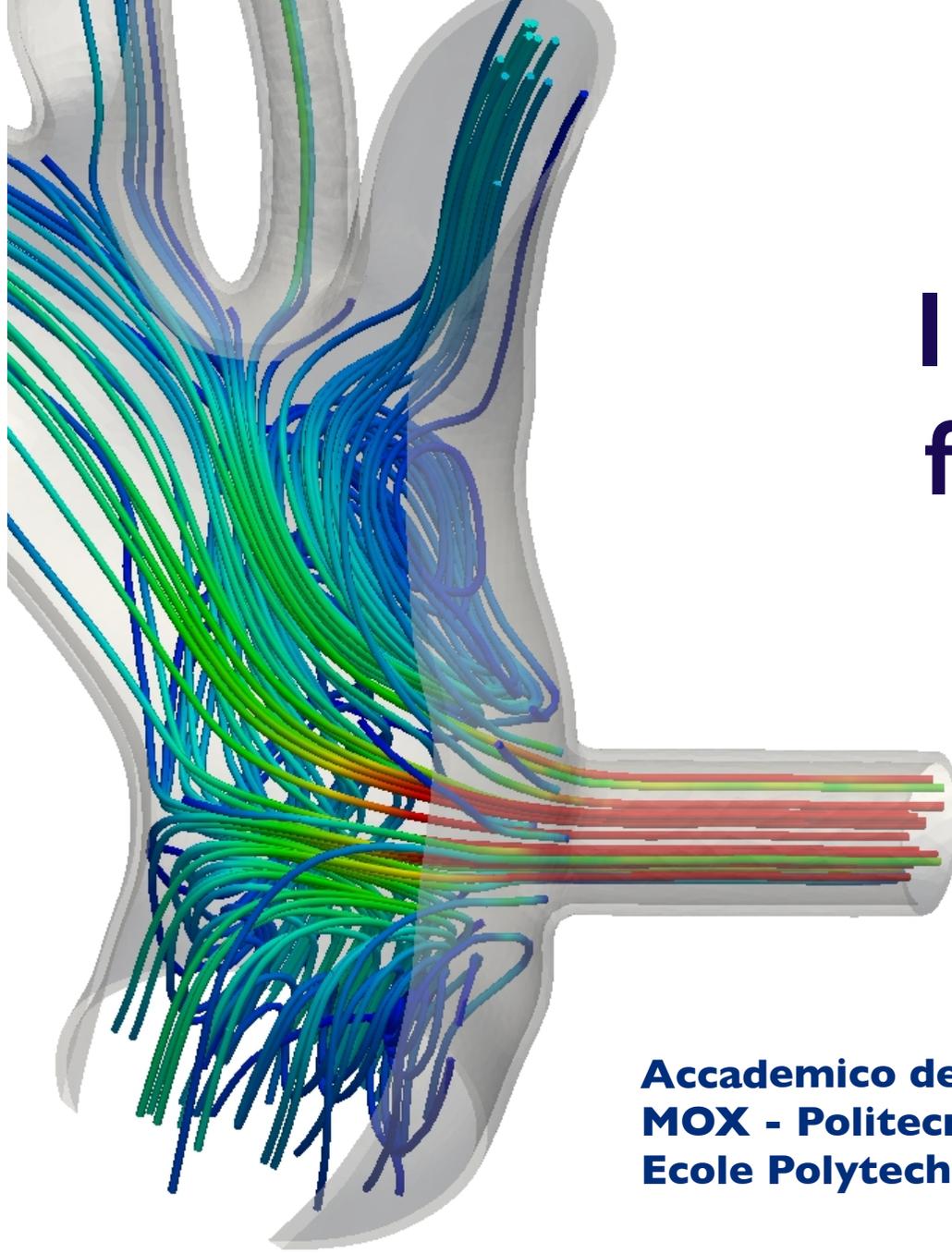


Bologna PRISTEM, 4 ottobre 2019

I Modelli Matematici fra Scuola, Ricerca e Società

Alfio Quarteroni

Accademico dei Lincei
MOX - Politecnico di Milano
Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne (prof emerito)



LifeV



EPFL

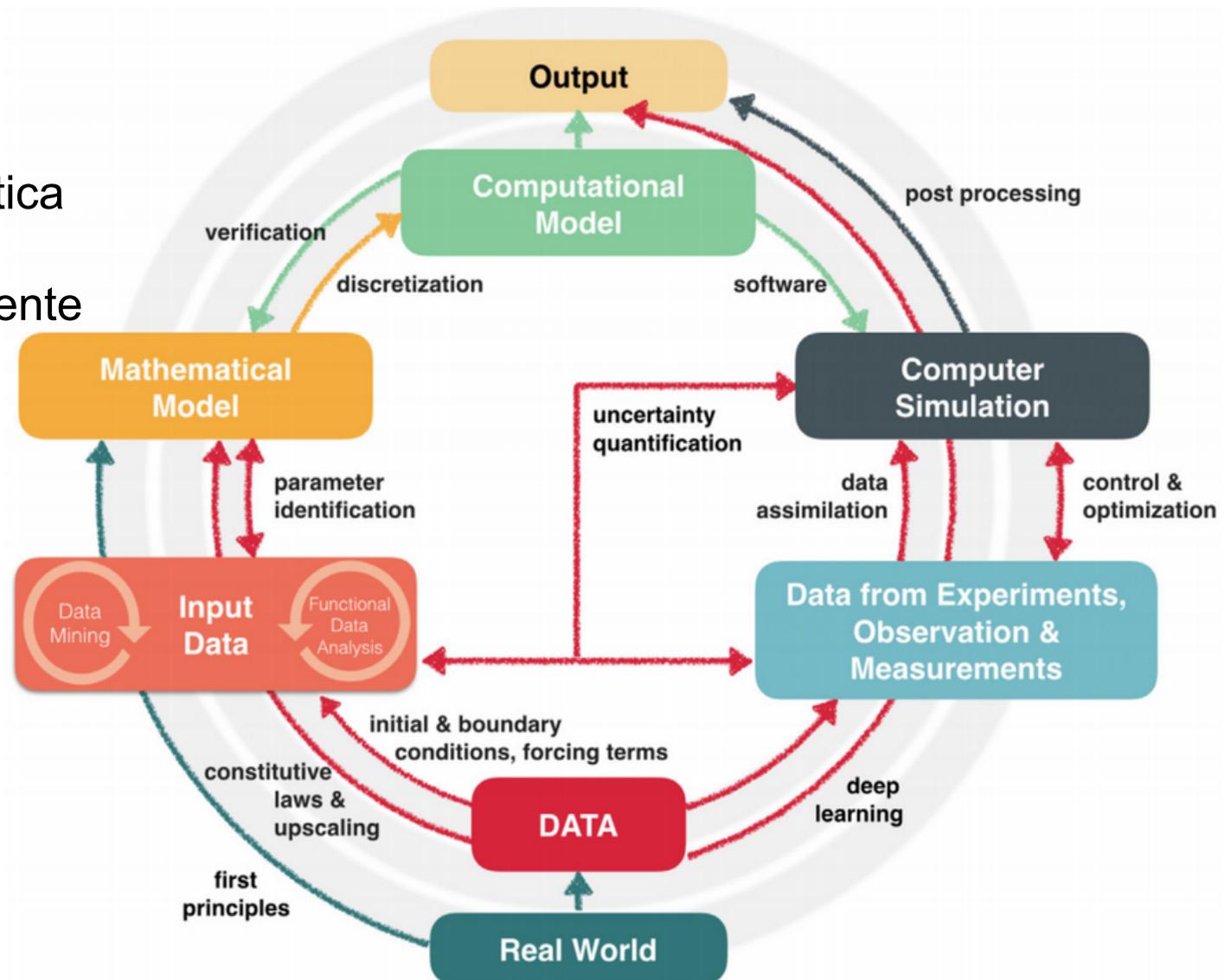


POLITECNICO
MILANO 1863



Modelli e Data Science - il Giusto Binomio

Le due discipline, modellistica matematica e data science, agiscono sinergicamente alimentandosi e complementandosi a vicenda



Matematica & Sport



Big Data & AI - Trattare con cura

What is this?



Big Data...



...is not always Big Information





THE INNOVATION PERFORMANCE OPTIMIZATION

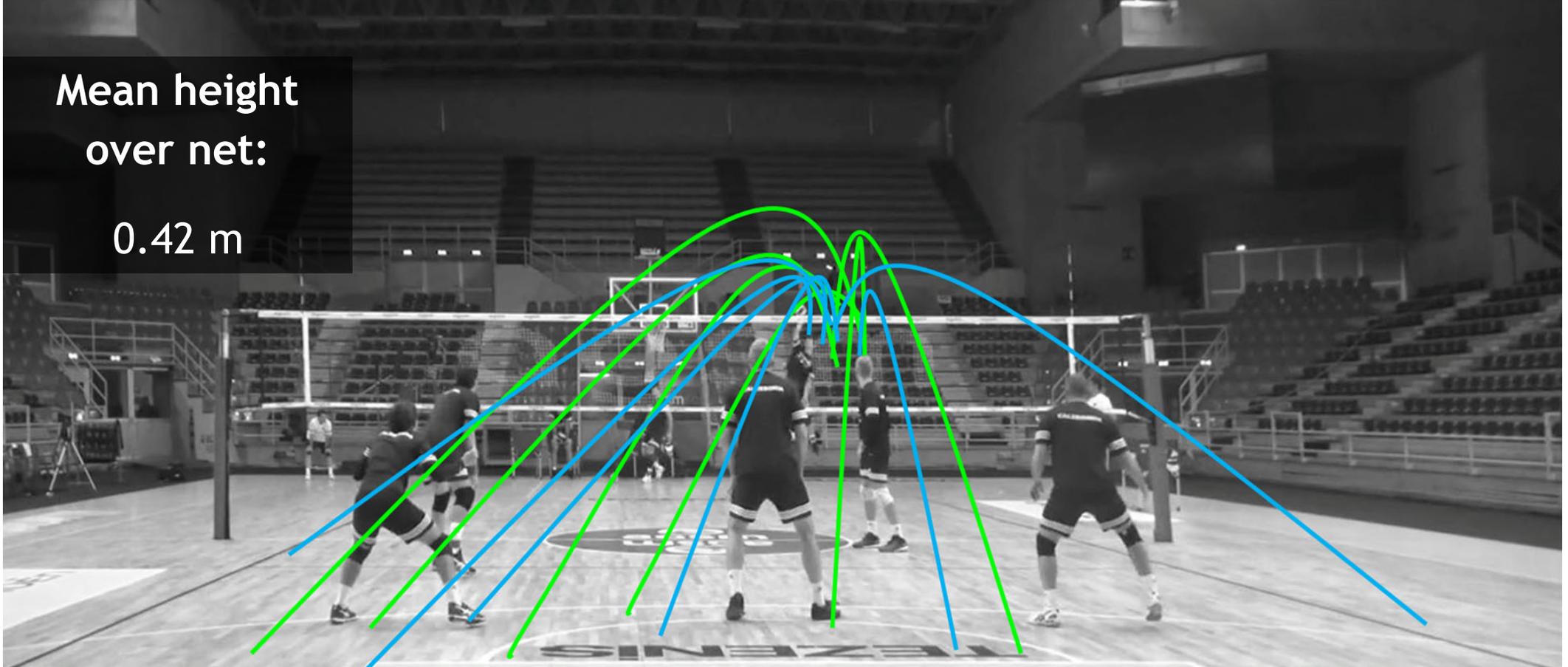


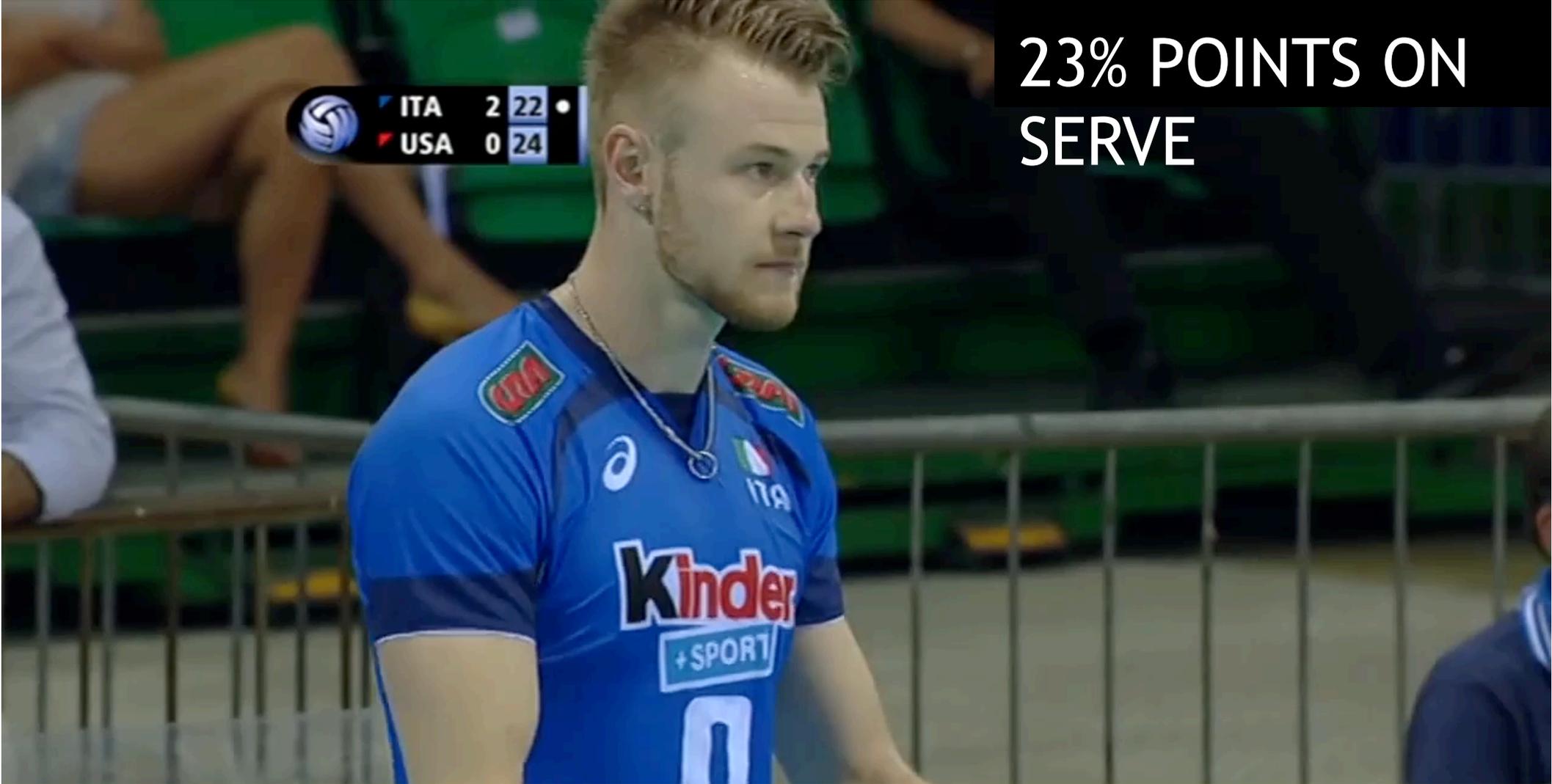
Serves simulation

- Low velocity
- High velocity

Mean height
over net:

0.42 m



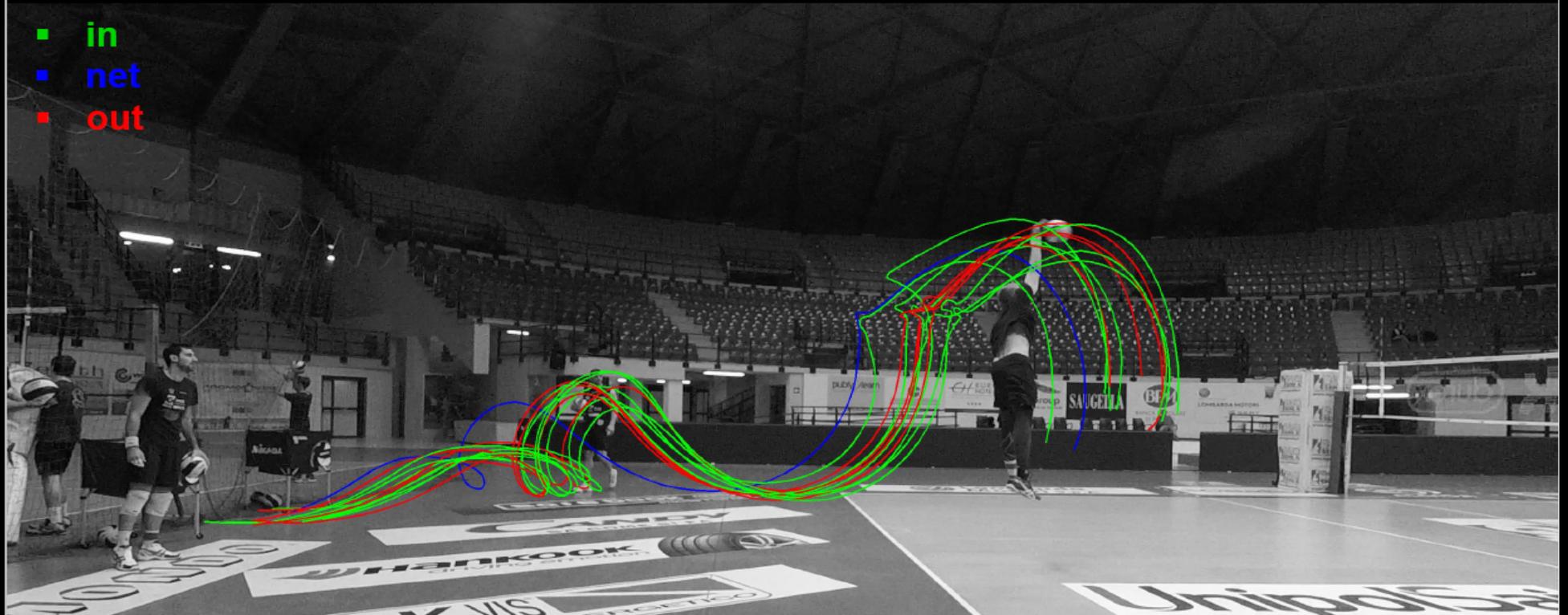


	ITA	2	22	•
	USA	0	24	

23% POINTS ON
SERVE

Wrist trajectories during impact

- in
- net
- out



Consistency at toss:

77 %

Consistency at impact:

58 %

Overall consistency:

69 %



Turkey, P
Hungary,

Rai 2
y, Poland
HD ch 502
ary, Slovakia



CEV

SAMSUNG



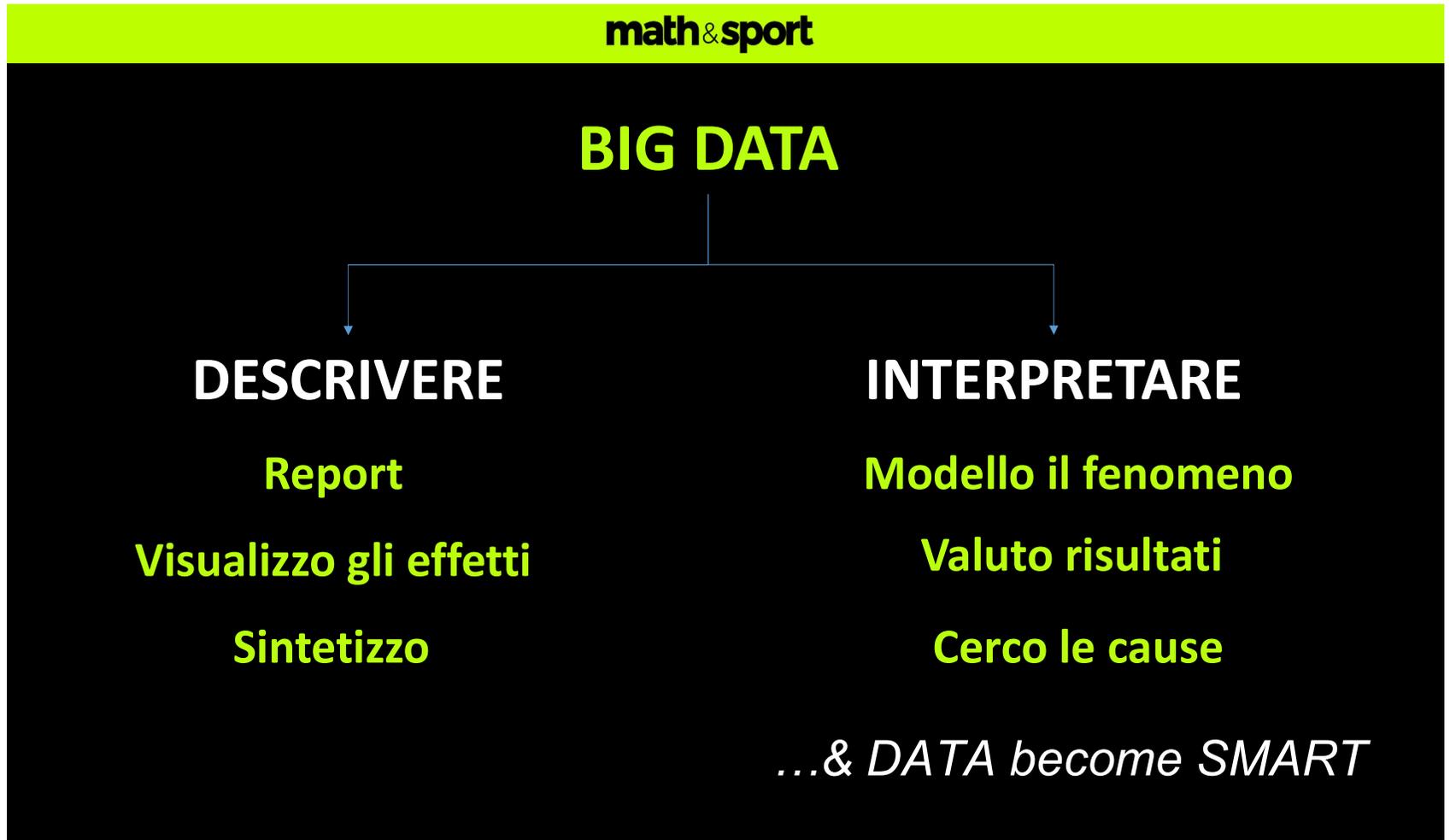


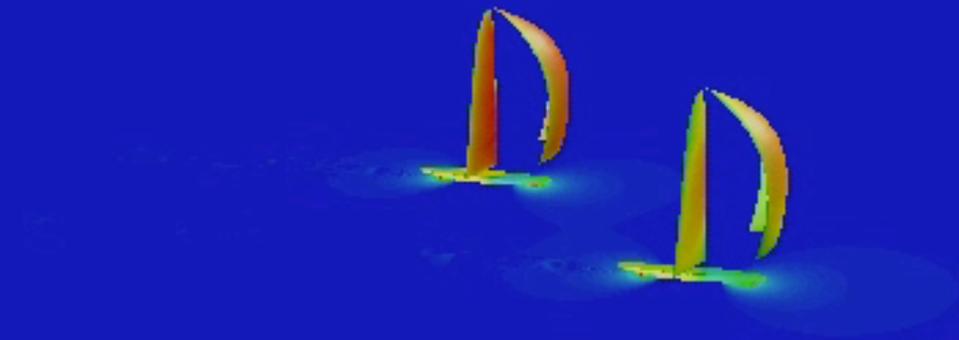
EFFETTI

RICERCA DELLE RELAZIONI
CAUSA-EFFETTO

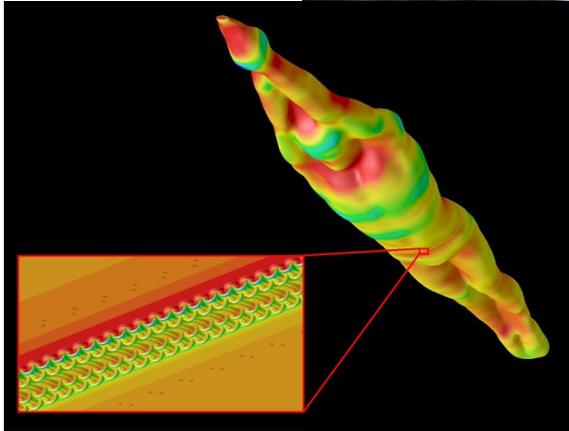
CAUSE

Chi?
Dove?
Quando?
Come?





Nuotatori reali e virtuali... (N.Parolini, A.Veneziani)



POWER SKIN *Extreme*



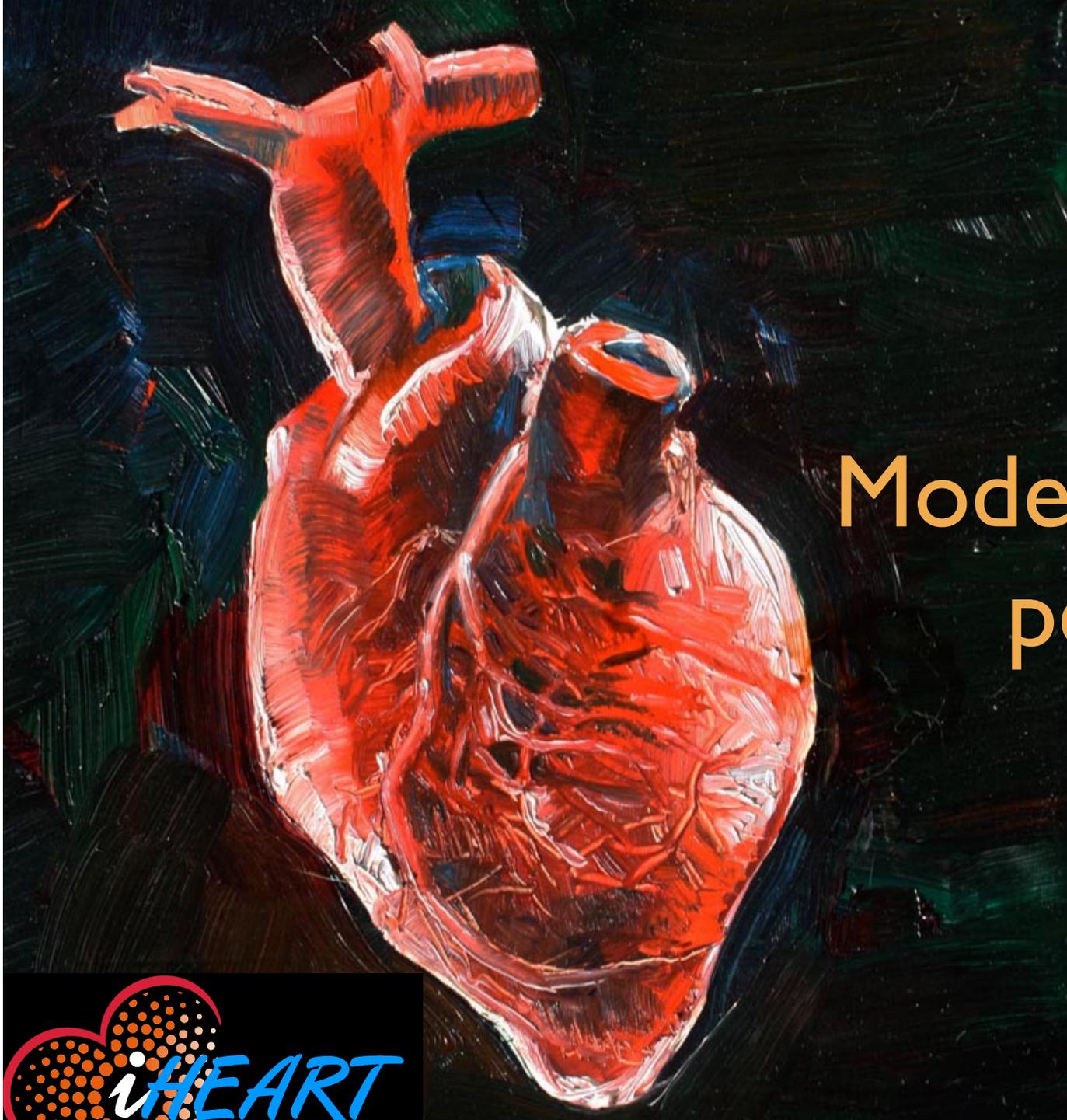


Emilia (IT) earthquake
29.05.2012, M_w 6.0

Courtesy of G. Penna

Emilia earthquake, 29.05.2012, M_w 6.0





Modelli matematici per la funzione cardiaca



LifeV



POLITECNICO
MILANO 1863



Oltre le Immagini Cliniche (RX, TAC, MRI)

Per una Migliore Comprensione della Fisiologia

Analisi di Scenari di Patologie Cardiache

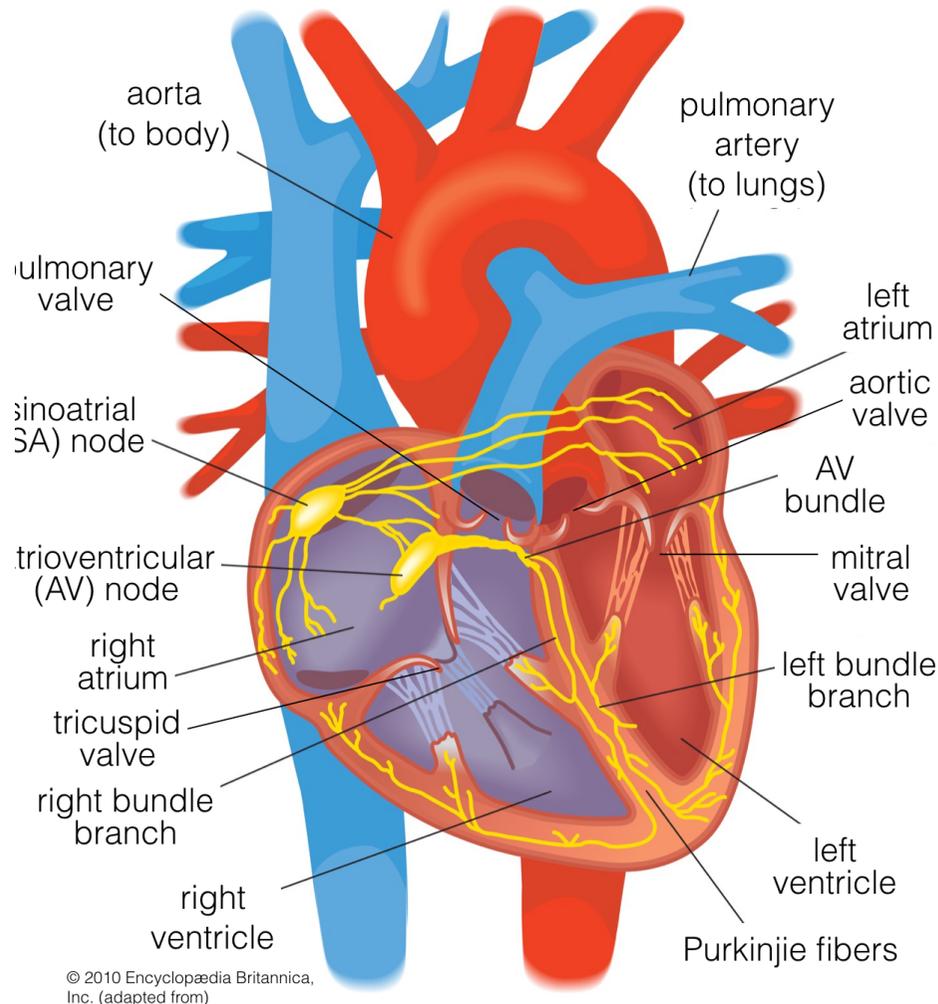
Pianificazione Terapeutica e Chirurgica

Cardiac anatomy

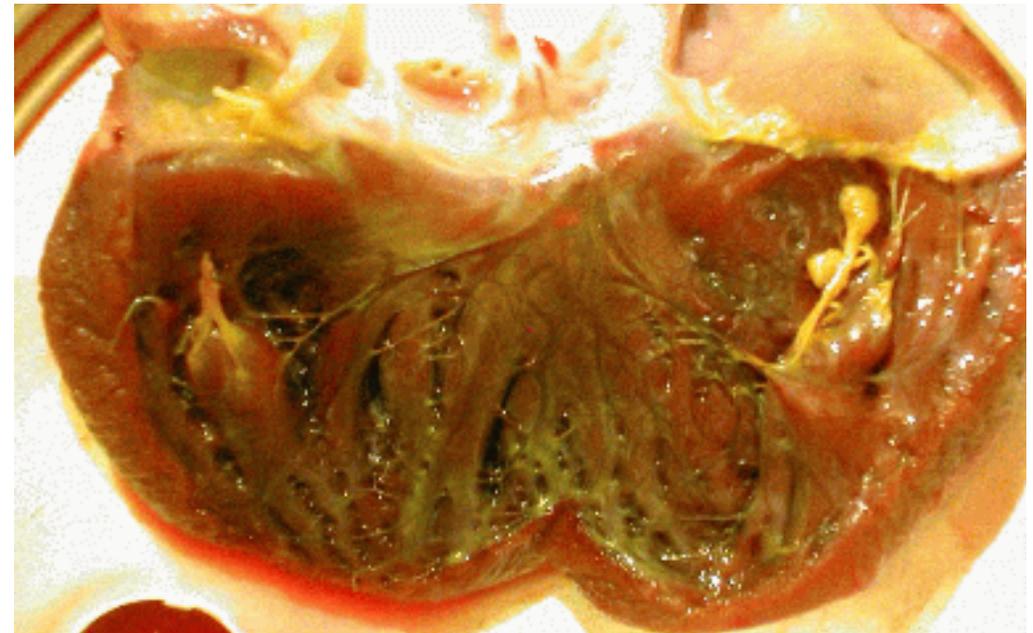


Cardiac Electrical Activity

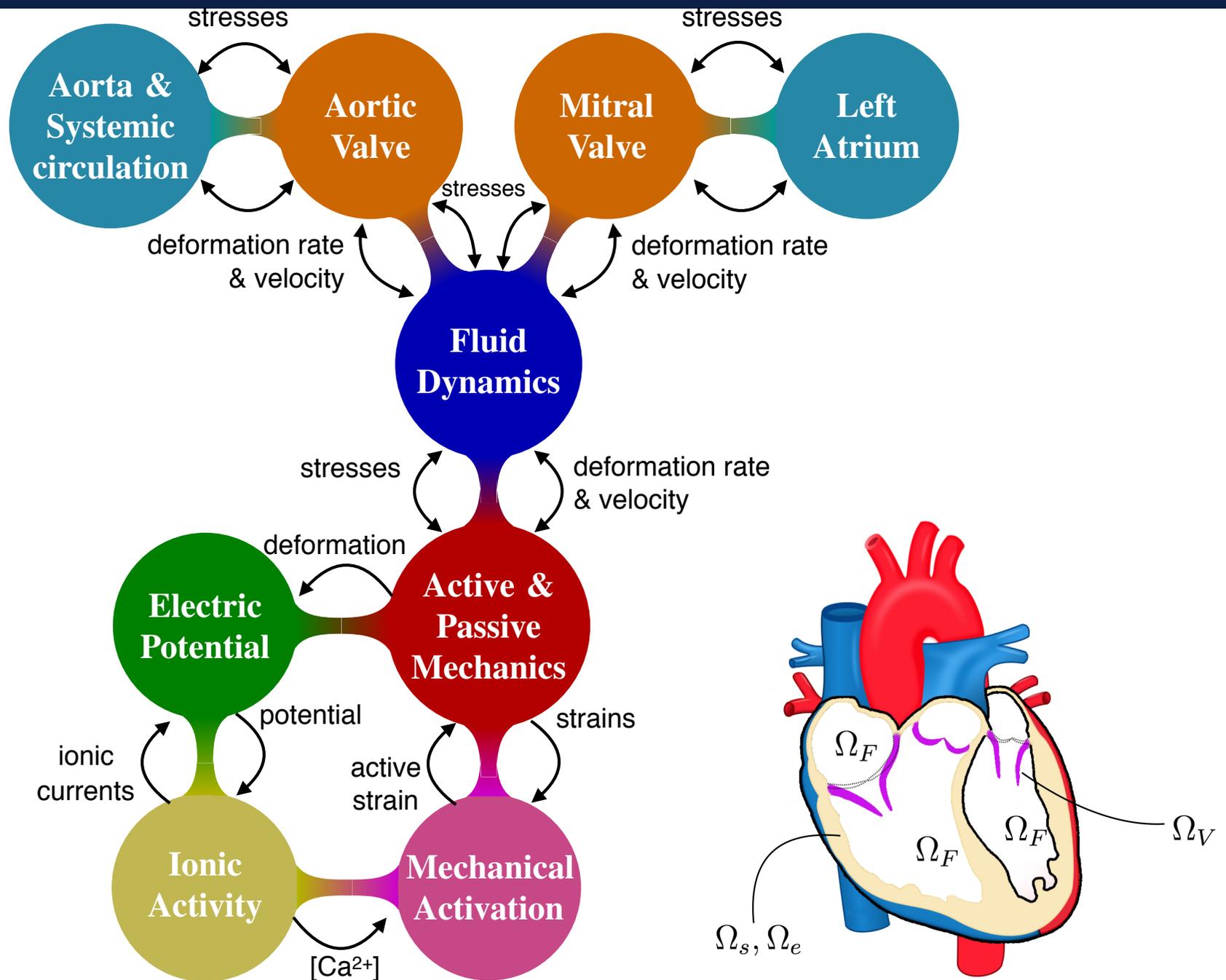
- The electrical signal starts in the **sino-atrial node**, where pacemaker cells auto-regulate their electrical activity. The excitation spreads through the atria which contract and push the blood to the ventricles.
- The signal reaches the **atrio-ventricular node** after about 120 ms.



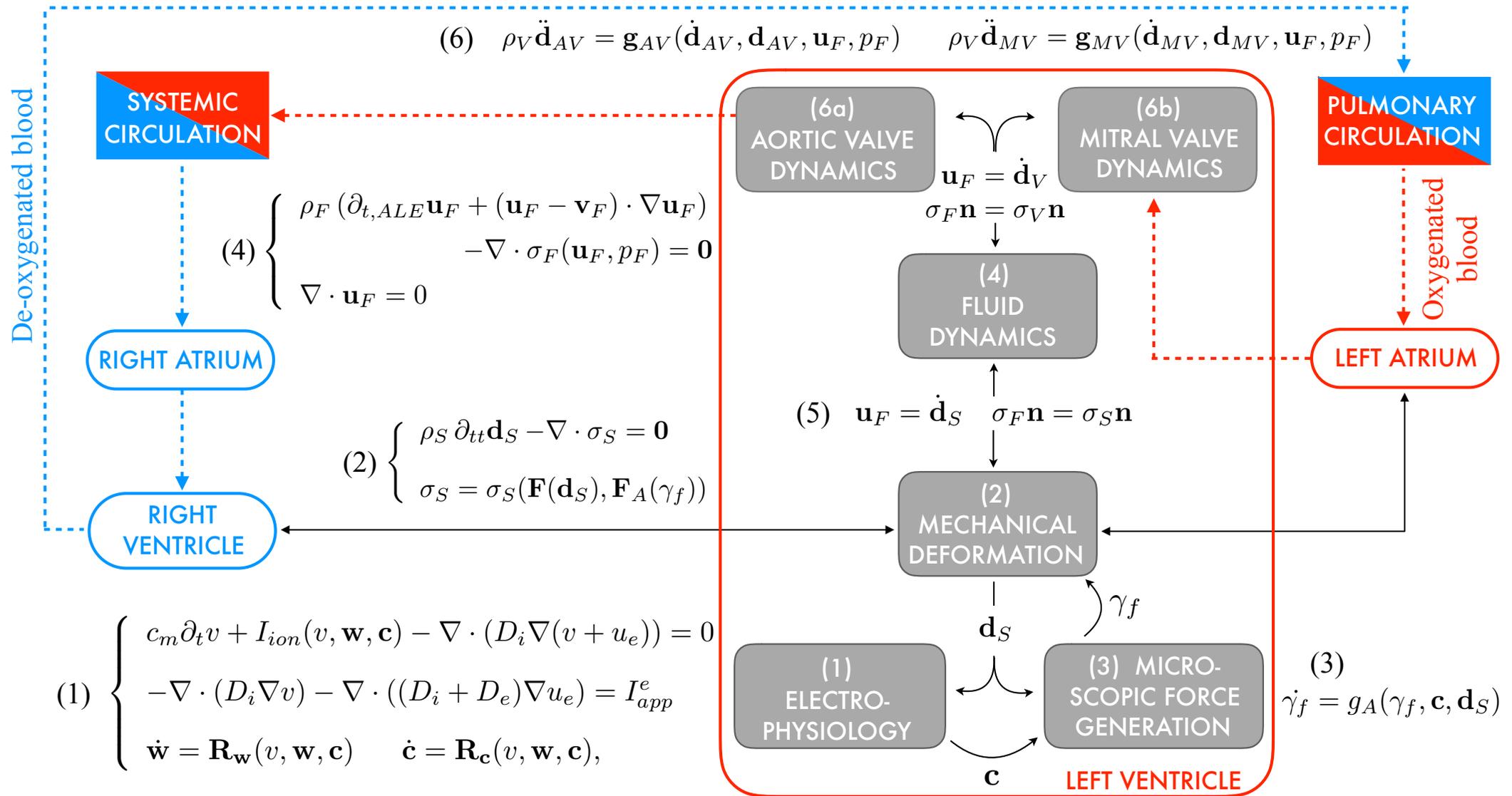
- In 40 ms the signal reaches the **Purkinje fibers**
- where it travels at 2 m/s. These cells run
- throughout the myocardium and connect with the
- endocardium, but are electrically isolated.



“Computational Thinking” - The core cardiac models and their coupling



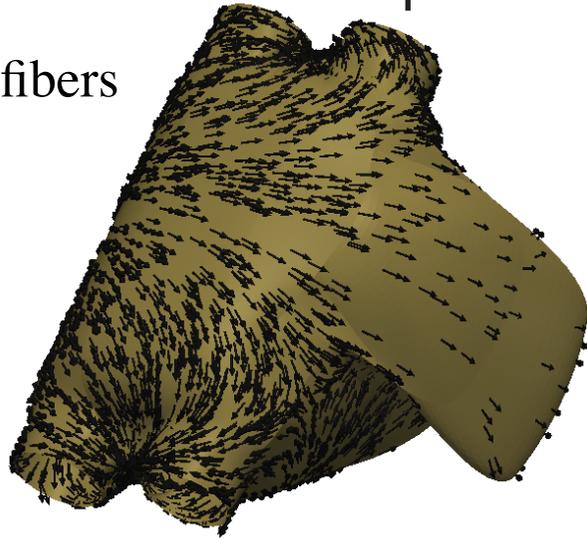
The problem



Electrophysiology on Left Atrium

Isogeometric Analysis (IGA) for the **Monodomain** equation: propagation of transmembrane potential on human left atrium (LA)

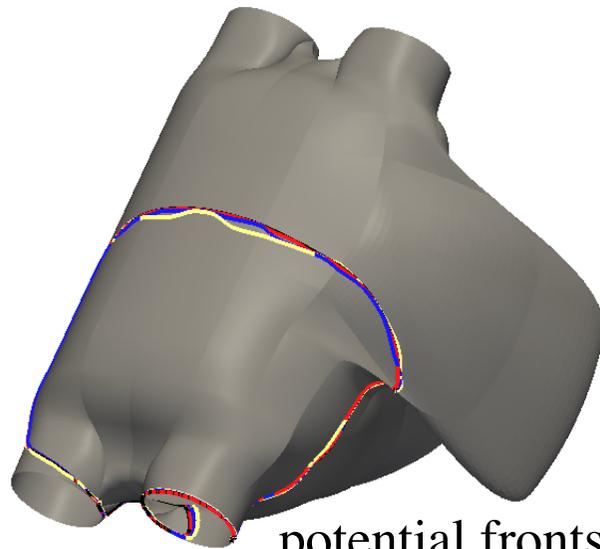
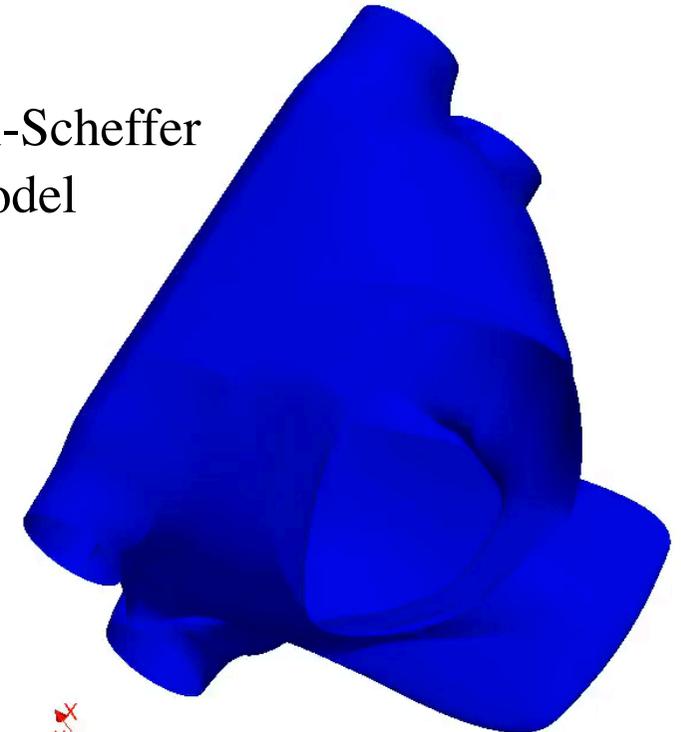
fibers



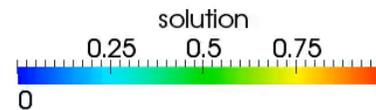
IGA with **high order continuous** NURBS basis functions on the LA surface controls **grid dispersion**



Mitchell-Scheffer
model



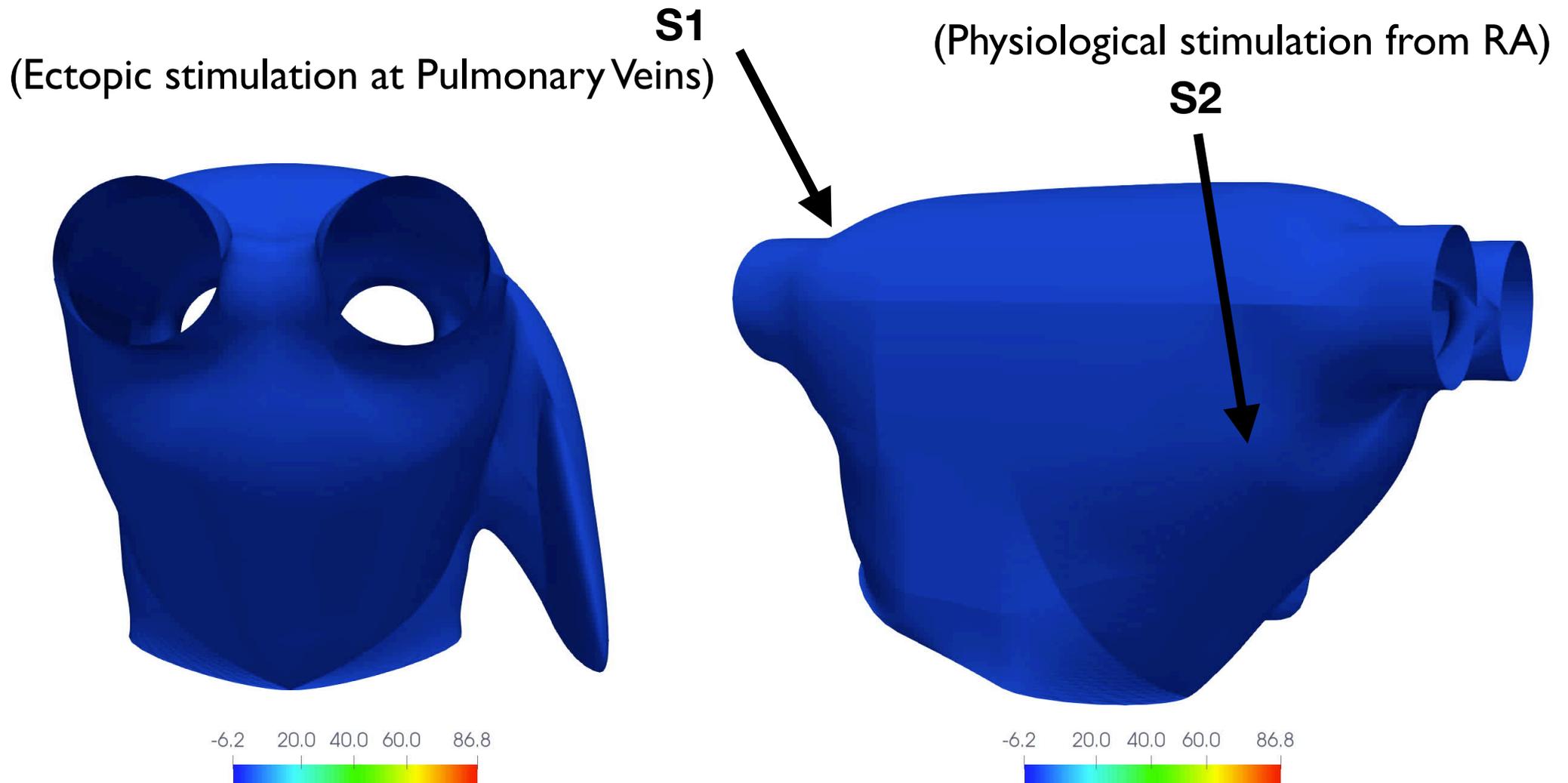
potential fronts for
different meshes



[A.Patelli, L.Dede', T.Lassila, A.Bartezzaghi and A.Q., CMAME 2017]

Simulating Atrial Tachycardia

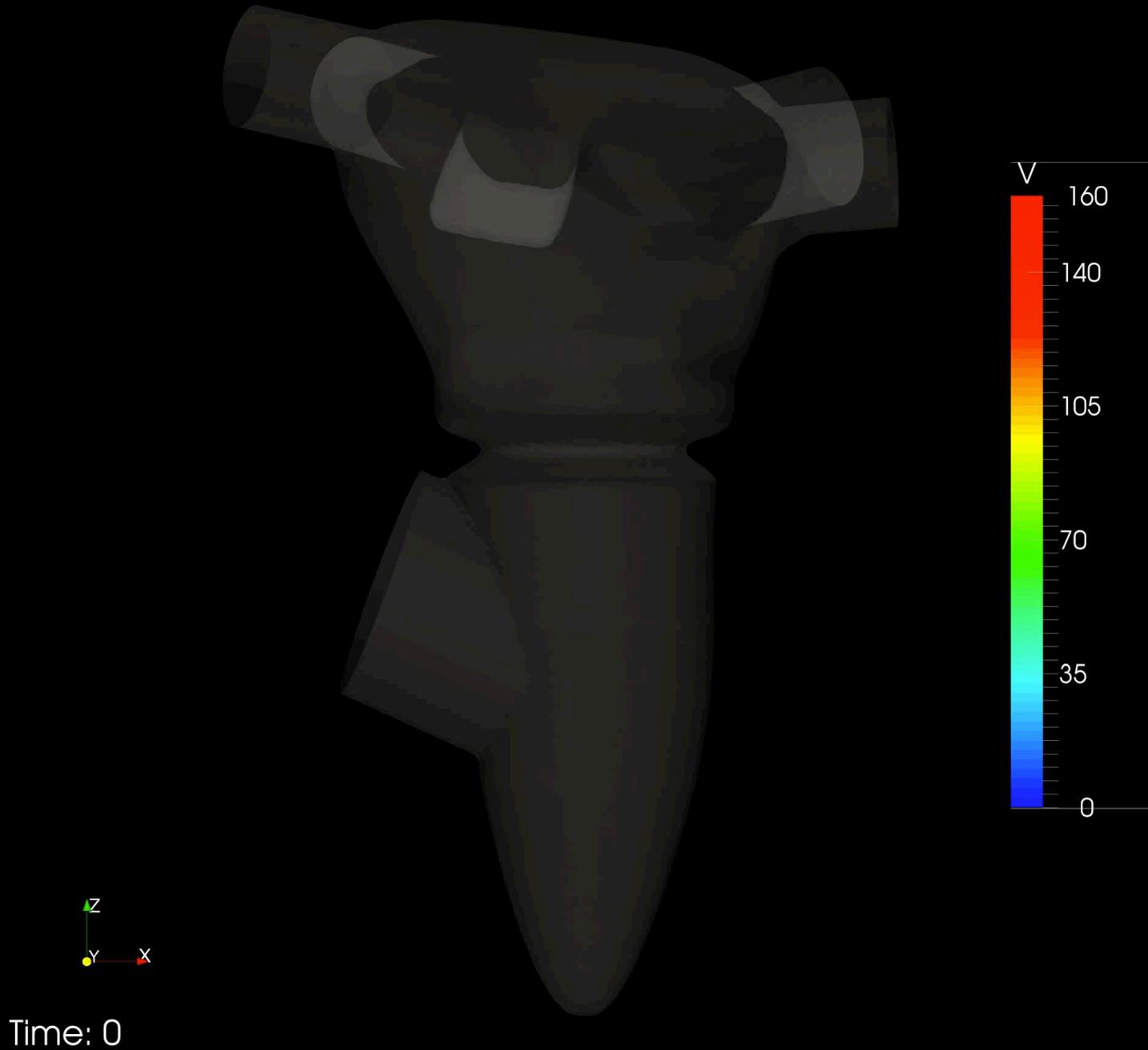
Eight re-entry induced by S1-S2 stimulation on the LA in a more realistic case



Transmembrane potential - mV

[S. Fresca, MOX, Politecnico di Milano]

Atrioventricular flow (left heart)



Alfio Quarteroni Paola Gervasio

I delfini delle Eolie, i battiti del cuore, i motori di ricerca

**Modelli matematici
per comprendere,
simulare, esplorare**



4 aspetti caratterizzanti





Modelli matematici per affrontare e risolvere problemi nei campi più svariati:
come garantire la sopravvivenza di una specie?

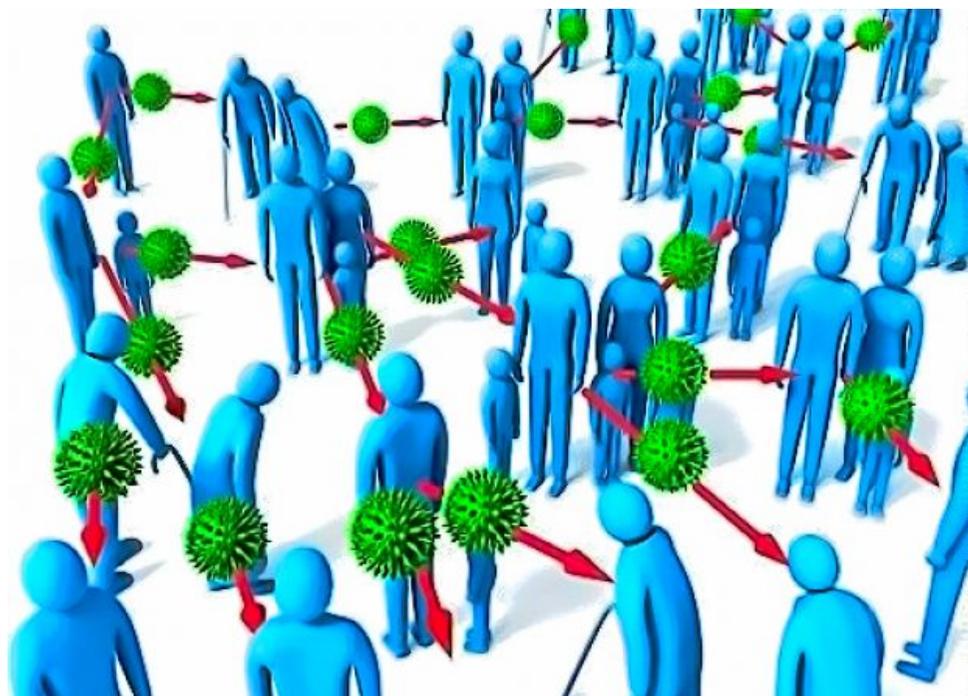


Modelli matematici per affrontare e risolvere problemi nei campi più svariati:
come si comporteranno i mercati finanziari?



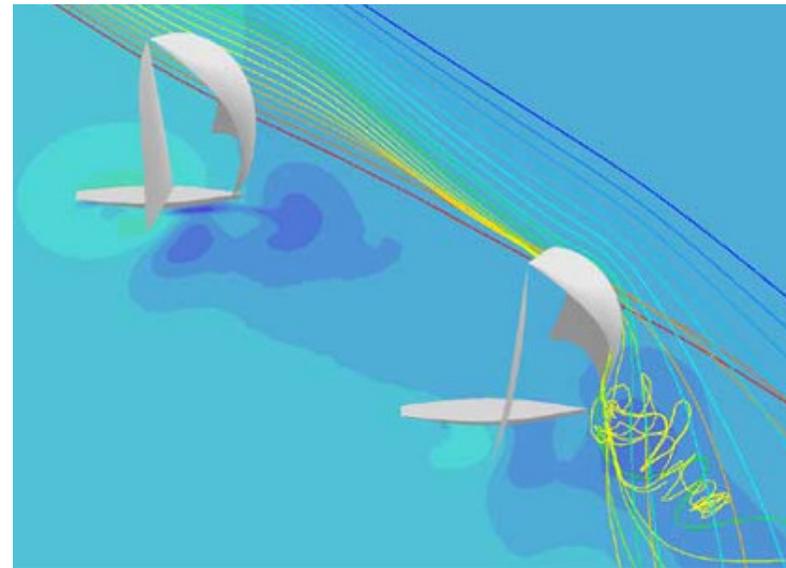
Modelli matematici per affrontare e risolvere problemi nei campi più svariati:

è possibile prevedere come si propagano le epidemie?

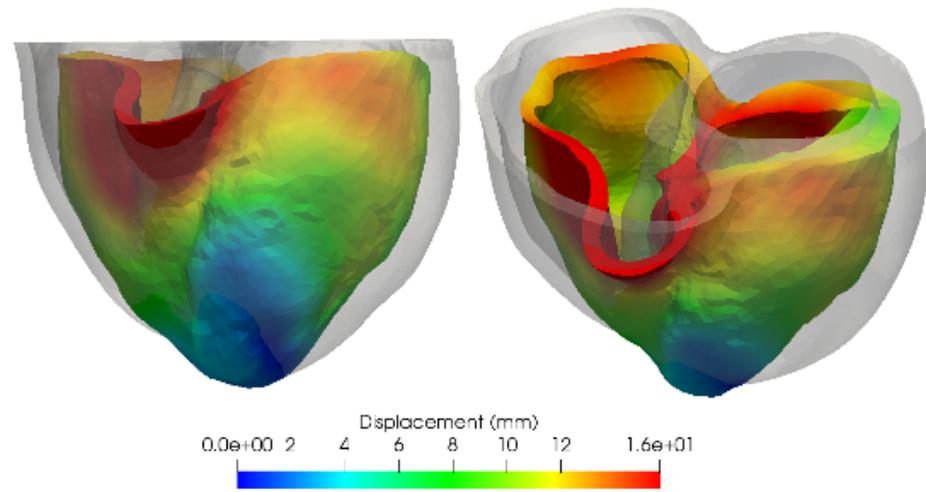




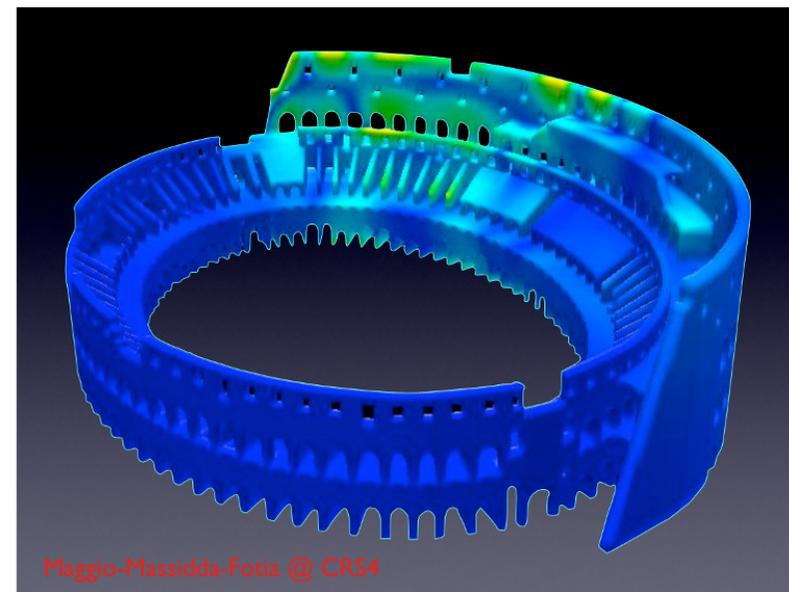
Laboratorio virtuale (a basso costo)



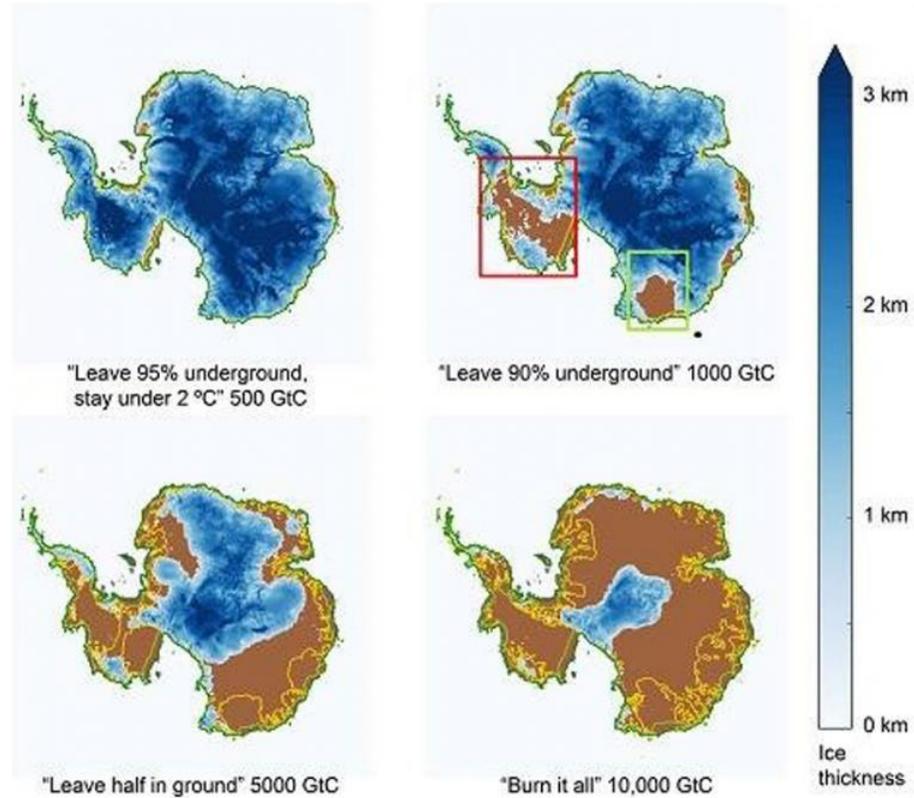
Non invasiva



Non distruttiva



Scenari virtuali





Polimorfismo (= Sintesi)

Un modello (Poisson) \rightarrow tante applicazioni

quanto è isolato termicamente un edificio e come si trasmette il calore attraverso le sue pareti?



Un modello (Poisson) \rightarrow tante applicazioni

come si diffonde una sostanza solubile in un liquido?



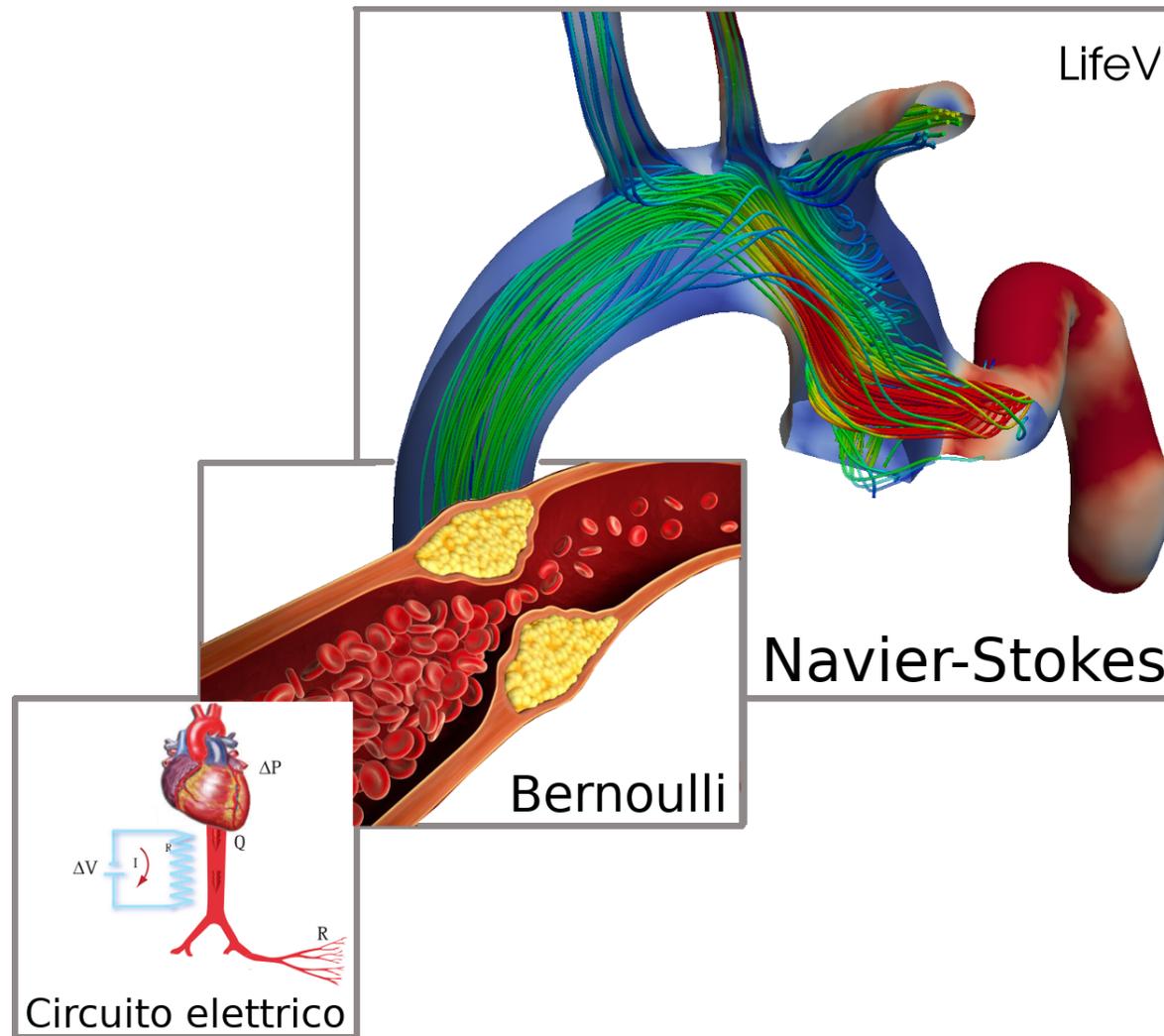
Un modello (Navier-Stokes) \rightarrow tante applicazioni

il moto di due fluidi con densità diversa come acqua e petrolio greggio



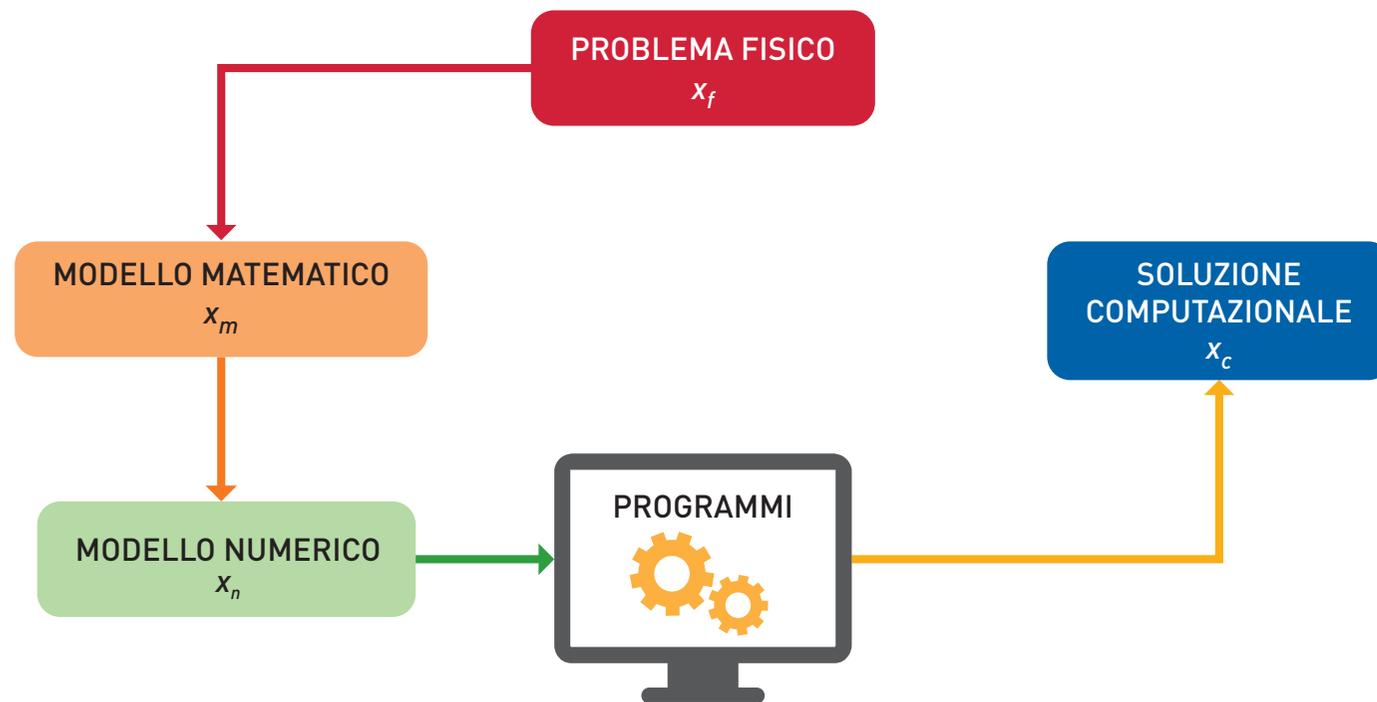


Un problema → tanti modelli



Matematica: Una Disciplina Funzionale ad Altre

Nel libro proponiamo una piccola rivoluzione a livello di contenuti, dove **matematica** e **computer science** trovano un **matrimonio di interessi**

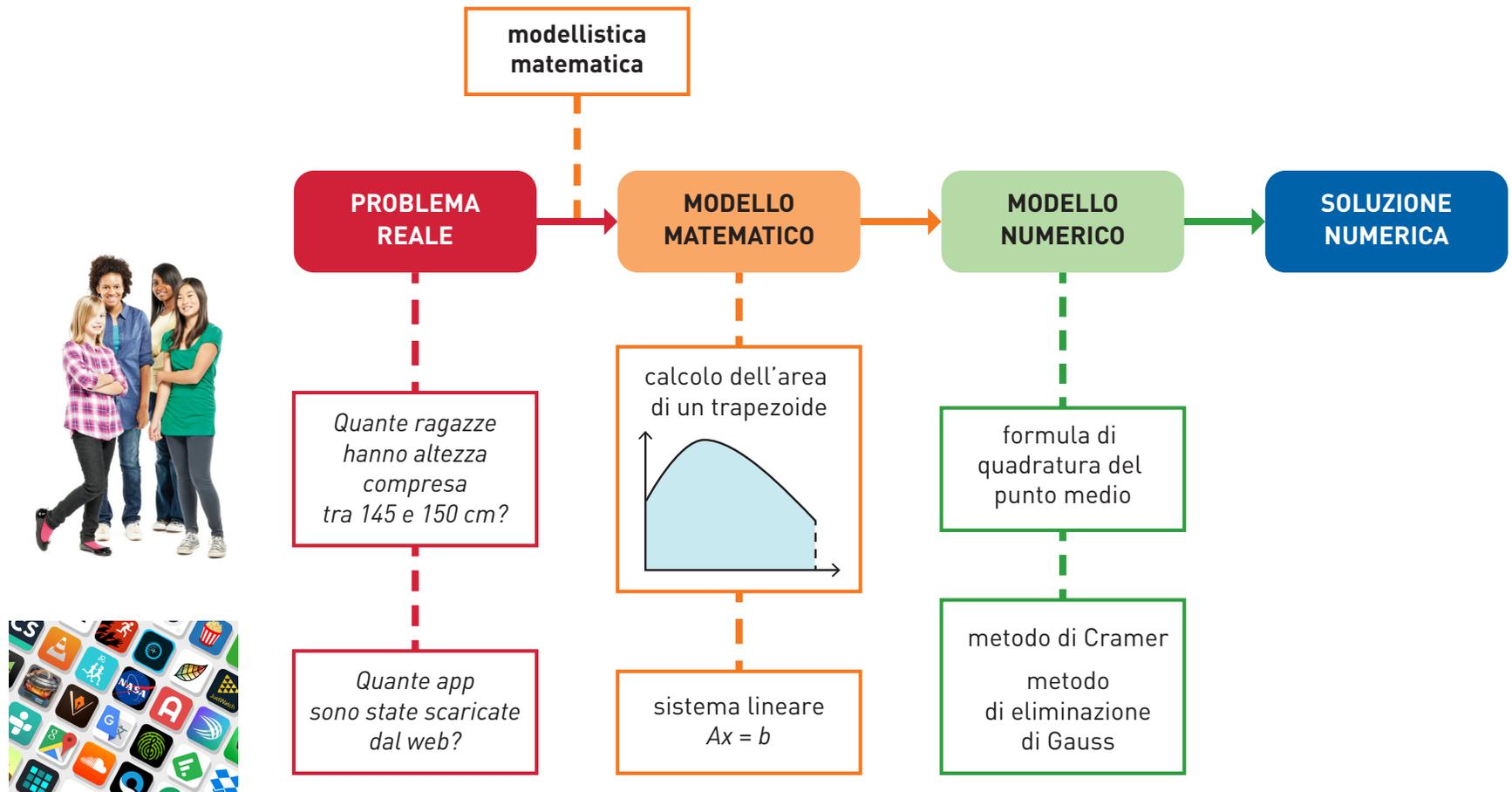


Indice

1. Warm-up sui modelli
2. Giusto per cominciare
 - 2.1 Quando non conosciamo la soluzione del modello matematico
 - 2.2 Vettori e matrici per gestire la complessità
3. Facciamo i conti con il computer
4. Un surfer virtuale per navigare in rete
5. Una rete di capillari
6. Prede e predatori nel mare della matematica
7. Take home message
8. Esercizi proposti con svolgimento

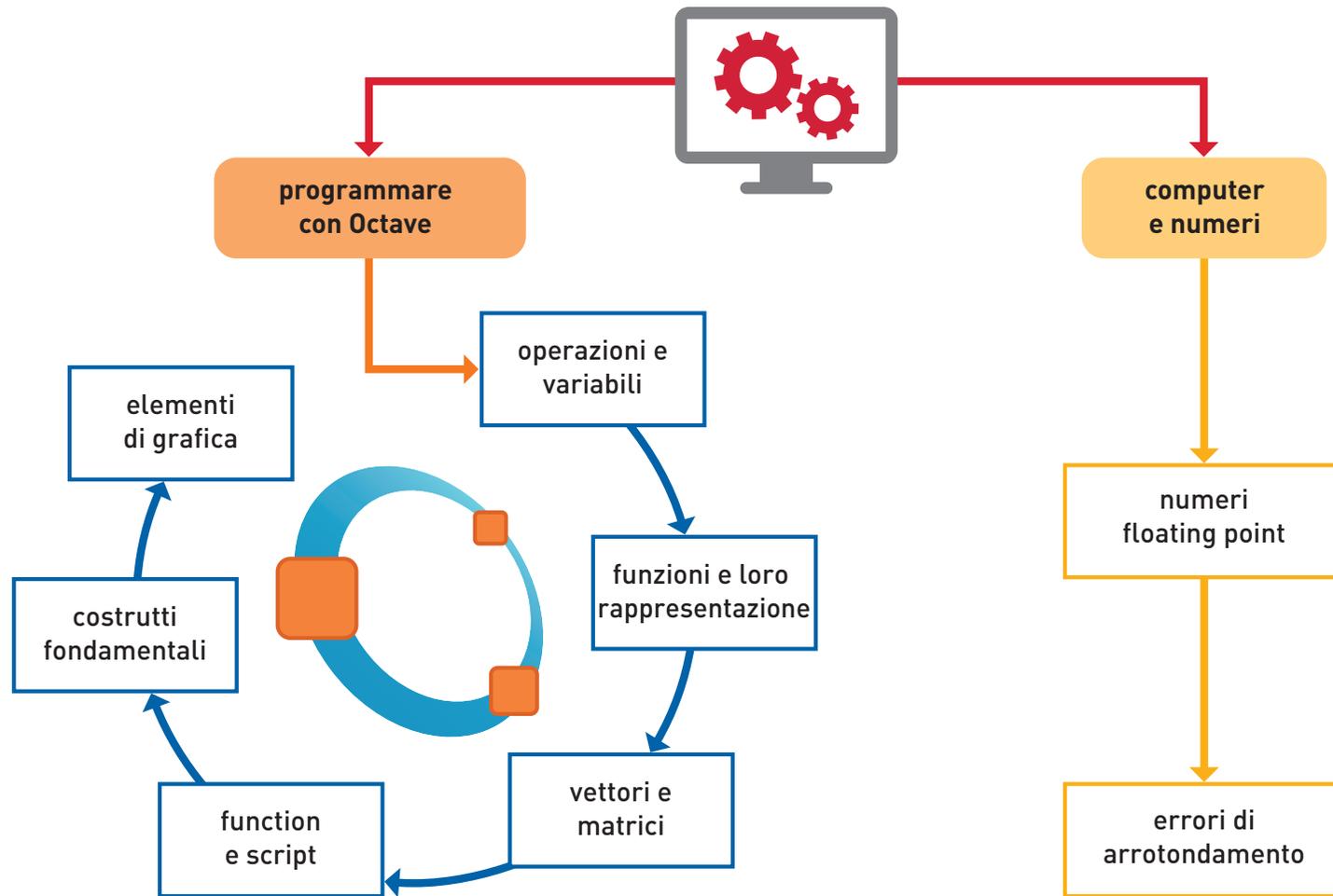
Warm Up per Tutte le Classi (3[^]-4[^]-5[^])

Due semplici problemi iniziali, importanti per la loro valenza, al fine di far emergere i contenuti



Per Chi Vuole Programmare (non Obbligatorio)

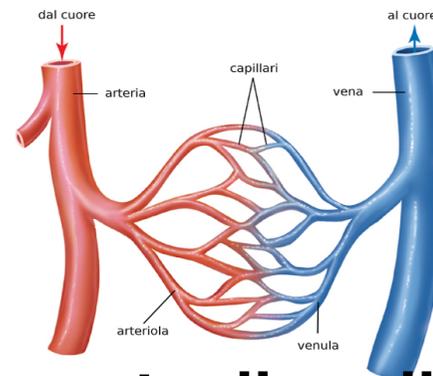
Un capitolo dedicato alla programmazione in Octave



I motori di ricerca



Tre capitoli per valorizzare i contenuti su 3 classi di applicazioni rilevanti molto diverse fra loro

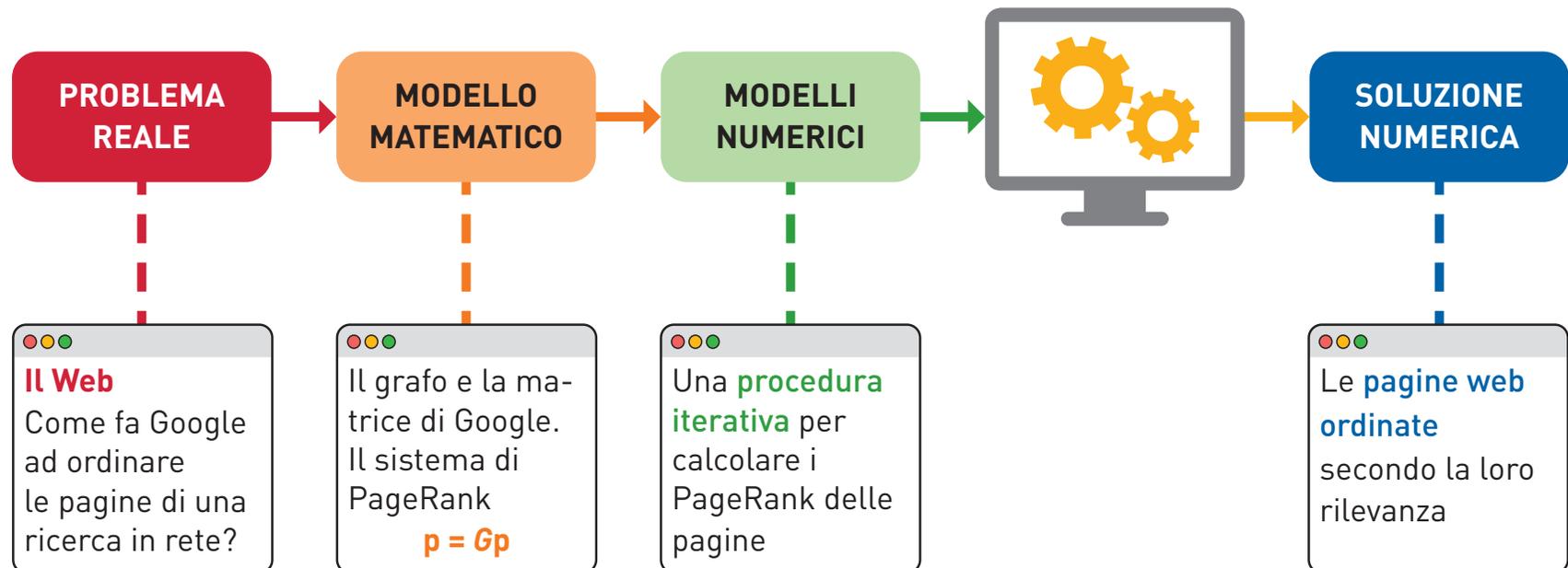


Una rete di capillari



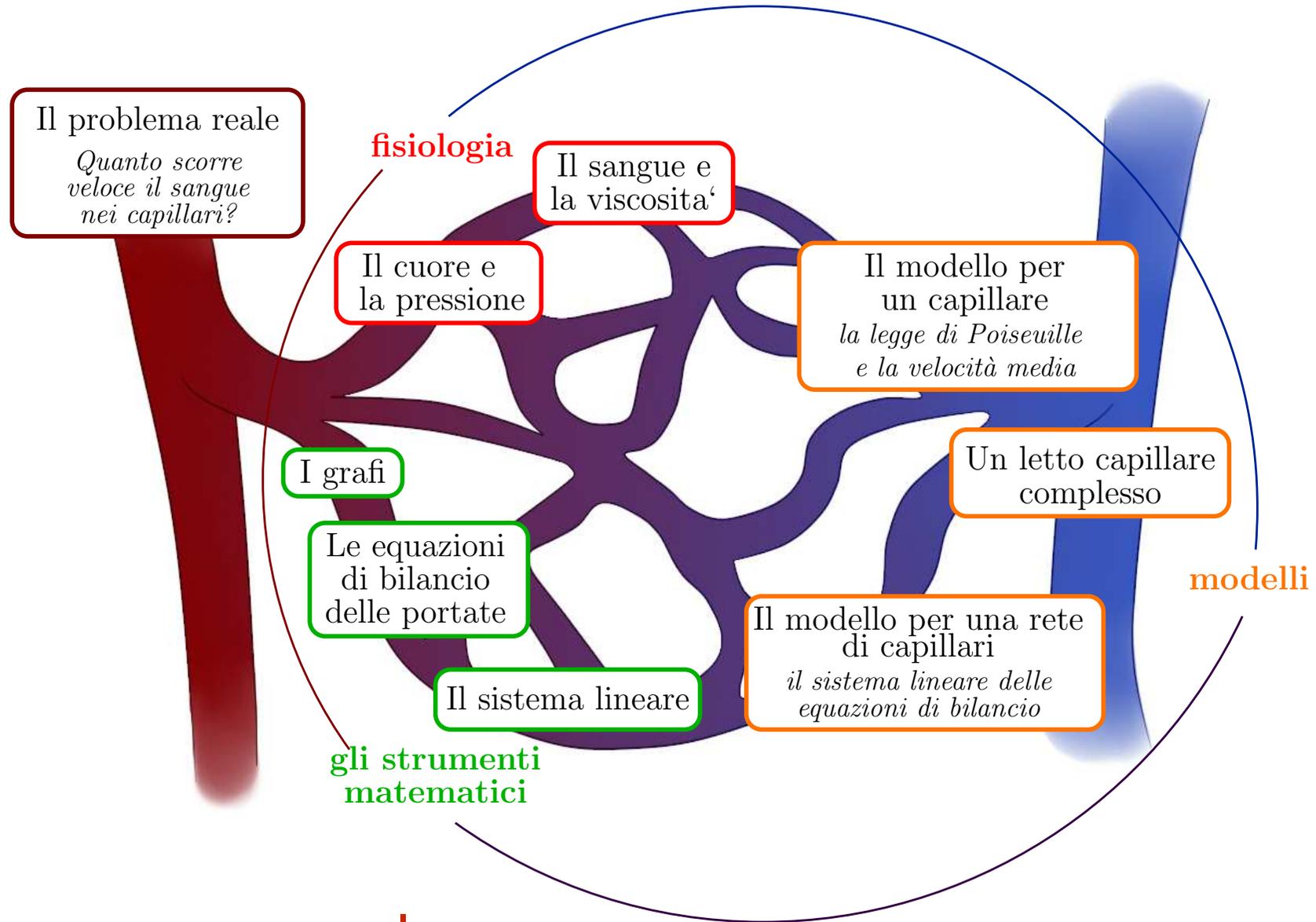
Prede e predatori

Capitolo 4 – Un surfer virtuale per navigare in rete



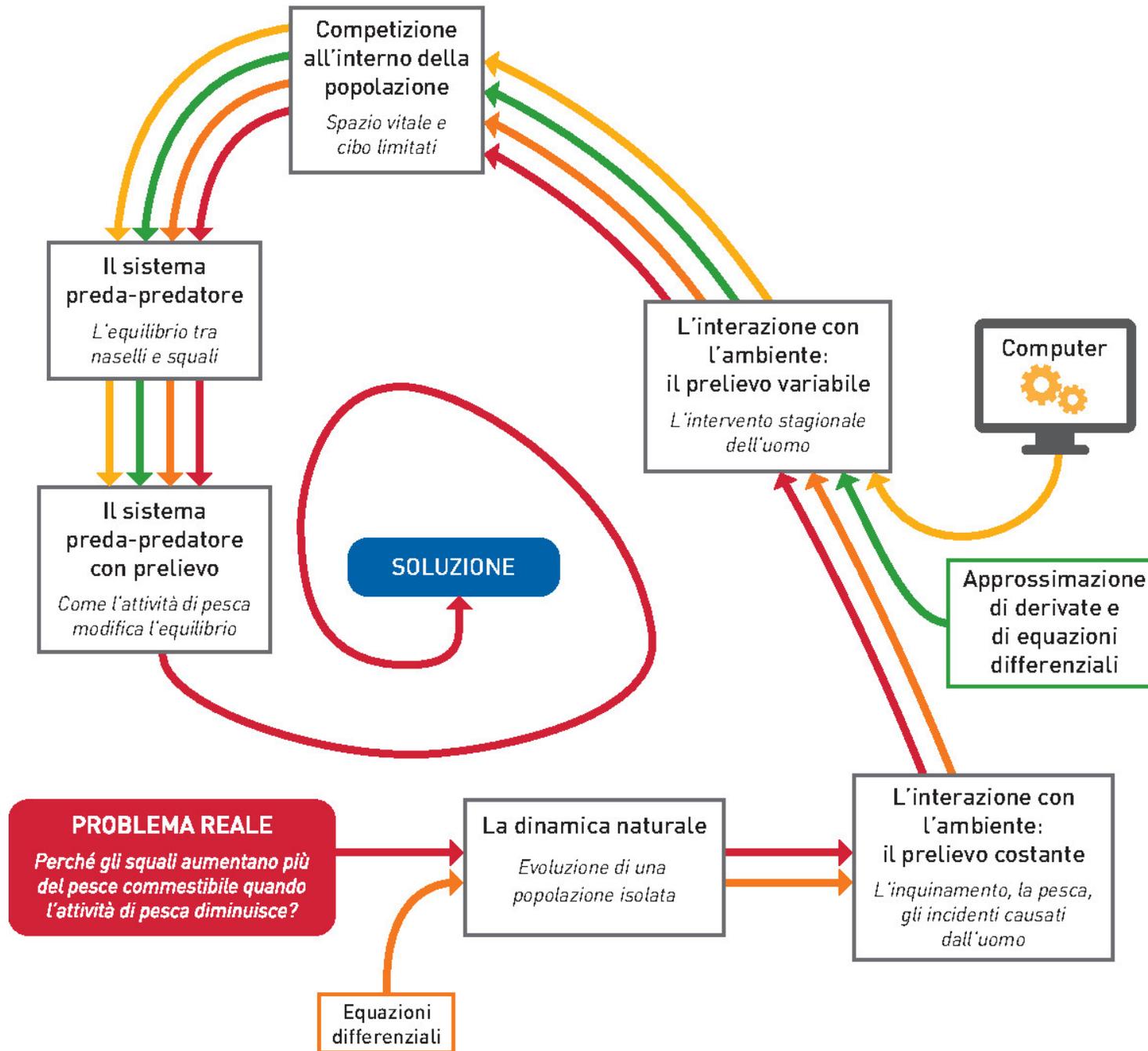
Classe: dalla 3^a in poi

Capitolo 5 - Una rete di capillari

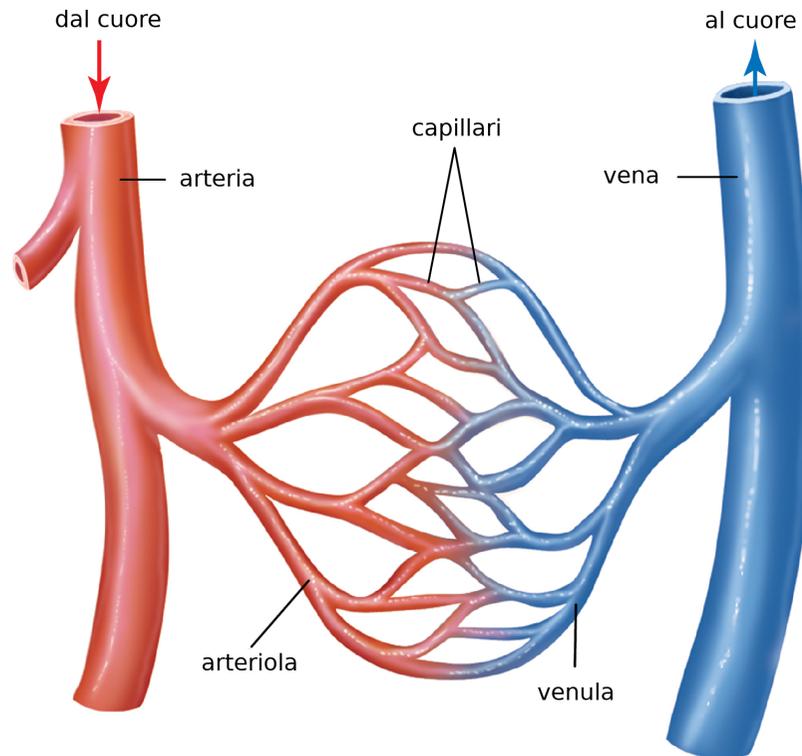


La mappa concettuale

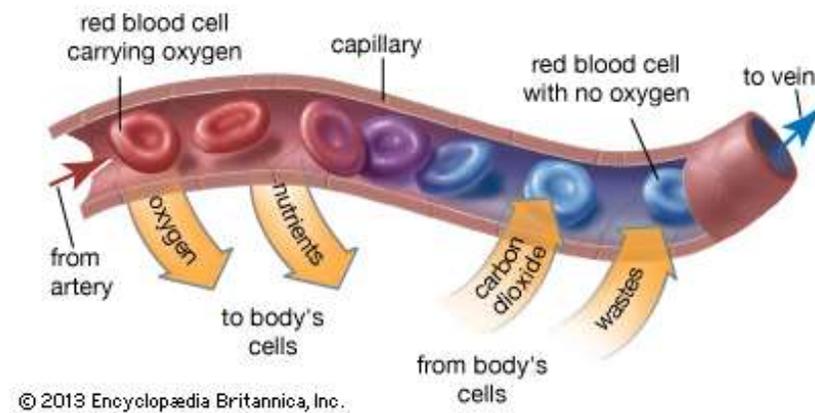
Capitolo 6 - Prede e Predatori nel Mare della Matematica



Capitolo 5 - Il sangue: né troppo veloce, né troppo lento



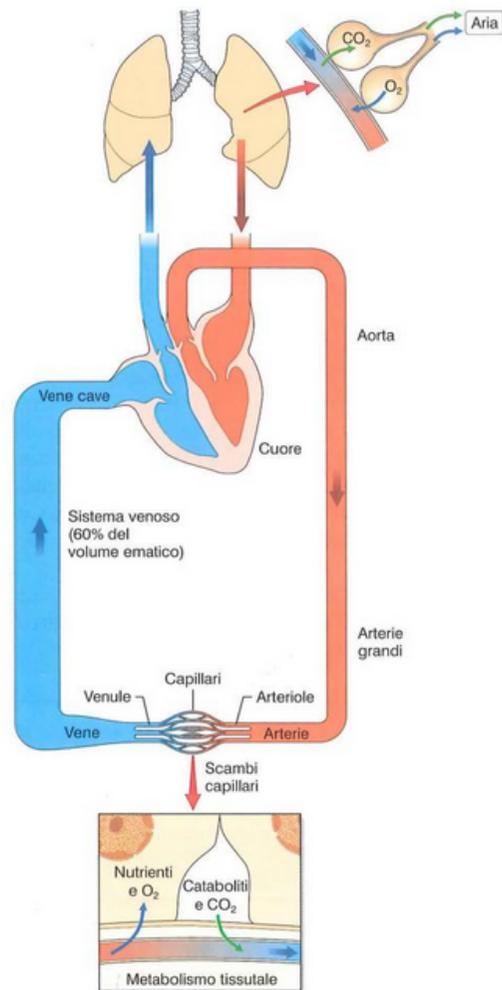
© 2013 Encyclopædia Britannica, Inc.



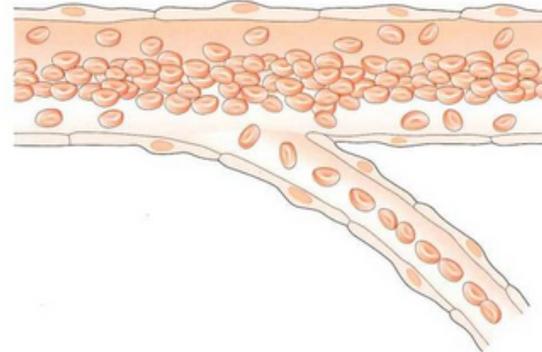
Problema. Da cosa è regolato il flusso del sangue nei capillari? Siamo in grado di descrivere a quale velocità scorre il sangue in un letto capillare?

L'analisi del problema reale

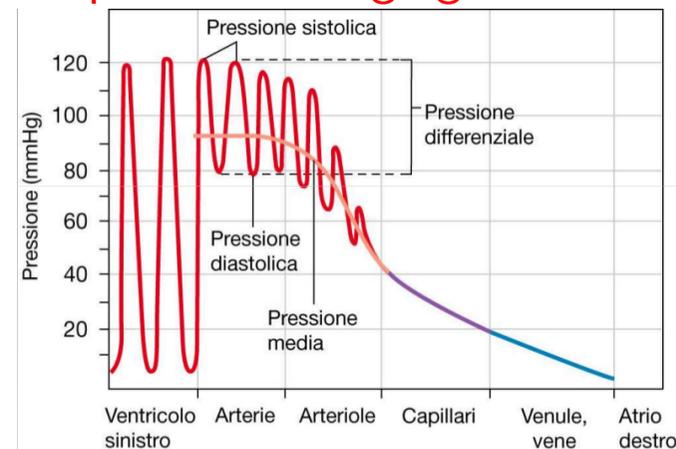
I battiti del cuore



Si fa presto a dire sangue
Fluidi newtoniani e non-newtoniani
La viscosità



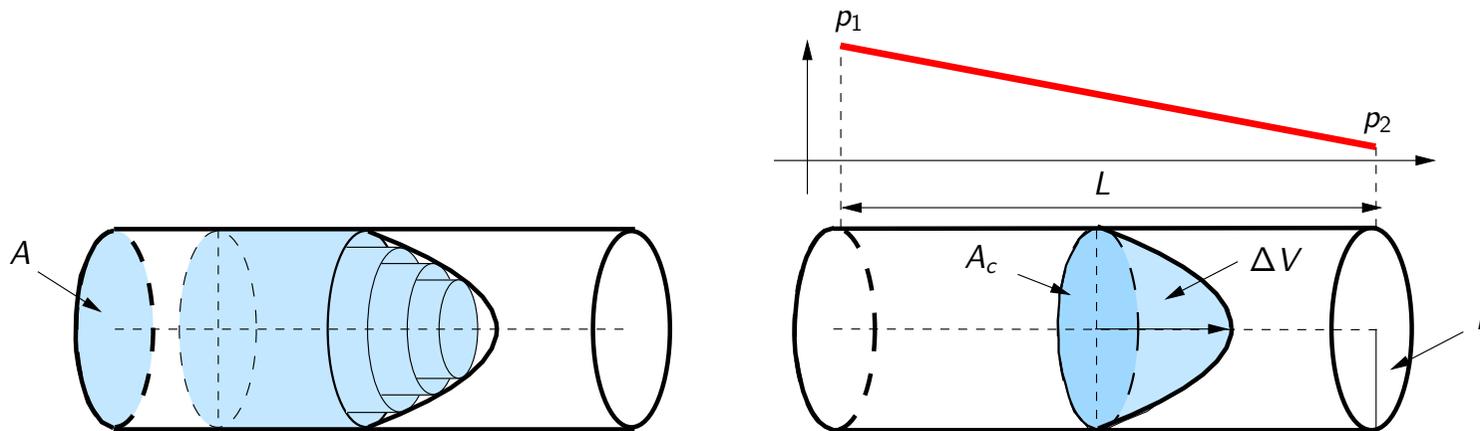
La pressione sanguigna



La complessità del problema è molto elevata!

Nonostante le *semplificazioni* ci allontanino dalla realtà nella sua completezza, esse ci consentono comunque di fornire una rappresentazione accettabile del fenomeno che vogliamo analizzare.

Il moto laminare di un fluido viscoso in un condotto cilindrico



Portata

- + Legge di Poiseuille
- + velocità media

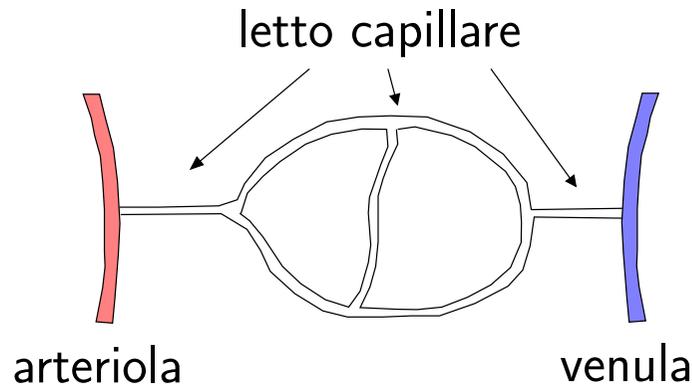
= **Modello per un capillare**

Dati : r, L, p_1, p_2, μ

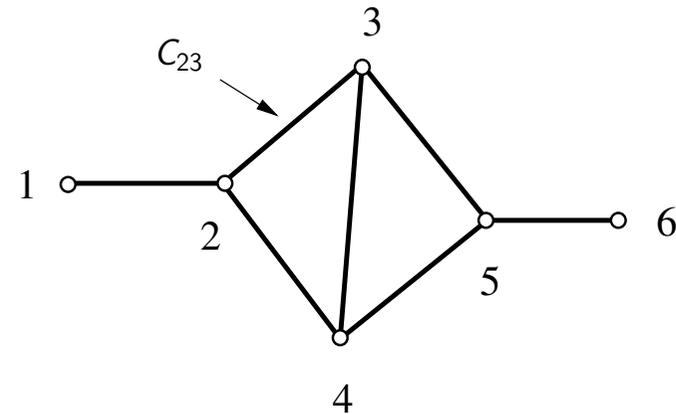
Modello : $\bar{v} = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{8\mu \cdot L}$

Soluzione : \bar{v} velocità media nel capillare

Risaliamo la china: un piccolo letto capillare

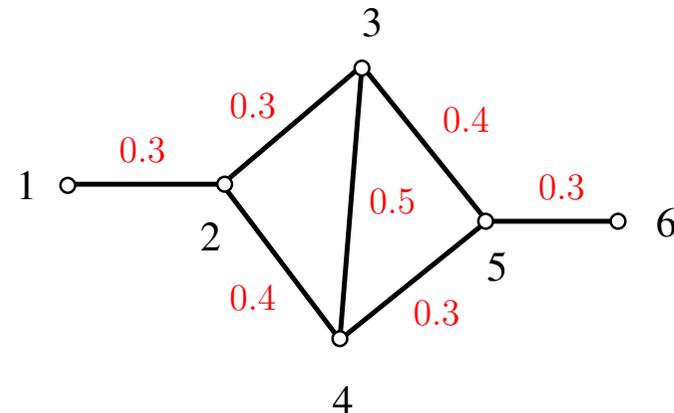


L'astrazione: dal letto capillare al grafo



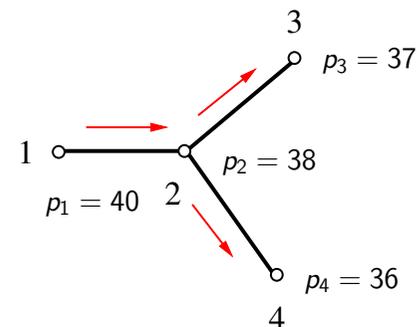
La **matrice** di connessione del grafo

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$



Un sistema lineare

- Per calcolare le velocità servono le pressioni
- Per calcolare le pressioni servono le equazioni di bilancio
- Un **sistema di equazioni di bilancio**



$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_1 = p_a \quad (\text{nodo 1}) \\
 -\frac{1}{L_{21}} p_1 + \left(\frac{1}{L_{21}} + \frac{1}{L_{23}} + \frac{1}{L_{24}} \right) p_2 - \frac{1}{L_{23}} p_3 - \frac{1}{L_{24}} p_4 = 0 \quad (\text{nodo 2}) \\
 -\frac{L_{32}}{1} p_2 + \left(\frac{1}{L_{32}} + \frac{1}{L_{34}} + \frac{1}{L_{35}} \right) p_3 - \frac{1}{L_{34}} p_4 - \frac{L_{35}}{1} p_5 = 0 \quad (\text{nodo 3}) \\
 -\frac{L_{42}}{1} p_2 - \frac{L_{43}}{1} p_3 + \left(\frac{1}{L_{42}} + \frac{1}{L_{43}} + \frac{1}{L_{45}} \right) p_4 - \frac{L_{45}}{1} p_5 = 0 \quad (\text{nodo 4}) \\
 -\frac{L_{53}}{1} p_3 - \frac{L_{54}}{1} p_4 + \left(\frac{1}{L_{53}} + \frac{1}{L_{54}} + \frac{1}{L_{56}} \right) p_5 - \frac{L_{56}}{1} p_6 = 0 \quad (\text{nodo 5}) \\
 p_6 = p_v \quad (\text{nodo 6})
 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$$

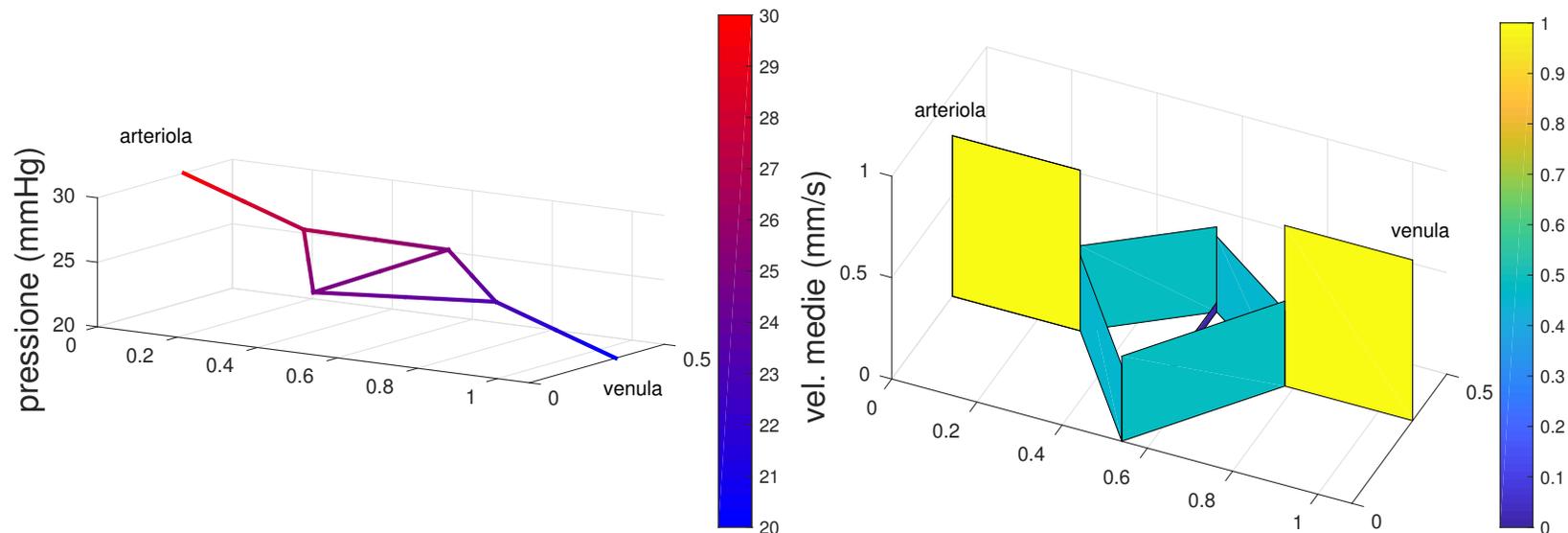
Dati : matrice G del grafo, pressione nell'arteriola e nella venula

Modello : il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$

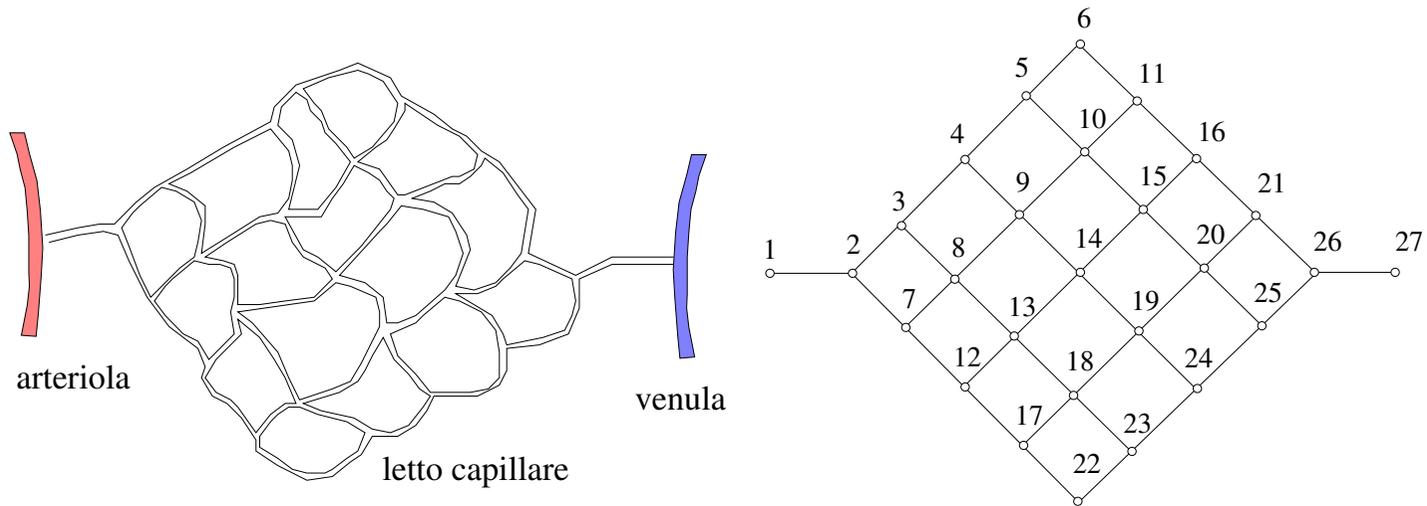
Soluzione : il vettore \mathbf{p} delle pressioni nei nodi del grafo

Dal modello alla soluzione

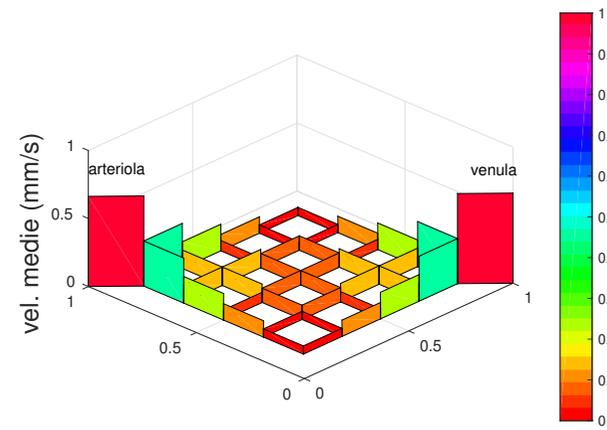
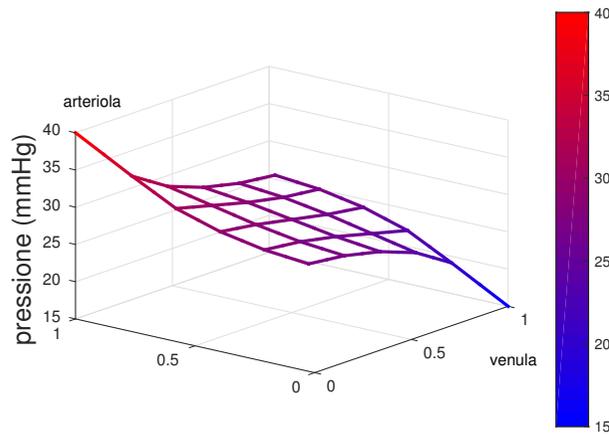
- Un **algoritmo** per costruire la matrice A del sistema lineare
- Il **Metodo di Eliminazione di Gauss** per risolvere il sistema lineare (→ Capitolo 2)
- L'ausilio di OCTAVE per svolgere i conti su un **computer** e rappresentare le soluzioni numeriche ottenute (→ Capitolo 3 per approfondimenti)



Un problema piu' realistico



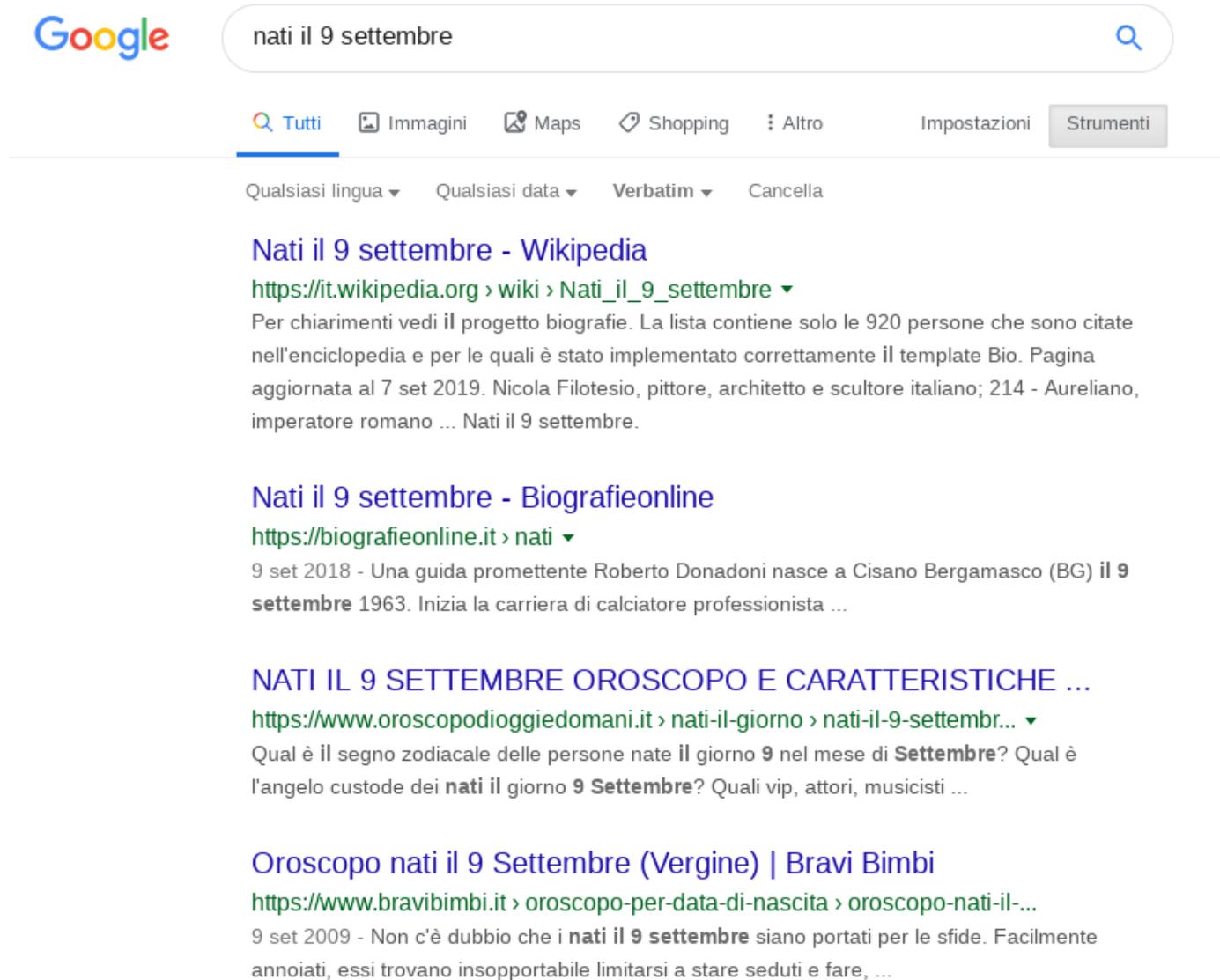
Grafo → **pressioni** → **portate** → **velocità**



Indice

1. Warm-up sui modelli
2. Giusto per cominciare
 - 2.1 Quando non conosciamo la soluzione del modello matematico
 - 2.2 Vettori e matrici per gestire la complessità
3. Facciamo i conti con il computer
4. Un surfer virtuale per navigare in rete
5. Una rete di capillari
6. Prede e predatori nel mare della matematica
7. Take home message
8. Esercizi proposti con svolgimento

Nati il 9 settembre



Google

nati il 9 settembre

Tutti Immagini Maps Shopping Altro Impostazioni Strumenti

Qualsiasi lingua ▼ Qualsiasi data ▼ Verbatim ▼ Cancella

Nati il 9 settembre - Wikipedia
https://it.wikipedia.org/wiki/Nati_il_9_settembre ▼
Per chiarimenti vedi il progetto biografie. La lista contiene solo le 920 persone che sono citate nell'enciclopedia e per le quali è stato implementato correttamente il template Bio. Pagina aggiornata al 7 set 2019. Nicola Filotesio, pittore, architetto e scultore italiano; 214 - Aureliano, imperatore romano ... Nati il 9 settembre.

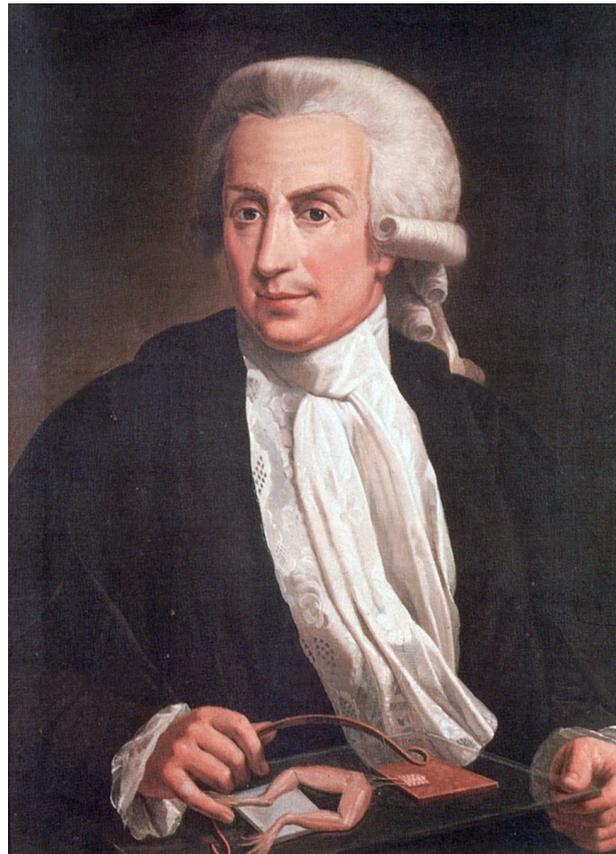
Nati il 9 settembre - Biografieonline
<https://biografieonline.it/nati> ▼
9 set 2018 - Una guida promettente Roberto Donadoni nasce a Cisano Bergamasco (BG) il **9 settembre** 1963. Inizia la carriera di calciatore professionista ...

NATI IL 9 SETTEMBRE OROSCOPO E CARATTERISTICHE ...
<https://www.oroscopodioggiadomani.it/nati-il-giorno/nati-il-9-settembr...> ▼
Qual è il segno zodiacale delle persone nate il giorno **9** nel mese di **Settembre**? Qual è l'angelo custode dei **nati** il giorno **9 Settembre**? Quali vip, attori, musicisti ...

Oroscopo nati il 9 Settembre (Vergine) | Bravi Bimbi
<https://www.bravibimbi.it/oroscopo-per-data-di-nascita/oroscopo-nati-il-...>
9 set 2009 - Non c'è dubbio che i **nati il 9 settembre** siano portati per le sfide. Facilmente annoiati, essi trovano insopportabile limitarsi a stare seduti e fare, ...

Nati il 9 settembre

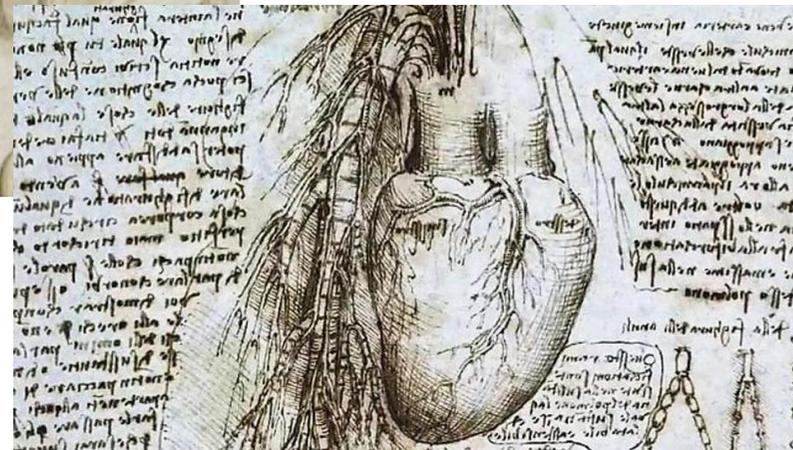
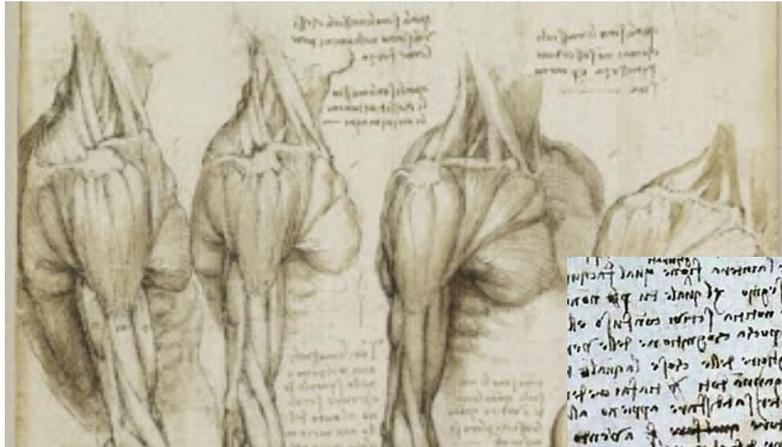
↳ Luigi Galvani (1737)



Nati il 9 settembre

↳ Luigi Galvani (1737)

↳ L'anatomia



Nati il 9 settembre → ... → Leonardo da Vinci



Problema. Come fa Google a rispondere così velocemente alle nostre richieste? E, soprattutto, come fa a trovare le pagine pertinenti alle parole chiave che abbiamo digitato e ad ordinarle?

Capiamo il problema

Il Web è come un enorme libro

- scansione del web
- indicizzazione dei contenuti
- ordinamento delle pagine



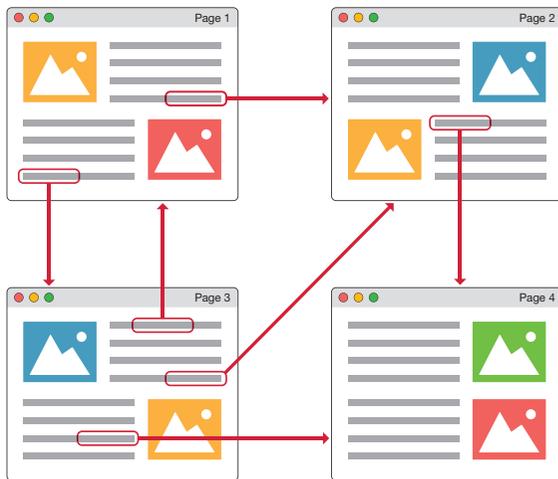
- ad ogni pagina web P è associato un numero reale x_P che dipende da tanti fattori, uno di essi è il PageRank

*Il **PageRank** di una pagina è un numero reale compreso tra 0 e 1 che esprime la probabilità che un utente qualsiasi che naviga sul Web arrivi casualmente a visitare proprio quella pagina*

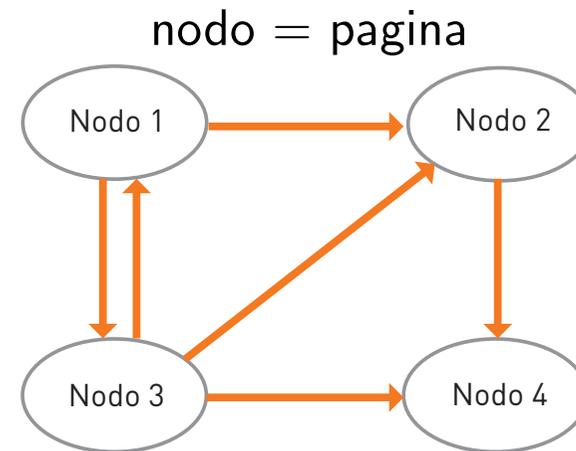
- ordinando i numeri x_P , otteniamo l'ordine delle pagine

Come si calcolano i PageRank delle pagine Web?

Semplificare per modellizzare



Una **rete** di 4 pagine web



Il **grafo orientato** associato

La **matrice** di connessione del grafo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ link } j \rightarrow i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come possiamo modellizzare i movimenti di un surfer virtuale?

La probabilità di cliccare su un link

A non è adatta a simulare gli spostamenti di un surfer virtuale

A=matrice del grafo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \end{array}$$

H=matrice di hyperlink

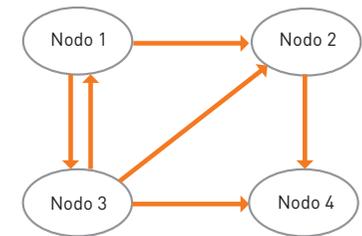
$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

L_j = numero di link che escono dal nodo j

$$h_{ij} = \begin{cases} 1/L_j & \text{se } L_j \neq 0 \text{ ed } \exists \text{ link } j \rightarrow i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

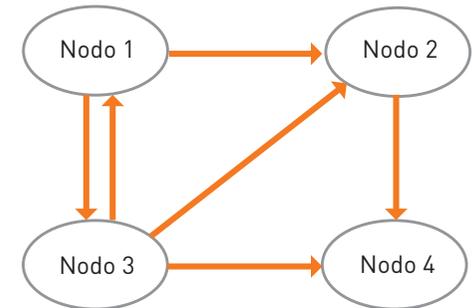
h_{ij} rappresenta la probabilità di muoversi dalla pagina j alla pagina i

Problema: e se il surfer finisce sul nodo 4? (Il nodo 4 è un buco nero!)



Se finite in un buco nero, una via d'uscita c'è (S. Hawking)

La via d'uscita: quando capitiamo su una pagina senza link, inseriamo una nuova richiesta in Google oppure digitiamo un nuovo indirizzo e... **ricominciamo a navigare.**



H =matrice di hyperlink

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

S =seconda matrice di hyperlink

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$$

s_{ij} rappresenta la probabilità di spostarsi dal nodo j al nodo i seguendo il link (se esiste), o iniziando una nuova ricerca (se si cade in un buco nero)

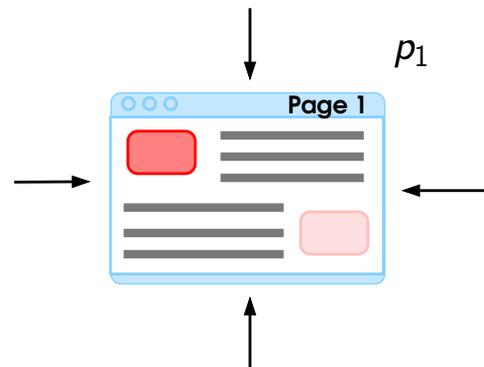
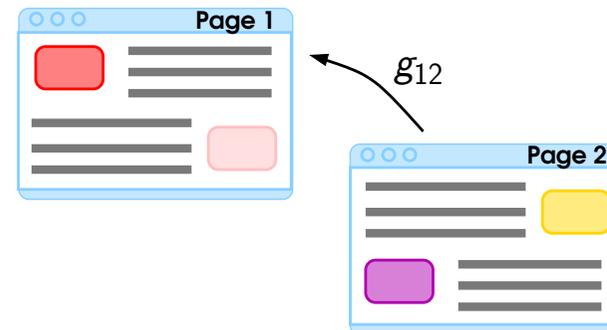
La possibilità di cambiare strada

Si introduce $\alpha \in [0, 1)$ e si definisce

$$G : g_{ij} = \alpha s_{ij} + \frac{1 - \alpha}{N}$$

G è la **matrice di Google** (Brin & Page – 1998)

L'elemento g_{ij} della matrice G esprime la **probabilità** che un utente, che già si trova sulla pagina j della rete, si sposti dalla pagina j alla pagina i (seguendo i link o iniziando nuove ricerche ogni volta che vuole)



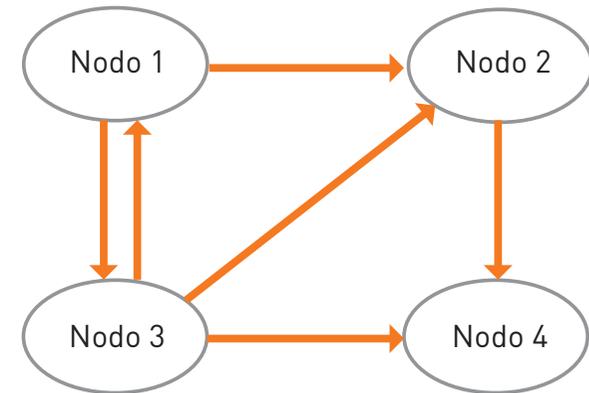
$p_i = \text{PageRank}$ della pagina i rappresenta la **probabilità** che un utente qualsiasi che naviga sul Web arrivi casualmente a visitare proprio quella pagina.

Il modello matematico

Grazie alla **Teoria della probabilità**:

$$p_1 = g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + g_{13}p_3 + g_{14}p_4$$

Il PageRank della pagina 1 dipende dal PageRank di tutte le pagine della rete



$$\begin{cases} p_1 = g_{11}p_1 + g_{12}p_2 + g_{13}p_3 + g_{14}p_4 \\ p_2 = g_{21}p_1 + g_{22}p_2 + g_{23}p_3 + g_{24}p_4 \\ p_3 = g_{31}p_1 + g_{32}p_2 + g_{33}p_3 + g_{34}p_4 \\ p_4 = g_{41}p_1 + g_{42}p_2 + g_{43}p_3 + g_{44}p_4, \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\mathbf{p} = G\mathbf{p}$$

- Dati** : la matrice del grafo
Modello : $\mathbf{p} = G\mathbf{p}$
Soluzione : il vettore \mathbf{p} dei PageRank

Il modello numerico



Per risolvere $\mathbf{p} = G\mathbf{p}$
utilizziamo un
metodo iterativo:

```
dato  $\mathbf{p}^{(0)}$ ,  
for  $k = 1, 2, 3, \dots$  do  
    calcolare  $\mathbf{p}^{(k)} = G\mathbf{p}^{(k-1)}$   
end
```

Quando ci fermiamo?

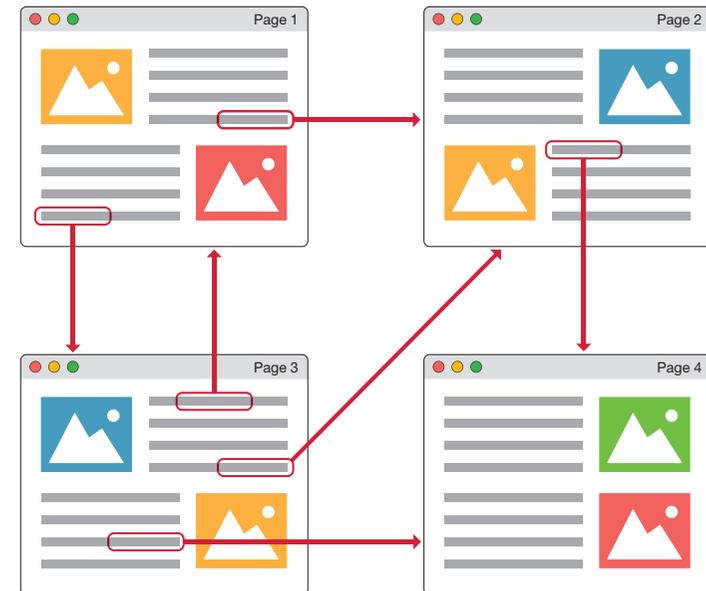
Quando facciamo il frullato è sufficiente guardare (o assaggiare)

Qui ci aiuta la matematica con il test d'arresto (sostituisce i sensi)

La soluzione numerica

Dopo 6 iterazioni troviamo

pagina	PageRank	posizione in graduatoria
1	0.17406	4
2	0.24799	2
3	0.19324	3
4	0.38472	1



... ed ora

possiamo risalire la china, tenendo presente che nel Web ci sono almeno 20 miliardi di pagine, che il PageRank non è l'unico fattore tenuto in considerazione per ordinare le pagine, che....

Che cosa abbiamo imparato

Modelli e strumenti matematici

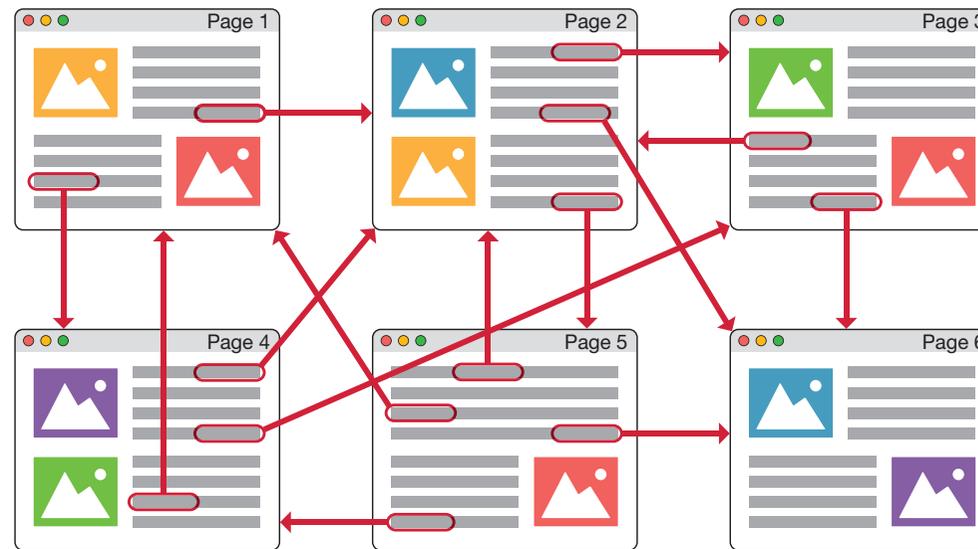
1. Il Web può essere modellizzato con un **grafo orientato**;
2. le informazioni di un grafo orientato (numero di nodi e archi) sono memorizzabili nella **matrice di connessione del grafo**;
3. il modello matematico che descrive gli spostamenti del surfer virtuale sul Web è il **sistema di equazioni** $\mathbf{p} = G\mathbf{p}$, dove \mathbf{p} è il vettore incognito dei PageRank di tutte le pagine della rete, mentre G è la matrice di Google associata alla rete.

Metodi numerici

1. Il metodo numerico adottato per risolvere l'equazione vettoriale $\mathbf{p} = G\mathbf{p}$ è una **procedura iterativa**;
2. per fermare la procedura iterativa dobbiamo utilizzare un **test d'arresto**.

Esercizi (completi di svolgimento)

Esercizio 1. Costruire il grafo orientato e la relativa matrice di connessione associati alla seguente rete:



Esercizio 2. Calcolare i PageRank delle pagine della rete dell'Esercizio 1 e, di conseguenza, ordinare le pagine della rete in funzione del loro PageRank (da PageRank maggiore a PageRank minore).

GRAZIE