METODI PER LA COSTRUZIONE DI QUADRATI MAGICI

di Gianfranco Baleani

INTRODUZIONE

È definito quadrato magico una qualsiasi matrice di **n** righe ed **n** colonne, dove **n** è un numero intero positivo, in cui, inserendo tutti i numeri interi da **1** a $\mathbf{n^2}$, la somma di ogni riga è uguale a quella di ogni colonna ed a quella di ognuna delle due diagonali e tale somma è pari a $\mathbf{(n^2+1)/2 \times n}$ e un quadrato magico è di ordine dispari se **n** è dispari, è di ordine pari se **n** è pari.
Esistono diversi metodi per la costruzione di quadrati magici, ma la peculiarità di quelli che qui vengono illustrati è, oltre alla loro estrema semplicità, il fatto che la costruzione avviene in maniera continua, senza la necessità di dover inserire provvisoriamente numeri in caselle da cui verranno poi spostati.
Classificando i quadrati magici secondo il loro ordine, abbiamo:

- quadrati magici di ordine dispari
- quadrati magici di ordine pari (escluso quello di ordine due che non può esistere)

ma, all'interno dei quadrati magici di ordine pari, per motivi che si comprenderanno più avanti, troviamo:

- quadrati magici di ordine *doppiamente* pari (il cui ordine è divisibile anche per quattro)
- quadrati magici *semplicemente* pari (il cui ordine non è divisibile per quattro)

in definitiva, possiamo classificare i quadrati magici in:

a) di ordine dispari
b) di ordine doppiamente pari
c) di ordine semplicemente pari

Com'è noto, non esiste un metodo valido per tutte e tre le classi di ordine, ma i tre metodi (uno per ogni classe di ordine) che qui vengono illustrati hanno le seguenti caratteristiche comuni:

1) utilizzano l'inserimento continuo di coppie di numeri simmetrici (equidistanti dal valore centrale che è pari a: $(n^2+1)/2$)

2) dividendo, con una croce centrale, il quadrato magico in quattro quadranti, mai accade che i due numeri della copia si trovino nello stesso quadrante

3) l'inserimento delle coppie avviene sempre partendo da una posizione centrale del quadrato magico (dal centro vero e proprio per quelli di ordine dispari, dalle righe centrali per gli altri) e si espande mantenendo sempre un suo equilibrio (per quelli di ordine dispari, per ogni sottoquadrato concentrico si verifica sempre che la somma di ogni sua riga è pari a quella di ogni sua colonna ed a quella di ciascuna delle sue due diagonali; per quelli di ordine pari, come si vedrà più avanti, c'è sempre un equilibrio per riga e per diagonale e, tendenzialmente, anche per colonna).

Dei tre metodi di seguito illustrati:

- quello relativo ai quadrati magici di ordine dispari è un metodo originale per il quale viene fornita anche la dimostrazione matematica della sua esattezza;
- quello relativo ai quadrati magici di ordine doppiamente pari è semplicemente il metodo già conosciuto con il nome di "metodo diagonale"; in questa sede ci si limita soltanto a definirlo in maniera puntuale, visto che viene presentato spesso con delle varianti che possono confondere chi guarda con occhi poco attenti i quadrati che ne risultano;

- quello relativo ai quadrati semplicemente pari (quadrati generalmente ritenuti i più difficili da costruire) è un metodo originale per il quale viene fornita anche la dimostrazione matematica della sua esattezza.

QUADRATI MAGICI DI ORDINE DISPARI

Come abbiamo accennato nell'introduzione, il metodo consiste nell'inserire, partendo dal centro della matrice, coppie di numeri simmetrici. Vista la semplicità del metodo, prima di dimostrarlo matematicamente, proviamo a illustrarlo in maniera intuitiva mostrando di seguito un quadrato magico di ordine sette con, a fianco di ogni numero (tra parentesi ed in corsivo) l'ordine con cui tale numero è stato inserito:

22 (32°)	**36** (34°)	**15** (37°)	**39** (26°)	**34** (38°)	**17** (41°)	**12** (29°)
32 (42°)	**23** (16°)	**43** (18°)	**46** (10°)	**8** (21°)	**5** (13°)	**18** (43°)
19 (45°)	**41** (22°)	**24** (8°)	**49** (2°)	**2** (5°)	**9** (23°)	**31** (44°)
13 (31°)	**6** (15°)	**3** (7°)	**25** (1°)	**47** (6°)	**44** (14°)	**37** (30°)
30 (46°)	**10** (25°)	**48** (4°)	**1** (3°)	**26** (9°)	**40** (24°)	**20** (47°)
21 (49°)	**45** (12°)	**7** (19°)	**4** (11°)	**42** (20°)	**27** (17°)	**29** (48°)
38 (28°)	**14** (35°)	**35** (36°)	**11** (27°)	**16** (39°)	**33** (40°)	**28** (33°)

Già dall'osservazione nel quadrato sopra riportato è possibile capire il funzionamento del metodo, ma per maggior chiarezza e completezza procederemo ora con la sua dimostrazione matematica.

Dimostrazione matematica del metodo

Partendo dalla definizione di quadrato magico ricaviamo che, dato un qualsiasi quadrato magico di ordine n (dove n è in questo caso un numero dispari), la somma di ogni riga, colonna o diagonale è pari a:

$$\mathbf{(n^2+1)/2 \times n}$$

Essendo, col nostro metodo, *"semimagici"*[1] anche tutti i quadrati concentrici in esso contenuti, abbiamo che, per il sottoquadrato maggiore, la sommatoria di cui sopra sarà pari a:

$$\mathbf{(n^2+1)/2 \times (n-2)}$$

[1] Definiamo semimagici tali sottoquadrati perché, a rigore, essi non sono magici secondo la definizione (se m è la dimensione, non compaiono tutti i numeri da 1 a m^2) la loro caratteristica è però che la somma di ogni riga è uguale a quella di ogni colonna e a quella di ognuna delle due diagonali.

per il sottoquadrato immediatamente inferiore sarà:

$$\mathbf{(n^2+1)/2 \times (n-2-2)}$$

e così via, fino ad arrivare al momento in cui il secondo fattore della moltiplicazione varrà **1**; a quel punto significa che abbiamo trovato il valore del quadrato centrale di ordine 1, che altro non è se non il centro del quadrato.
Si è quindi dimostrato che, se si vuol costruire un quadrato magico dispari di ordine n, in cui ogni quadrato concentrico in esso contenuto sia semimagico, il valore da porre al centro del quadrato è:

$$\mathbf{(n^2+1)/2}$$

Mettendo ora in fila, in ordine crescente, i numeri che vanno da 1 a n^2, abbiamo:

$$\mathbf{1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad (n^2+1)/2 \quad \ldots \quad n^2-2 \quad n^2-1 \quad n^2}$$

quindi, escludendo il numero centrale che è pari a $(n^2+1)/2$, la somma di ciascuna coppia di numeri equidistanti dal centro è pari a $\mathbf{n^2+1}$; ma tale valore non è altro che la differenza tra la somma di riga, colonna o diagonale di un sottoquadrato semimagico e la stessa somma riferita al sottoquadrato semimagico di ordine immediatamente inferiore.
Per costruire un quadrato magico dispari di ordine n, contenente tutti sottoquadrati semimagici concentrici, si potrà quindi procedere iniziando a collocare, innanzitutto il valore centrale: $(n^2+1)/2$ e poi, tutt'intorno quattro delle coppie di numeri sopra indicati ottenendo così il sottoquadrato semimagico di ordine 3 (che ha come somma di riga, colonna o diagonale: $(n^2+1)/2 \times 3$) intorno a questo inserire otto delle coppie di numeri di cui sopra ottenendo così il sottoquadrato semimagico di ordine 5 (che ha come somma di riga, colonna o diagonale: $(n^2+1)/2 \times 5$) e così via fino ad arrivare ad inserire le coppie di numeri che completano il quadrato finale (questo sì, magico) che ha come somma di riga, colonna o diagonale: $(n^2+1)/2 \times n$.
Dimostrato qual è il valore da inserire al centro e dimostrato da quali numeri devono essere formate le $(n^2+1)/2$ coppie da inserire intorno al centro fino ad arrivare alla costruzione totale del quadrato magico, **il problema che si pone è**: *come inserire tali coppie di numeri senza creare sbilanciamenti non colmabili con le coppie di numeri rimanenti?*
Il problema è risolto facendo in modo che ci sia una precisa relazione matematica tra lo sbilanciamento che si viene a creare nell'inserire la singola coppia ed il ribilanciamento effettuabile con le coppie di numeri rimanenti.
Per far ciò, si potrebbe procedere per tentativi fino a trovare la giusta disposizione delle varie coppie, oppure, come nel nostro caso, procedere con un metodo ben preciso che prende spunto dalla seguente considerazione: partendo dalle coppie di numeri più esterne e andando avanti, la difficoltà di avere sempre meno copie di numeri a disposizione è compensata dalla vicinanza dei loro numeri al valore del numero mediano, quindi, partendo dal centro, prima utilizzeremo prevalentemente le coppie più larghe poi, man mano che ci si espande, quelle via via più strette.

Per facilità, illustriamo la base di partenza con il seguente schema:

		Nord		
Ovest		$(n^2+1)/2$		**Est**
		Sud		

Quindi procediamo inserendo le coppie di numeri partendo dalla più larga:

		Nord		
		n^2		
Ovest		$(n^2+1)/2$		**Est**
		1		
		Sud		

Poi inseriamo la seconda più larga disponendola in modo che riequilibri il più possibile il quadrato:

		Nord		
		n^2	2	
Ovest		$(n^2+1)/2$		**Est**
	n^2-1	1		
		Sud		

poi inseriamo la terza più larga disponendola sempre in modo che riequilibri il più possibile il quadrato:

		Nord		
		n^2	2	
Ovest	3	$(n^2+1)/2$	n^2-2	**Est**
	n^2-1	1		
		Sud		

Ora notiamo che il quadrato è sbilanciato di un valore pari a 2 tra Nord-Ovest e Sud-est; per ribilanciarlo si deve usare una coppia i cui numeri distino lo stesso valore: 2 e tale coppia è quella formata dai numeri $(n^2+1)/2 -1$ e $(n^2+1)/2 +1$ che altri non è se non la coppia più stretta:

		Nord		
	$(n^2+1)/2-1$	n^2	2	
Ovest	3	$(n^2+1)/2$	n^2-2	**Est**
	n^2-1	1	$(n^2+1)/2+1$	
		Sud		

A questo punto notiamo che il primo sottoquadrato magico è stato riequilibrato dalla coppia più stretta a disposizione: affinché sia possibile riequilibrare i sottoquadrati via via più ampi con la coppia più stretta a disposizione, dato che tali coppie presentano, ad ogni giro, una differenza interna tra i loro numeri che aumenta di un valore pari a 2, **il metodo funzionerà matematicamente se anche lo squilibrio che si verrà a creare tra Nord-Ovest e Sud-Est ad ogni giro utilizzando le coppie larghe, aumenterà di un valore pari a 2.**
Ora dimostreremo che così è.
Procedendo con il sottoquadrato successivo, avremo che le prime tre coppie sbilanceranno (come già verificato nel sottoquadrato precedente) di un valore pari a 2 il Nord-Ovest rispetto al Sud-Est

			Nord			
			n^2-3		5	
		$(n^2+1)/2-1$	n^2	2		
Ovest	6	3	$(n^2+1)/2$	n^2-2	n^2-5	**Est**
		n^2-1	1	$(n^2+1)/2+1$		
	n^2-4		4			
			Sud			

Ora dobbiamo riuscire, utilizzando le coppie larghe, a portare questo sbilanciamento da 2 a 4 in modo tale da poterlo poi ribilanciare con la coppia più stretta a disposizione (che ha ora una differenza interna tra i suoi numeri di valore 4).

Ci riusciamo utilizzando le coppie a partire dalla più larga a disposizione e disponendole nella prima e nell'ultima riga (del quadrato o del sottoquadrato) l'una rovesciata rispetto all'altra, ponendo a Nord il numero più alto della coppia e quello più basso della coppia successiva inferiore (lo stesso facciamo con la e righe: ponendo ad ovest il numero più alto della coppia e quello più basso della coppia successiva inferiore).
Essendo il numero più alto di una coppia >1 rispetto al numero più alto della coppia successiva inferiore ed essendo il numero più basso di quest'ultima >1 rispetto a quello della precedente, ogni volta che si inseriscono due coppie successive a cavallo di due righe parallele o a cavallo di due colonne parallele, l'una rovesciata rispetto all'altra, si crea uno sbilanciamento di valore 2.
Dato che, passando da un sottoquadrato al sottoquadrato immediatamente maggiore, sia il numero di righe che di colonne aumentano di 2, possiamo di volta in volta aumentare di 2 lo sbilanciamento tra Nord-Ovest e Sud-Est e tale aumento è perfettamente coincidente con l'aumento di sbilanciamento delle coppie (strette) i cui numeri, ad ogni giro, vengono posti nel punto estremo di Nord-Ovest e nel punto estremo di Sud-Est.
Ecco quindi dimostrato che il metodo è matematicamente valido.

			Nord			
	$(n^2+1)/2-2$	n^2-6	n^2-3	8	5	
	n^2-8	$(n^2+1)/2-1$	n^2	2	9	
Ovest	6	3	$(n^2+1)/2$	n^2-2	n^2-5	**Est**
	10	n^2-1	1	$(n^2+1)/2+1$	n^2-9	
	n^2-4	7	4	n^2-7	$(n^2+1)/2+2$	
			Sud			

Corollario

Come si evince da quanto precede, dato un qualsiasi quadrato magico dispari di ordine **n**, costruito con il nostro metodo, i numeri che vanno da 1 fino al numero immediatamente inferiore a quello posto nel punto estremo di Nord-Ovest hanno posizioni assegnate in modo fisso rispetto al centro, valide per tutti i quadrati magici di ordine dispari maggiore di **n**.
Essendo il valore del numero posto all'estremo Nord-Ovest, indicato con **Vno** pari a $\mathbf{(n^2+1)/2 - (n-1)/2}$, abbiamo che:
Vno = $(n^2+1-n+1)/2$
Vno = $(n^2-n+2)/2$
Vno = $(n^2-n)/2 + 2/2$

$Vno = (n^2-n)/2 + 1$

Il valore del numero precedente a Vno sarà: $Vno - 1 = (n^2-n)/2 + 1 - 1 = \mathbf{(n^2 - n)/2}$.

Possiamo quindi enunciare il seguente corollario:

*Utilizzando il nostro metodo, dato un qualsiasi quadrato magico di ordine **n**, dove **n** è un numero intero dispari, la posizione rispetto al centro dei numeri che vanno da **1** a **$(n^2$-n)/2** non varia per tutti i quadrati magici di ordine dispari maggiore di **n**.*

QUADRATI MAGICI DI ORDINE DOPPIAMENTE PARI

In questa sede ci limitiamo a definire in maniera puntuale quello che è conosciuto come metodo diagonale. Anche in questo caso, vista la semplicità del metodo, prima di dimostrarlo matematicamente, proviamo a illustrarlo in maniera intuitiva mostrando di seguito un quadrato magico di ordine otto con, a fianco di ogni numero (tra parentesi ed in corsivo) l'ordine con cui tale numero è stato inserito:

8 (49°)	**58** (52°)	**59** (53°)	**5** (56°)	**4** (57°)	**62** (60°)	**63** (61°)	**1** (64)
49 (33°)	**15** (36°)	**14** (37°)	**52** (40°)	**53** (41°)	**11** (44°)	**10** (45°)	**56** (48°)
24 (17°)	**42** (20°)	**43** (21°)	**21** (24°)	**20** (25°)	**46** (28°)	**47** (29°)	**17** (32°)
33 (1°)	**31** (4°)	**30** (5°)	**36** (8°)	**37** (9°)	**27** (12°)	**26** (13°)	**40** (16°)
25 (15°)	**39** (14°)	**38** (11°)	**28** (10°)	**29** (7°)	**35** (6°)	**34** (3°)	**32** (2°)
48 (31°)	**18** (30°)	**19** (27°)	**45** (26°)	**44** (23°)	**22** (22°)	**23** (19°)	**41** (18°)
9 (47°)	**55** (46°)	**54** (43°)	**12** (42°)	**13** (39°)	**51** (38°)	**50** (35°)	**16** (34°)
64 (63°)	**2** (62°)	**3** (59°)	**61** (58°)	**60** (55°)	**6** (54°)	**7** (51°)	**57** (50°)

Il metodo consiste nell'utilizzare le coppie di numeri simmetrici, in sequenza, partendo da quella più interna ed iniziando ad inserire i numeri a partire dalle due righe centrali, collocando nella prima colonna di quella superiore il valore pari a: $\mathbf{n^2/2+1}$ e nell'ultima colonna di quella inferiore l'altro numero della coppia, ovvero: $\mathbf{n^2/2}$. In altre parole, si è partiti dalla coppia più interna (detta anche più stretta) e si è collocato: prima il numero più alto, poi quello più basso; ora bisogna ripetere l'inserimento: prima del numero più alto e poi di quello più basso della coppia successiva ed in senso inverso alla precedente (il più alto nella penultima colonna della riga inferiore ed il più basso nella seconda colonna della riga superiore). Ora si riparte di nuovo dalla prima casella libera della riga superiore (in questo caso la colonna 3) e si ripete ciò che si è fatto prima, ma in maniera rovesciata, ovvero: nella colonna 3 della riga superiore si inserisce il numero più basso della coppia e nella terzultima colonna della riga inferiore si inserisce il numero più alto della coppia, poi nella quartultima colonna della riga inferiore si inserisce il numero più basso della coppia successiva e

nella quarta colonna della riga superiore s'inserisce il numero più alto della coppia. Si riparte poi inserendo nella colonna 5 della riga superiore il numero più alto della coppia successiva e si continua con la stessa sequenza sopra esposta, fino ad arrivare a completare le due righe centrali. Fatto ciò, si riparte dalla riga immediatamente superiore a quella centrale già completata e si ripete il procedimento indicato sopra, partendo però dal numero più basso della coppia da inserire. Fatto ciò, si riparte dalla riga immediatamente superiore a quella centrale già completata e si ripete il procedimento indicato sopra, partendo dal numero più alto della coppia da inserire, e così via fino a completare tutto il quadrato magico.
Dall'osservazione dei numeri che man mano vengono inseriti con il metodo appena descritto, si evince facilmente che questo non è utilizzabile, così com'è, per costruire quadrati magici di ordine semplicemente pari.
Si può infatti notare che le somme dei numeri di ogni singola colonna parziale, che ad ogni inserimento di riga si forma, presentano valori diversi se il numero di righe inserite è semplicemente pari mentre presentano tutte lo stesso valore se il numero di righe riempite è doppiamente pari.
Si comprende quindi quanto accennato nel paragrafo introduttivo circa la necessità di fare la distinzione tra quadrati di ordine doppiamente pari e quadrati di ordine semplicemente pari.

QUADRATI MAGICI DI ORDINE SEMPLICEMENTE PARI

Anche in questo caso, prima di spiegarlo in termini più analitici, proviamo a illustrarlo in maniera intuitiva mostrando di seguito un quadrato magico di ordine dieci con, a fianco di ogni numero (tra parentesi ed in corsivo) l'ordine con cui tale numero è stato inserito:

18 (65°)	**2** (69°)	**84** (72°)	**3** (73°)	**97** (76°)	**5** (77°)	**94** (80°)	**93** (81°)	**9** (84°)	**100** (68°)
95 (85°)	**26** (49°)	**76** (52°)	**77** (53°)	**23** (56°)	**22** (57°)	**80** (60°)	**81** (61°)	**19** (64°)	**6** (86°)
91 (87°)	**67** (33°)	**33** (36°)	**32** (37°)	**70** (40°)	**71** (41°)	**29** (44°)	**28** (45°)	**74** (48°)	**10** (88°)
11 (89°)	**42** (17°)	**60** (20°)	**61** (21°)	**39** (24°)	**38** (25°)	**64** (28°)	**65** (29°)	**35** (32°)	**90** (90°)
89 (92°)	**51** (1°)	**49** (4°)	**48** (5°)	**54** (8°)	**55** (9°)	**45** (12°)	**44** (13°)	**58** (16°)	**12** (91°)
13 (93°)	**43** (15°)	**57** (14°)	**56** (11°)	**46** (10°)	**47** (7°)	**53** (6°)	**52** (3°)	**50** (2°)	**88** (94°)
87 (96°)	**66** (31°)	**36** (30°)	**37** (27°)	**63** (26°)	**62** (23°)	**40** (22°)	**41** (19°)	**59** (18°)	**14** (95°)
15 (97°)	**27** (47°)	**73** (46°)	**72** (43°)	**30** (42°)	**31** (39°)	**69** (38°)	**68** (35°)	**34** (34°)	**86** (98°)
85 (100°)	**82** (63°)	**20** (62°)	**21** (59°)	**79** (58°)	**78** (55°)	**24** (54°)	**25** (51°)	**75** (50°)	**16** (99°)
1 (67°)	**99** (70°)	**17** (71°)	**98** (74°)	**4** (75°)	**96** (78°)	**7** (79°)	**8** (82°)	**92** (83°)	**83** (66°)

Spiegazione analitica del metodo

Partendo dalla considerazione che, se **n** è il numero d'ordine di un quadrato semplicemente pari, allora **n-2** è il numero d'ordine di un quadrato doppiamente pari, nella costruzione del quadrato magico di ordine semplicemente pari si può procedere nel modo di seguito illustrato.
Utilizzando il metodo esposto precedentemente, relativo alla costruzione dei quadrati di ordine doppiamente pari, si inizia costruendo un quadrato semimagico concentrico di ordine **n-2**.
Prendendo a riferimento il nostro esempio, si nota quindi che, all'interno di un quadrato di ordine 10 si è costruito un sottoquadrato semimagico e concentrico di ordine 8 (n-2); la prima coppia di numeri inserita in tale sottoquadrato è la 51<>50 ($n^2/2+1$ <> $n^2/2$) e l'ultima, la trentaduesima ($32 = (n-2)^2/2$), è la coppia 82 <> 19 ($n^2/2+1+31$ <> $n^2/2-31$ ovvero $n^2/2+(n-2)^2/2$ <> $n^2/2+1-(n-2)^2/2$):

26 (49°)	**76** (52°)	**77** (53°)	**23** (56°)	**22** (57°)	**80** (60°)	**81** (61°)	**19** (64°)
67 (33°)	**33** (36°)	**32** (37°)	**70** (40°)	**71** (41°)	**29** (44°)	**28** (45°)	**74** (48°)
42 (17°)	**60** (20°)	**61** (21°)	**39** (24°)	**38** (25°)	**64** (28°)	**65** (29°)	**35** (32°)
51 (1°)	**49** (4°)	**48** (5°)	**54** (8°)	**55** (9°)	**45** (12°)	**44** (13°)	**58** (16°)
43 (15°)	**57** (14°)	**56** (11°)	**46** (10°)	**47** (7°)	**53** (6°)	**52** (3°)	**50** (2°)
66 (31°)	**36** (30°)	**37** (27°)	**63** (26°)	**62** (23°)	**40** (22°)	**41** (19°)	**59** (18°)
27 (47°)	**73** (46°)	**72** (43°)	**30** (42°)	**31** (39°)	**69** (38°)	**68** (35°)	**34** (34°)
82 (63°)	**20** (62°)	**21** (59°)	**79** (58°)	**78** (55°)	**24** (54°)	**25** (51°)	**75** (50°)

Una volta costruito il sottoquadrato concentrico che, essendo semimagico (per la definizione già data in precedenza) ha la somma di ogni riga uguale a quella di ogni colonna ed a quella di ciascuna delle due diagonali, il problema resta soltanto quello di inserire le coppie di numeri nella prima e nell'ennesima riga, nella prima e nell'ennesima colonna.
Tale problema è risolvibile facendo in modo che ci sia una precisa relazione matematica tra lo sbilanciamento che si viene a creare nell'inserire la singola coppia ed il ribilanciamento effettuabile con le coppie di numeri rimanenti.
Considerato che un quadrato di ordine **n** è formato da $\mathbf{n^2/2}$ coppie e che un quadrato di ordine **n-2** è formato da $\mathbf{(n-2)^2/2}$ coppie, le coppie che restano da inserire sono pari a $(n^2-(n-2)^2)/2$, ovvero $(n^2-(n^2-4n+4))/2 = (4n-4)/2 = 4(n-1)/2 =$ **2(n-1)**; la più larga sarà quindi la coppia n^2 <> 1, la più stretta sarà $n^2+1-2(n-1)$ <> $2(n-1)$
La procedura adottata, prevede prioritariamente l'inserimento delle coppie negli angoli, perciò si inizia inserendo la più stretta e la più larga, in diagonale e con il valore dei numeri invertito (la riga che contiene il più alto di una coppia conterrà il più piccolo dell'altra coppia) rispetto alla prima ed ultima riga; poi si continua completando prioritariamente le righe, inserendo la coppia immediatamente più stretta nella prima colonna libera della prima e dell'ultima riga poi, a seguire, la successiva coppia nelle caselle a fianco con il valore dei numeri invertito in modo da creare uno

sbilanciamento totale pari a **4** tra la somma dei numeri inseriti nella prima riga e la somma dei numeri inseriti nell'ultima riga. Questa differenza pari a **4** sarà riequilibrata, utilizzando sempre il meccanismo delle coppie inserite in senso inverso, ma inserendo due coppie non adiacenti bensì separate dalla coppia il cui numero più alto è pari a $\mathbf{n^2\text{-}n/2}$ (tale coppia, come dimostreremo più avanti, dovrà essere "saltata" perché necessaria poi a riequilibrare le colonne) le restanti caselle della prima e dell'ultima riga saranno completate inserendo coppie di numeri adiacenti con il valore dei numeri invertito e, essendo il numero di tali coppie divisibile per quattro, l'inversione dei numeri sarà tale da essere effettuata in equilibrio.
Inserite le coppie a completamento delle righe, si passa all'inserimento nella prima e nell'ultima colonna procedendo come segue: si inserisce innanzitutto la coppia "saltata" in precedenza (quella col numero più alto pari a $\mathbf{n^2\text{-}n/2}$) e, di seguito, la coppia più larga tra quelle ancora rimaste; così facendo si viene a creare uno squilibrio tra la prima e l'ultima colonna pari al numero di coppie (adiacenti) che rimangono da inserire (ovvero: n-4). A questo punto sarà sufficiente effettuare l'inserimento di tali coppie restanti con il solito metodo del senso inverso e si giungerà a riequilibrare perfettamente anche le ultime due colonne.

<u>Dimostrazione matematica</u>

In considerazione di quanto precede, ciò che dobbiamo dimostrare è: *perché, nell'inserimento dei numeri nella prima e nell'ultima riga, la coppia "da saltare" è quella il cui numero più alto è pari a* $\boldsymbol{n^2\text{-}n/2}$.
Abbiamo già verificato che l'inserimento delle prime quattro coppie con le modalità sopra illustrate porta ad uno sbilanciamento fisso, tra la prima riga e l'ultima, di valore **4**, quindi, al fine di recuperare tale sbilanciamento con la solita tecnica dell'inserimento di coppie adiacenti (partendo dalla più larga e inserite capovolte l'una rispetto all'altra) essendo le caselle delle riga ancora da inserire in numero "semplicemente pari" ed essendo necessari gruppi di quattro coppie a due a due adiacenti per far sì che lo sbilanciamento di valore **2** creato dalle prime due sia compensato dallo sbilanciamento di valore **-2** creato dalle seconde due: rimangono due coppie che devono creare uno sbilanciamento pari a quattro (ovvero doppio) e ciò è possibile facendo sì che le due coppie non siano adiacenti, bensì che la coppia che si trova tra le due venga "saltata".
Per l'individuazione di tale coppia, ci dobbiamo domandare quale, delle **n-4** coppie che andremo ad utilizzare partendo da quella il cui numero maggiore è pari a $\mathbf{n^2\text{-}2}$, è necessario utilizzare per riequilibrare le coppie che andremo successivamente ad inserire nella prima e nell'ultima colonna (una cosa certa è che il numero più alto, della coppia che stiamo cercando, dovrà avere un valore compreso tra $\mathbf{n^2\text{-}2}$ ed $\mathbf{n^2\text{-}2\text{-}(n\text{-}4)}$, ovvero tra $\mathbf{n^2\text{-}2}$ ed $\mathbf{n^2\text{-}n\text{+}2}$).
Per rispondere a tale domanda, i passaggi da compiere sono i seguenti:

a) calcolare a quanto ammonta lo sbilanciamento iniziale, tra la prima colonna e l'ultima, causato dall'inserimento delle due coppie in diagonale;
b) calcolare a quanto ammonta lo sbilanciamento recuperabile con la prima coppia più larga a disposizione, una volta terminato di inserire le coppie nella prima riga e nell'ultima;
c) calcolare a quanto ammonta lo sbilanciamento recuperabile con la tecnica delle coppie inserite l'una all'inverso dell'altra relativamente alle coppie di numeri restanti;
d) fare la differenza tra lo sbilanciamento calcolato al punto a) e quello recuperabile sommando i valori calcolati ai punti b) e c) e, in base al risultato che ne deriva, si potrà individuare la coppia che ci interessa.

Partendo dal punto a), abbiamo che, essendo stato inserito nell'angolo di nord-est il valore $\mathbf{n^2}$, in quello di nord-ovest il valore **2(n-1)**, in quello di sud-est il valore $\mathbf{n^2\text{+}1\text{-}2(n\text{-}1)}$ e in quello di sud – ovest **1**, lo sbilanciamento in più, dell'ultima colonna rispetto alla prima è:

$$\mathbf{n^2-2(n-1)+n^2+1-2(n-1)-1}$$

ovvero: $n^2-2n+2+n^2+1-2n+2-1$
ovvero: $\mathbf{2n^2+4-4n}$

Passando al punto b), dobbiamo innanzitutto individuare quale sia la prima coppia più larga a disposizione, una volta terminato di inserire le coppie nella prima riga e nell'ultima. Tale coppia avrà come numero più alto il valore risultante dalla seguente operazione: $\mathbf{n^2}$

- diminuito di un valore pari al numero di caselle della prima riga: **n**
- aumentato di un valore pari a **2**, ovvero il numero di coppie "strette" inserite nella prima e nell'ultima riga
- diminuito di un valore pari a **1** che è il numero di coppie "saltate" nell'inserimento della prima riga e dell'ultima riga

tale coppia avrà quindi, come numero più alto: n^2-n+2-1 quindi, come numero più basso: n^2+1-(n^2-n+2-1), ovvero: n, la coppia sarà quindi: n^2-n+1 <> n e tale coppia creerà uno sbilanciamento pari a: n^2-n+1-n ovvero $\mathbf{n^2-2n+1}$**.**

Passando al punto c), essendo le coppie di numeri restanti pari a n-4 e potendo creare ogni due coppie di numeri uno sbilanciamento pari a due, ipotizzando che vengano inserite tutte in modo da avere lo sbilanciamento o tutto a favore della prima colonna, o tutto a favore dell'ultima colonna, tale sbilanciamento sarà pari a: +/-(n-4)/2×2, ovvero: **+/-(n-4)**.

Si può ora passare al punto d) calcolando le differenze nelle seguenti due ipotesi:

1°) sbilanciamento delle n-4 coppie restanti tutto a favore della prima colonna

2°) sbilanciamento delle n-4 coppie restanti tutto a favore dell'ultima colonna.

Avremo quindi:

1°) $2n^2+4-4n-(n^2-2n+1)-(n-4)=2n^2+4-4n-n^2+2n-1-n+4=\mathbf{n^2-3n+7}$ da tale differenza ci ricaviamo il numero maggiore della coppia a cui si riferisce, che è pari a: $(n^2+1)/2+(n^2-3n+7)/2=(n^2+1+n^2-3n+7)/2=(2n^2-3n+8)/2=\mathbf{n^2-n-n/2+4}$ verifichiamo ora se tale soluzione è ammissibile: essendo il valore di **n** un valore non inferiore a 6, il valore massimo che l'espressione può assumere sarà: $\mathbf{n^2-n+1}$, ma tale valore non rientra tra quelli ammissibili che sono compresi tra $\mathbf{n^2-2}$ ed $\mathbf{n^2-n+2}$, quindi l'ipotesi di creare con le coppie di cui al punto c) uno sbilanciamento a favore della prima colonna, non è percorribile; verifichiamo ora, al seguente punto 2°), l'ipotesi inversa: quella di creare con tali coppie uno sbilanciamento a favore dell'ultima colonna.

2°) $2n^2+4-4n-(n^2-2n+1)+(n-4)=2n^2+4-4n-n^2+2n-1+n-4=\mathbf{n^2-n-1}$ da tale differenza ci ricaviamo il numero maggiore della coppia a cui si riferisce, che è pari a: $(n^2+1)/2+(n^2-n-1)/2=(n^2+1+n^2-n-1)/2=(2n^2-n)/2=\mathbf{n^2-n/2}$ verifichiamo ora se tale soluzione è ammissibile: essendo il valore di **n** un valore maggiore o uguale a **6**, ed essendo ammissibili i valori compresi tra $\mathbf{n^2-2}$ ed $\mathbf{n^2-n+2}$, abbiamo che:

- $n^2-n/2$ è sempre inferiore a n^2-2 per n > = 6
- $n^2-n/2$ è sempre maggiore di n^2-n+2 per n >= 6

Ecco quindi dimostrato che la coppia da "saltare" è quella che ha come numero maggiore $\mathbf{n^2-n/2}$ e, quindi, come numero inferiore $n^2+1-(n^2-n/2)=n^2+1-n^2+n/2=\mathbf{n/2+1}$.