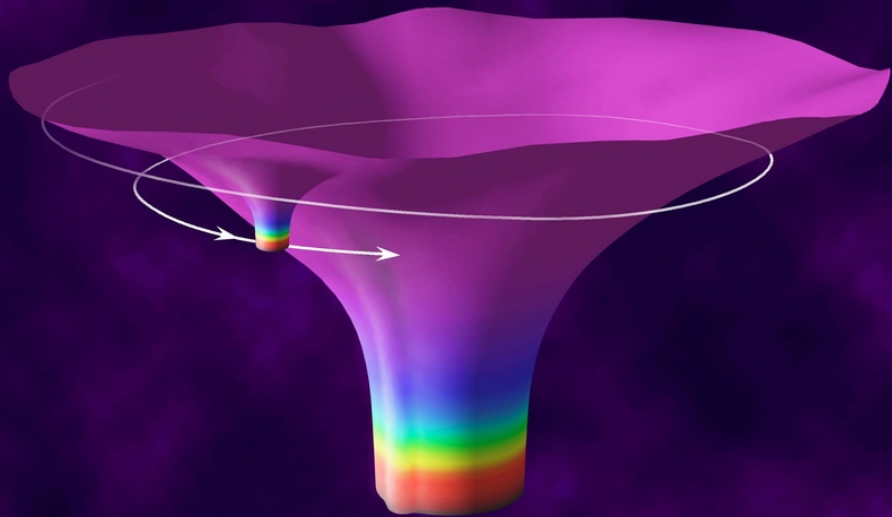
Geometria e Visione del Mondo

Huiusmodi operis. SPECTATOR. obsequij.
 Ante que unquam Vires figura tibi
 Roma Plurimum distantia quanta est inter
 Cetera Evulsi Corpora quinguis dicent.
 Quam bene conveniat quod supra COLONNICVS olim
 Trebiti Auctor nunc tibi moni hinc opus.
 Sicut exhibuit tanto se mouere gratum
 Auctor TRIACACO non esse laude DVX

Christophorus Ledford.
 1617. 31. 27

- 1. Sphaera F.
- 2. Cetera primum Geop. regule Geometricae
- 3. Sphaera B.
- 4. Sphaera G.
- 5. Sphaera H.
- 6. Sphaera I.
- 7. Sphaera J.
- 8. Sphaera K.
- 9. Sphaera L.
- 10. Sphaera M.
- 11. Sphaera N.
- 12. Sphaera O.
- 13. Sphaera P.
- 14. Sphaera Q.
- 15. Sphaera R.
- 16. Sphaera S.
- 17. Sphaera T.
- 18. Sphaera U.
- 19. Sphaera V.
- 20. Sphaera W.
- 21. Sphaera X.
- 22. Sphaera Y.
- 23. Sphaera Z.

Huiusmodi
 1617. 31. 27



L'immaginazione geometrica



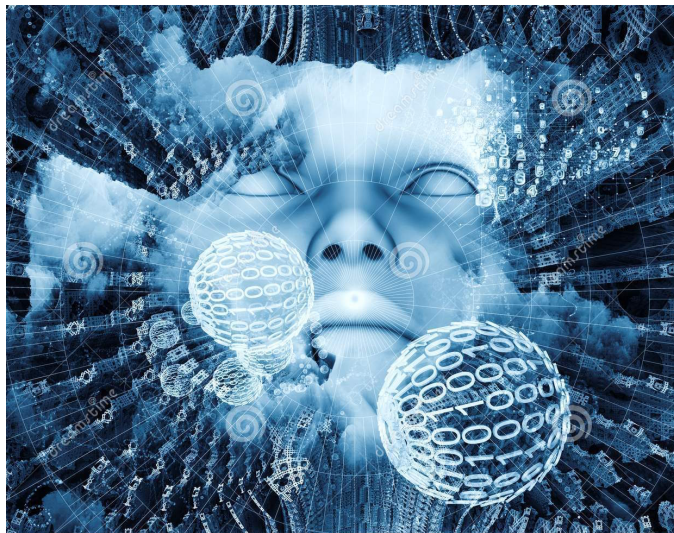
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Immaginare lo spazio – tempo



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Curvare lo spazio – tempo



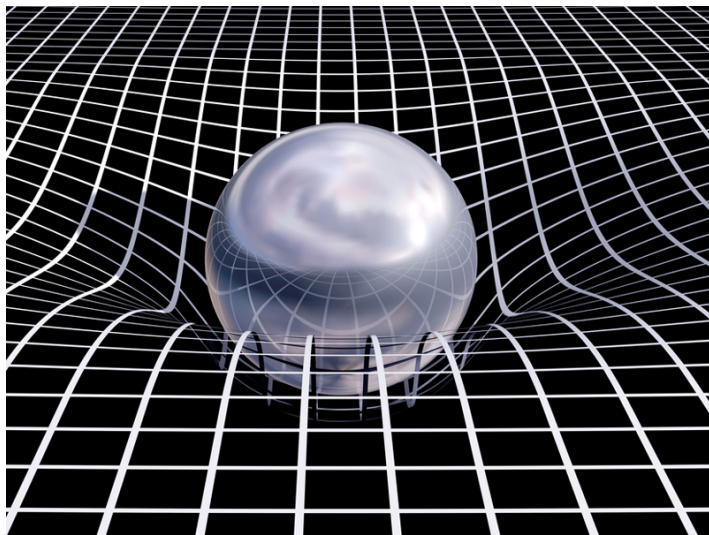
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Immaginarsi nello spazio – tempo



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



comics.com EMAIL: hpayne@detroitnews.com © 1995

Percorsi inaspettati nello spazio – tempo



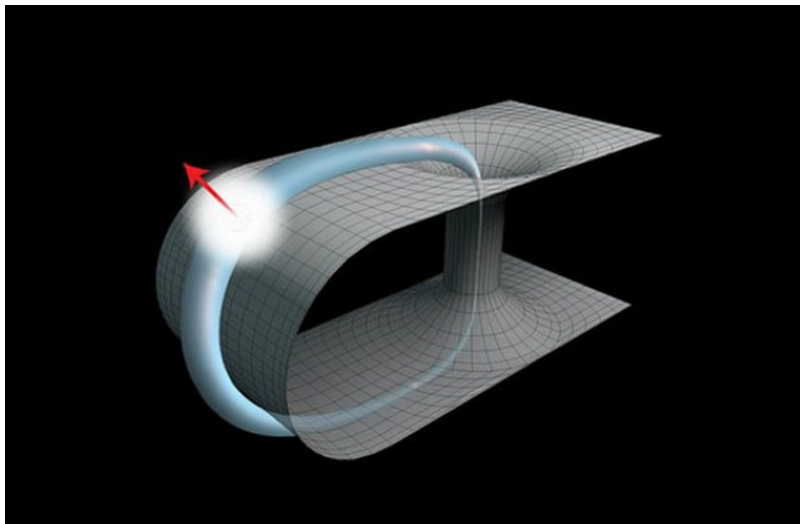
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Prima del XIX secolo: geometria euclidea



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Rivoluzione del XIX secolo: pluralità di geometrie



**Nuovi Problemi
Nuove Figure**

**Nuovi Intrecci
Nuovi Spazi**



Nuove

Possibilità

Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Alcuni protagonisti



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





- Ampliamento dello spazio con punti ideali (infiniti e complessi);
- Nuove trasformazioni che mescolano punti ordinari e **punti ideali** e collegano oggetti prima distinti;
- Invarianti per **trasformazioni proiettive**;
- oltre ai punti si possono considerare come **elementi generatori di uno spazio** anche i piani e le rette;
- generalità della nuova geometria: principio di trasformazione, di continuità e di dualità.
- **È possibile semplificare trasformando.**

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Trasformazioni per proiezione



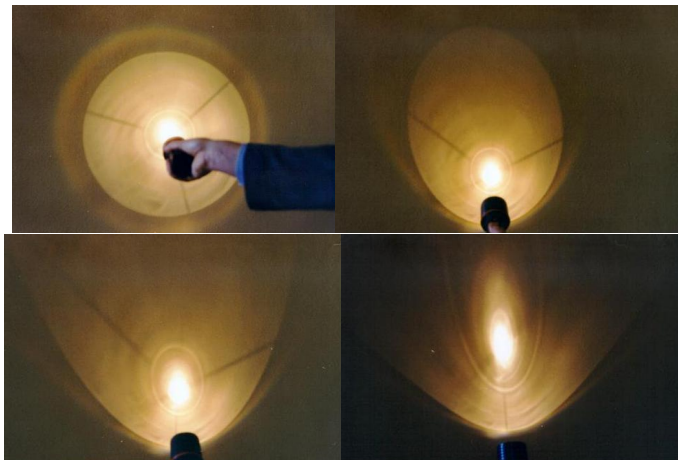
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





È possibile semplificare deformando.

Esempio: *teorema di Bezout*.

È possibile vedere deformando.

Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché non sanno vedere. Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può schiacciarsi e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi limite parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal saper vedere un concreto dinamico, costruttivo. Emma Castelnuovo

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Lui (lo zio Ghigo) **vedeva nello spazio** e ci invitava continuamente a **guardare con la mente**



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

Tutte le esperienze realizzate con procedimenti di continuità, hanno un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza. Emma Castelnuovo.

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



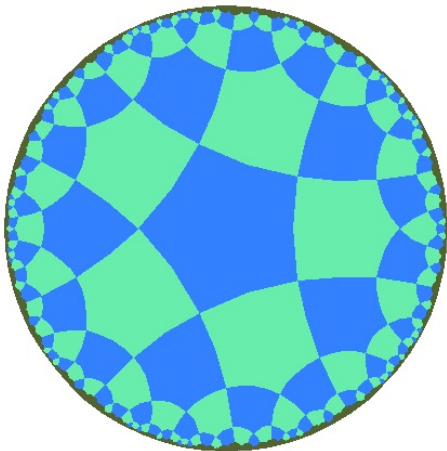
- ① Superare l'idea kantiana che lo spazio sia una categoria data a priori e immodificabile: la mente può creare **nuovi mondi dal nulla**.
- ② La realtà dello spazio fisico può essere più complessa di quella percepita ingenuamente: **La matematica può immaginare delle forme che si possono cercare nella realtà**.

Rivoluzione non euclidea

Gauss non pubblica i suoi risultati per paura **degli strilli dei Beoti**.



Tassellazione del piano con pentagoni:





Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Introduzione al corso di Geometria superiore, 1910-11 Come il corso [sulla geometria non euclidea] per le sue attinenenze colle matematiche elementari possa anche provvedere ad un'esigenza del secondo biennio, cui non si pensa abbastanza.

I due scopi che il secondo biennio si propone: impulso alla ricerca scientifica e preparazione dei futuri insegnanti. Li raggiunge entrambi? Importanza della questione che ora, nei rapporti dell'insegnamento matematico, interessa tutte le Nazioni.

Le varie opinioni sulla preparazione più efficace per i futuri insegnanti. Si possono raggruppare nelle tre tendenze seguenti:

Castelnuovo: cosa insegnare ai futuri insegnanti (II)



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

- a) cultura intensiva nei rami più elevati della matematica; l'attitudine didattica si formerà da sé;
- b) cultura larga estensiva in tutti gli indirizzi matematici e nelle scienze che con la matematica hanno le maggiori affinità;
- c) cultura specifica, metodologica.

Quali siano gli inconvenienti della tendenza a) esagerata, quando gli uditori non siano inclinati all'alta scienza. Come la tendenza b) sia più adatta per allargare le idee del futuro insegnante e per mettere nella giusta prospettiva l'argomento che si insegna. Utilità della cultura scientifica generale. Vantaggi e inconvenienti della tendenza c); come ad essa provveda in ogni caso la Scuola di Magistero.

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Castelnuovo: cosa insegnare ai futuri insegnanti (III)



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

Opportunità che nel secondo biennio, accanto a corsi di alta cultura matematica, si tengano insegnamenti che abbiano lo scopo di **allargare le idee e di mettere in luce i rapporti fra le matematiche elementari e superiori**.

Come un corso sui principi della geometria sia adatto allo scopo [...]:

- importanza del corso sotto l'aspetto didattico; si tratta di questioni strettamente legate all'insegnamento secondario, questioni che nessun insegnante dovrebbe ignorare [allenamento al **saper guardare con gli occhi della mente**].
- importanza del corso sotto il rapporto della cultura [**matematica estensiva**]. I vari metodi con cui la geometria non euclidea fu studiata (elementare; differenziale; proiettiva; gruppale).
- Interesse filosofico del corso:

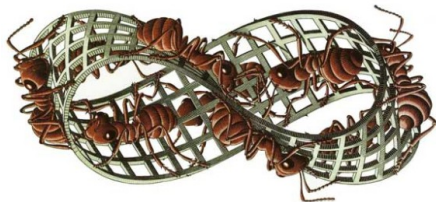
La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



- Possibilità di studiare uno spazio e le proprietà delle sue figure dall'interno;
- La nozione di angolo, di linea geodetica e di **curvatura** sono nozioni intrinseche;
- Riemann introduce la nozione di curvatura di una qualsiasi **quantità multiplamente estesa**;
- Isometrie e invarianti differenziali;
- Calcolo differenziale assoluto.



Come mi accorgo internamente che una superficie è curva



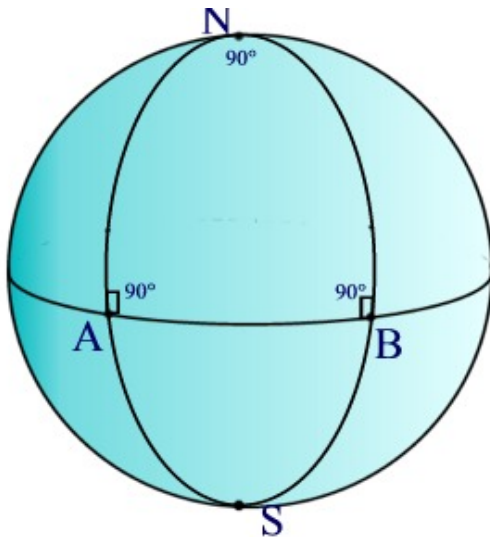
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)k &= E \left(\frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)^2 \right) \\ &+ F \left(\frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} + 4 \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\ &+ G \left(\frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} - 2 \frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q} \right)^2 \right) \\ &\quad - 2(EG - F^2) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \cdot \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right). \end{aligned}$$



Per trovare la misura di curvatura non c'è necessità di formule finite, che esprimono le coordinate x , y , z come funzione delle indeterminate p , q ; ma che l'espressione generale per la grandezza di ogni elemento lineare è sufficiente.

Teorema egregium

Se una superficie curva si sviluppa su una qualsiasi altra superficie, la misura di curvatura in ogni punto resta immutata.

Questi teoremi portano alla considerazione della teoria delle superfici curve da un punto di vista nuovo, che apre un vasto campo di indagini mai prima considerato. Gauss.



L'introduzione dei punti immaginari [...] offre alla geometria una veduta di continuità, riattaccando proprietà apparentemente distinte, come quelle in cui si scambiano somme e differenze di segmenti ecc.: il passaggio continuo dall'una all'altra proprietà risponde qui al prolungamento di una funzione polidroma. F. Enriques

Provocazione didattica

I numeri complessi nella scuola (mentre l'analisi complessa e la geometria differenziale non è più obbligatoria nella preparazione dell'insegnante).

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Enrico Arbarello ne parlerà su un prossimo numero di Lettera
Pristem



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Enrico Arbarello ne parlerà su un prossimo numero di Lettera
Pristem

Geometria delle funzioni razionali nel campo complesso



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

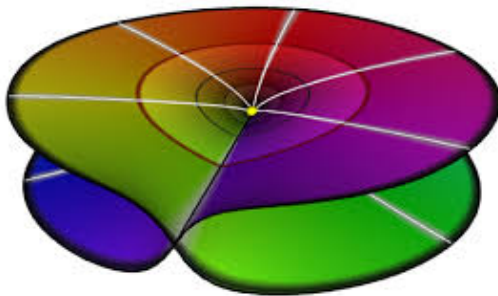




Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

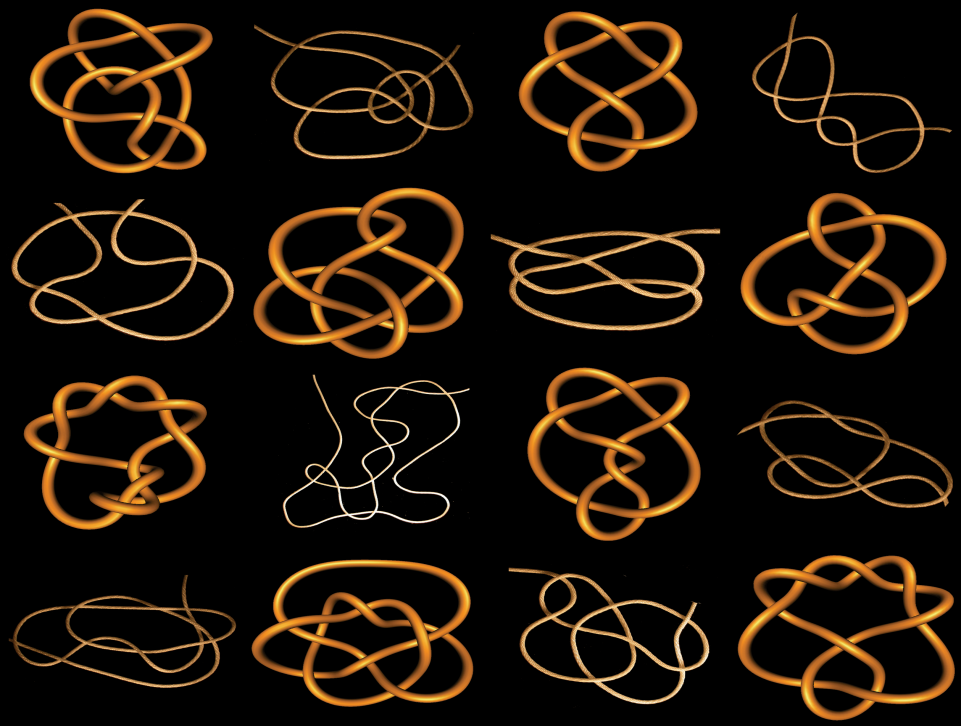
Gioie e dolori dell'incollamento.



La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Gli spazi di dimensione maggiore di tre si possono concepire e studiare geometricamente e si possono applicare utilmente allo studio di problemi matematici e alla modellizzazione della realtà fisica.

Per Veronese, per Segre, per Bertini, per tutti i nostri Maestri insomma di geometria iperspaziale, punti, rette, piani di un S_n lineare, sono veramente entità geometriche e non meri attributi di entità analitiche. Lo spazio lineare ad n dimensioni per loro è come se esistesse realmente: non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione di linguaggio. È con questa fede soltanto che a poco a poco si forma una sorta di intuizione iperspaziale e ci si pone il problema del significato logico che questa intuizione può avere, significato dal principio un po' vago, ma di cui gradatamente si riesce a costruire il significato razionale. F. Severi

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Politopi quadridimensionali



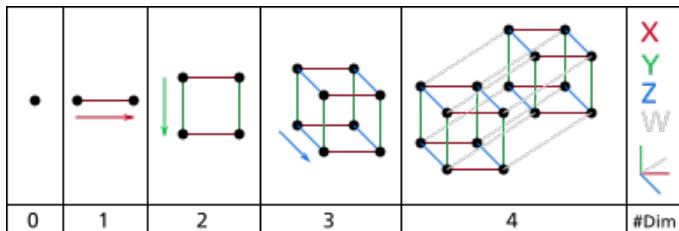
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Politopi regolari nello spazio quadridimensionale



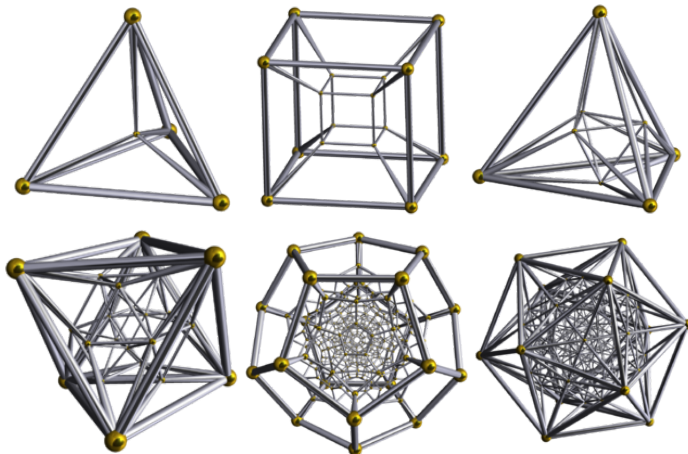
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





È possibile concepire **spazi di getti** (*squame di pesce infinitamente piccole* - Klein), in cui un'equazione differenziale diventa un oggetto geometrico. Questa teoria suggerisce di estendere le ordinarie trasformazioni puntuali e di considerare nuove **Trasformazioni di contatto**, che permettono di **semplificare la struttura di un'equazione differenziale** e di facilitarne la soluzione.

Una equazione differenziale diviene una ipersuperficie nello spazio dei getti. Una soluzione è una varietà massimale di contatto contenuta nell'ipersuperficie. Si aggiungono alle soluzioni ordinarie alcune *soluzioni ideali* nello spirito della geometria proiettiva.



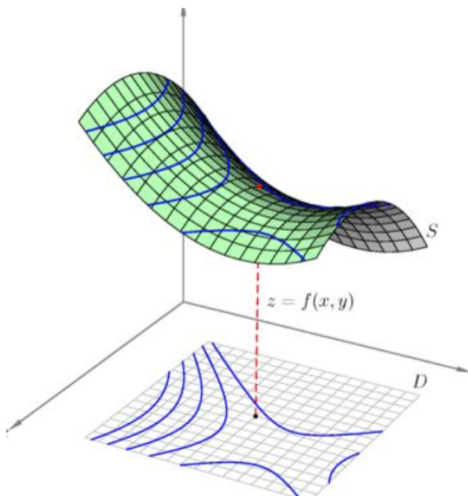
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Geometria e teoria degli invarianti dell'azione di un gruppo di trasformazioni. In questa maniera si introduce il concetto importante di *Geometrie equivalenti*, per esempio la geometria delle sfere di Lie e quella della retta. **Costruendo spazi complicati si possono scoprire connessioni inaspettate tra oggetti apparentemente scorrelati.**

Le proprietà geometriche [delle figure dello spazio] sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni [di un gruppo, che prende il nome di] gruppo principale. [...] Come generalizzazione della Geometria sorge così il seguente problema comprensivo:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo.

Klein, dal programma di Erlangen.

Asintotiche della superfici di Kummer e linee di curvatura delle cicli di Dupin



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Nuove prospettive La scoperta di un nuovo gruppo di trasformazioni equivale alla scoperta di un nuovo territorio da esplorare. Il gruppo delle trasformazioni birazionali porta alla considerazione della *geometria birazionale delle varietà algebriche*.

Se io dovessi con poche parole, necessariamente imprecise, caratterizzare la posizione scientifica del Cremona, direi che nella geometria algebrica, ramo da lui prediletto, egli chiude un'un'epoca per aprirne una nuova G. Castelnuovo.

Commemorazione di Luigi Cremona nel cinquantesimo anniversario della morte.

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Trasformazione di Morgan



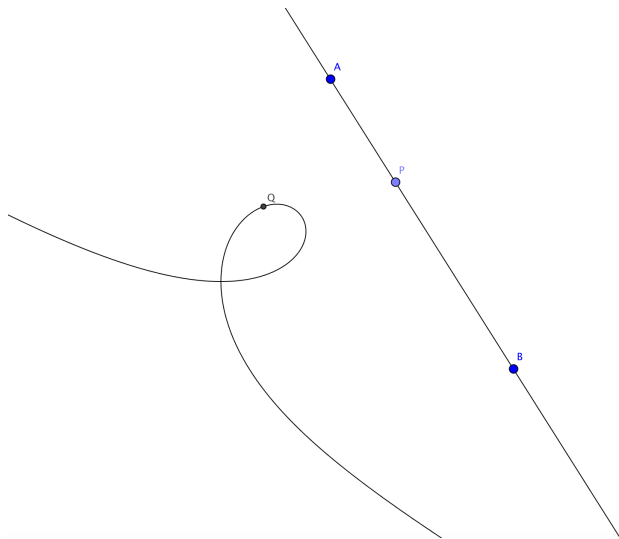
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

Interpretazione algebrico geometrica dei contributi riemanniani alla teoria delle funzioni algebriche.

Si pensa ad una funzione razionale come all'insieme delle sue superficie di livello, che vengono segate su un modello piano della curva da un sistema lineare di curve (fuori dai punti fissi).

Al teorema di Riemann Roch si giunge in conseguenza del teorema algebrico dell' $AF + B\phi$.

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Funzioni razionali su una curva secondo Clebsch



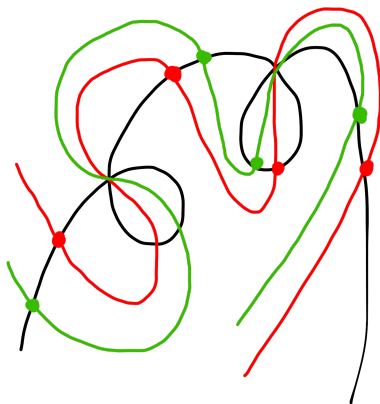
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Il contributo italiano alla geometria



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Dopo Cremona esistevano in Italia pochi elementi preparatori del rinnovamento che doveva culminare in una delle creazioni più ricche, armoniche ed eclettiche, della matematica moderna: voglio dire la geometria algebrica. [...] La tradizione cremoniana, prolungatasi con toni molto elevati in taluni importanti e isolati lavori di Veronese e di Bertini, era quasi dovunque degenerata, presso parecchi degli epigoni, deficienti di genio creativo, in tic tac geometria, secondo il pittoresco mot d'esprit di Enrico D'Ovidio. A costituire la desiderata scuola e a risollevare la tradizione cremoniana al livello donde doveva spiccare il volo verso le altezze cui era predestinata valse appunto in primissima linea l'opera possente di Corrado Segre.

Segre e Castelnuovo: una sintesi della geometria dell'ottocento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Nel 1887, dopo averne letto e apprezzato i lavori, Corrado Segre (25 anni) propone al giovanissimo Guido Castelnuovo (22 anni) di venire a Torino come assistente di d'Ovidio. La collaborazione che ne nasce segna l'inizio della scuola italiana di geometria algebrica.

Negli anni della collaborazione torinese (1887-1891) sviluppano alcune idee fondamentali:

- ① immergere un ente algebrico complicato con un serie lineare di divisori tagliati da ipersuperfici in uno spazio proiettivo di dimensione sufficientemente alta dove i divisori sono tagliati da iperpiani per semplificarne lo studio (iperspazi, divisori come elementi di spazio, geometria proiettiva)
- ② studiare l'**immagine canonica dell'ente** nello spazio proiettivo canonico, dove le trasformazioni birazionali diventavano proiettive e le costruzioni proiettive acquistano un senso birazionale (programma di Erlangen)

Queste idee danno forma a un articolato programma di ricerca per approfondire lo studio della geometria delle curve algebriche e applicare un punto di vista molto geometrico allo studio delle funzioni algebriche di una variabile.

Funzioni razionali secondo Segre e Castelnuovo



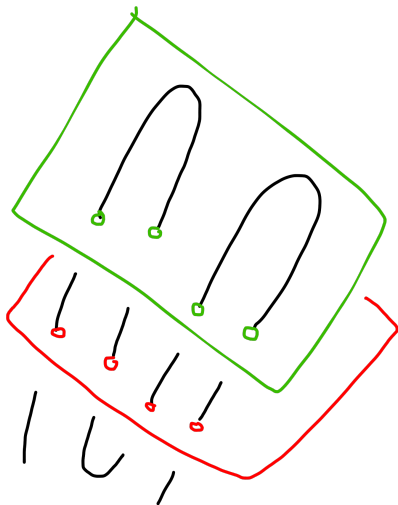
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Una piccola rivoluzione copernicana



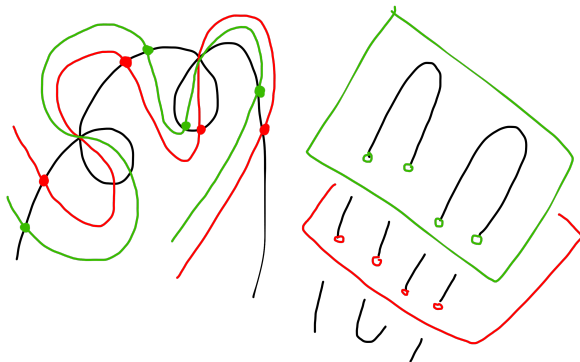
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





l'Enriques ed io mettemmo alla prova verso il 1893 i metodi algebrico-geometrici che il Cremona, in vista di altri scopi, aveva affinato. I concetti di funzioni razionali dell'ente, di operazioni razionali su di esse, di funzioni covarianti od invarianti potevano, sia pure con qualche cautela, trasportarsi dalle curve alle superficie, conducendo allo studio dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie. Ma appena si voleva approfondire la ricerca, quell'analogia, che nei primi passi ci aveva servito di guida, veniva meno e rischiava di condurci ad affermazioni erronee. G. Castelnuovo, ICMI 1928

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Val forse la pena di accennare qual'era il metodo di lavoro che seguivamo allora per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo. Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quasi tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciarono i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà colla costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie.

Galleria superfici dei primi ordini (2-7)



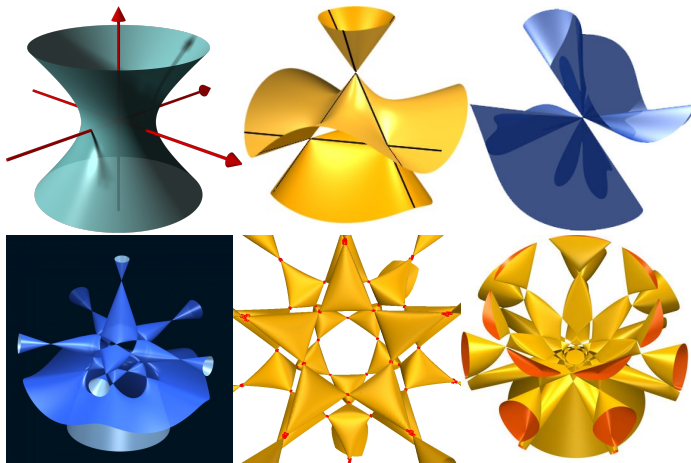
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Superficie di Enriques $p_g = p_a = 0$ ma $p_2 \neq 0$



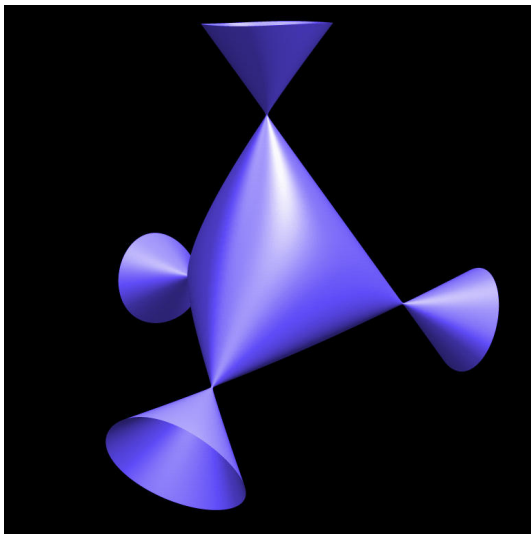
Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

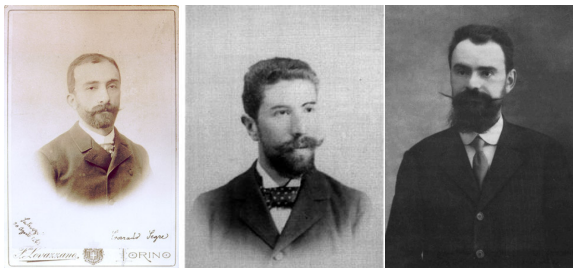


Segre - Castelnuovo - Enriques



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora



La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Il calcolo differenziale assoluto: Ricci Curbastro e Levi-Civita



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento





Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

By examining my paper so carefully, you are doing me a great favor. You can imagine how rarely someone delves independently and critically into this subject?.. When I saw that you are directing your attack against the theory's most important proof, which I had won by the sweat of my brow, I was not a little alarmed, especially since I know that you have a much better command of these mathematical matters than I. Nevertheless, upon thorough consideration I do believe I can uphold my proof. Lettera di Einstein a Levi – Civita

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Teorema di completezza

La serie caratteristica di un sistema di curve **non sovrabbondante** ($H^1 = 0$) su una superficie algebrica liscia F è **completo**.

Il teorema di completezza, necessario per la dimostrazione del teorema fondamentale delle superfici irregolari, fu una spina nel fianco alla scuola italiana. Enriques e Severi tentarono ripetutamente di darne una dimostrazione geometrica soddisfacente, demolendo con arguzia e ferocia, l'uno la dimostrazione dell'altro.

Una dimostrazione algebrica è possibile con la teoria di **Grothendieck** delle deformazioni infinitesime di ordine superiori.



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

Enriques must be credited with a nearly complete geometric proof using, as did Grothendieck, higher order infinitesimal deformations. In other words, he anticipated Grothendieck in understanding that the key to unlocking the Fundamental Theorem was understanding and manipulating geometrically higher order deformations . He had the correct ideas about infinitesimal geometry, though he had no idea at all how to make precise definitions. [Mumford]

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



C'è una forte analogia tra le difficoltà incontrate da Enriques nella dimostrazione del teorema di completezza e quelle incontrate da Einstein nella formulazione della gravitazione universale e da Lie nello sviluppare la teoria geometrica delle equazioni differenziali .

Einstein aveva le **idee corrette** sulla geometria dello spazio tempo, come Lie aveva le idee corrette sulla teoria dei fibrati dei getti, come Enriques aveva le idee corrette sulla teoria delle deformazioni infinitesime, ma non avevano il **linguaggio per esprimerle precisamente**.

Enriques, Lie e Einstein (come Riemann prima di loro) sono scienziati che fondano una nuova teoria senza avere ancora il linguaggio per esprimerne i concetti. Le loro **dimostrazioni senza definizioni** sono corrette perchè **i concetti, e la loro logica, esistono anche senza il linguaggio**. Questa è l'**intuizione matematica** pensare per concetti senza usare un linguaggio formale adeguato ma solo un **linguaggio metaforico**, e usare una logica dei concetti non formalizzata.

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

**Le ricadute
sull'insegna-
mento**

Le ricadute sull'insegnamento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

L'intuizione geometrica dei geometri della scuola italiana è stata oggetto di sospetto e discredito, anche per affermazioni come la seguente.

Ricorda l'allievo Fabio Conforto che, nel corso di una passeggiata in cui egli contestava la validità di un suo risultato, Enriques si arrestò e, mostrando con la canna da passeggio un cagnolino affacciato ad una finestra, esclamò: *Lei vede quel cane? Ebbene io vedo, allo stesso modo, la verità del mio teorema.*

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Ma diceva anche [cfr. Enriques: L'insegnamento dinamico]

Anche la domanda consueta, se le Matematiche debbono educare piuttosto l' intuizione o la logica, è viziata per una imperfetta visione del valore dell'insegnamento. Infatti il presupposto di codesta domanda è che logica ed intuizione si lascino separare come facoltà distinte dell'intelligenza, laddove esse sono piuttosto due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo, che si richiamano l'un l'altro.

Odo spesso lamentare che l'intelligenza dei giovani discepoli, sufficientemente atta a comprendere le conoscenze intuitive, repugna dalla logica; onde taluno ne trae che importa dunque correggere il difetto, con un insegnamento rigoroso dei principii,



sia dell'aritmetica, sia della geometria. Non si affaccia l'idea che un' educazione logica (anzi la più appropriata alle menti poco disposte ad astrarre) è pur contenuta nell'esercizio dell'intuizione, quando questa venga messa alla prova facendo lavorare il discepolo. Così, per esempio, la costruzione di una figura geometrica, importa non solo l'attitudine a vedere passivamente un modello che si metta sott'occhio allo studioso, ma anzi la capacità di fuggiare, come oggetto della fantasia, un modello possibile, cui s'impongono, a priori, talune condizioni: ed una tale attività costruttiva che ordina i dati di osservazioni ed esperienze passate, non è pura fantasia o fantasticheria, sciogliente il freno al libero giuoco delle associazioni d'idee, bensì vera attività logica.



Scuola
italiana di
Geometria

Enrico
Rogora

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento

Il difetto sta, per usare la felice immagine di Jerome S. Bruner, nel trascurare gli aspetti di pertinenza della mano sinistra (fantasia, intuizione, arte, gioco) disseccando tutto nella mera sistemazione razionale (di pertinenza della mano destra). Ed è notevole merito del Bruner (psicologo, non matematico) di aver ravvisato nella matematica, e nell'insegnamento e apprendimento della matematica, il campo ove l'intervento della mano sinistra sarebbe particolarmente vivificatore ed è invece purtroppo pressoché totalmente assente.

[Bruno De Finetti, Il saper vedere in matematica, 1971]



*In generale i matematici non si appoggiano alle regole formali mentre pensano. [...] Decompongono le dimostrazioni in risultati intermedi in modo tale da non trattare troppa logica nello stesso tempo. Di fatto, si incontrano spesso degli eccellenti matematici che non conoscono neanche l'utilizzazione standard e formale dei quantificatori, malgrado che questi matematici effettuino certamente i ragionamenti che queste scritture formali codificano. Personalmente faccio sforzi importanti ad ascoltare le mie intuizioni e associazioni, a metterle insieme in metafore e connessioni. Ciò implica che ci sia nello stesso tempo una forma di quiete e di concentrazione da parte del mio spirito. **Le parole, la logica, le figure precise che crepitano attorno possono inibire le intuizioni e le associazioni.***

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



È compito fondamentale dell'insegnamento della matematica quello di **educare all' intuizione**

- F. Enriques, *Insegnamento dinamico*
- B. De Finetti, *Il saper vedere in matematica*
- E. Castelnuovo, *È possibile un'educazione al saper vedere in matematica?*

La geometria
nel XIX
secolo

Il contributo
italiano alla
geometria

Le ricadute
sull'insegna-
mento



GRAZIE