Il periodo d'oro della geometria algebrica italiana

(1860-1914)

ENRICO ROGORA[1]

[1]Dipartimento di Matematica
"Sapienza", Università di Roma

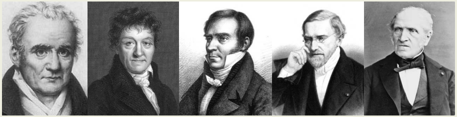
Urbino, 9 Aprile 2011

Amaldi - SIPS - 1908

Sbocciata dal tronco di un’antica e vigorosa tradizione d’oltralpe, la geometria [italiana] si sviluppò dapprima sotto l’influsso di tenaci tendenze purista; ma poi, affinata e raffermata in quel duro lavorio la potenza dei suoi metodi, si volse ad una comprensione sempre più larga di nuovi strumenti e di nuove vedute, fino al momento culminante del suo attuale sviluppo, caratterizzato dalla sua fusione cogl’indirizzi meno lontani dell’alta Analisi.

Geometri francesi

- Gaspard Monge (1746-1818)
- Lazare Carnot (1753-1823) e Louis Poinsot (1777-1859)
- Jean Victor Poncelet (1788-1867)
- Michel Chasles(1793-1880)



Geometri tedeschi

- August Möbius (1790-1868)
- Jakob Steiner (1796-1863) e Karl Staudt (1798-1867)
- Karl Gauss (1777-1855), Niels Henrik Abel (1802-1829) e Bernhard Riemann (1826-1866)
- Julius Plücker (1801-1868) e Hermann Grassmann (1809-1877)

- Luigi Cremona (1830-1903)
- Eugenio Bertini (1846-1933) e Giuseppe Veronese (1854-1917)
- Corrado Segre (1863-1924)
- Guido Castelnuovo (1865-1952) e Federico Enriques (1871-1946)
- Francesco Severi (1879-1961)

Geometri non italiani contemporanei a Cremona (1830-1903)

- Alfred Clebsch (1833-1872)
- Max Noether (1844-1921)
- Alexander von Brill (1842-1935)
- De Jonquiéres (1820-1901)
- Arthur Cayley (1821-1895)
- George Salmon (1819-1904)
- James Sylvester (1814-1897)
- Sophus Lie (1842-1999)
- Felix Klein (1849-1925)

La geometria torna a fiorire, in Francia, verso la fine del 1700, grazie all'opera di Gaspard Monge, il padre della geometria differenziale per il suo lavoro application de l'analyse à la géométrie dove introdusse il concetto di linee di curvatura di una superficie nello spazio. Monge è anche considerato il padre della moderna geometria pura. Fu molto attivo durante la rivoluzione e sostenne Napoleone Bonaparte. Fondò l'Ècole Polytechnique.

Due risultati di Monge

1. Per ogni coppia di spigoli di un tetraedro, si consideri il piano per il punto medio del primo spigolo e perpendicolare al secondo. L'insieme di questi piani passa per un punto (punto di Monge) che è il punto medio del segmento che congiunge il centroide con il circocentro.
2. Il luogo dei vertici degli angoli trirettangoli le cui facce sono tangenti ad una data superficie quadrica è una sfera.

Accanto a Gaspard Monge, fondatore della moderna geometria pura è Lazare Carnot. Molto impegnato ai tempi della Rivoluzione, fu detto l'organizzatore della vittoria per i suoi contributi militari. Scrisse la Géométrie de position nel 1803.

Due risultati di Carnot

1. *Legge dei coseni generalizzata* Per un tetraedro le cui facce hanno area a, b, c e d rispettivamente, vale la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd\cos B - 2bd\cos C - 2bc\cos D$$

dove, B è l'angolo compreso tra le facce di area c e d, C è l'angolo compreso tra le facce di area b e d, D è l'angolo compreso tra le facce di area b e c,

2. Formula per il volume del tetraedro in funzione dei suoi sei spigoli.

Carnot fu anche il primo a intuire la possibilità di utilizzare coordinate intrinseche per la descrizione di curve e superfici (triedro mobile di Cartan).

Il fondatore della moderna geometria proiettiva. Scrisse il Traité des propriétés projectives des figures nel 1822. Nell'esposizione segue il metodo sintetico invece di quello analitico.

Due risultati di Poncelet

1. *(Brianchon e Poncelet)* La circonferenza che passa per i piedi delle perpendicolari, abbassate su vertici di qualsiasi triangolo sui lati opposti, passa anche per i punti di mezzo di questi lati, oltre che per i punti di mezzo dei segmenti che congiungono i vertici con i punti di intersezione delle perpendicolari.
2. Legge di dualità.

CHASLES fu studente allÉcole Polythecnique. In Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie studiò un gran numero di proprietà delle superfici quadriche utilizzando il principio di dualità e il metodo delle polari.

Nel Traité de géométrie (1852) introdusse le nozioni di birapporto (contemporaneamente e indipendentemente da Möbius), di fascio e di involuzione e applicò questi metodi allo studio delle sezioni coniche in Traité des sections coniques (1865).

Un risultato di Chasles

Soluzione del Problema di Steiner sulle coniche: il numero di coniche tangenti a cinque coniche date è 3264 (1864).

Studiò astronomia con Mollweide e GAUSS e poi matematica con PFAFF. In Der barycentrische Calcul introdusse le coordinate omogenee, le sue famose trasformazioni proiettive e laconfigurazione di Möbius. Sviluppò tra i primi, interesse in problemi di carattere topologico (proprietà del nastro di Möbius).

Classificazione delle trasformazioni dello spazio

- congruenze;
- similarità;
- affinità (rette parallele in rette parallele
- collineazioni (rette in rette)

Il più grande geometra sintetico dei tempi moderni. Diede innumerevoli contributi alla Geometria proiettiva. Iniziò lo studio della Superficie di Steiner, che contiene una famiglia bidimensionale di coniche.
In Allgemeine Eigenschaften algebraischer Curven enunciò un numero impressionante di teoremi proiettivi sulle curve piane, che furono poi interamente dimostrati da Luigi Cremona.

Due risultati di Steiner

1. Caratterizzazione dell'ellissi di area minima tra tutte le ellissi che possono essere iscritte in un dato triangolo
2. Una superficie del terzo ordine con un numero finito di rette ne contiene esattamente 27

Steiner non apprezzava nè l'algebra nè l'analisi e credeva che il calcoli frena il pensiero mentre la geometria lo stimola.

Alcuni risultati di Abel

1. Non è possibile trovare una formula di risoluzione per radicali per tutte le equazioni di quinto grado;
2. Inversione degli integrali ellittici

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)(1-x^2)}}$$

RIEMANN è stato uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Fu il primo ad intendere la geometria come lo studio della proprietà invarianti per trasformazioni birazionali. Introdusse il punto di vista topologico nella teoria delle funzioni algebriche definite implicitamente dall'equazione polinomiale $f(x, y) = 0$, associando ad essa la superficie di Riemann della funzione.
Dimostrò un teorema fondamentale sul numero di funzioni meromorfe con poli assegnati che si possono definire su una superficie di Riemann.
Risolse un problema generale di inversione che generalizza il teorema di ABEL di inversione degli integrali ellittici.

Introdusse i metodi analitici nella Geometria proiettiva e nella Geometria delle configurazioni proiettive di rette.
Rivoluzionò il concetto di coordinata considerando le coordinate di una retta, e giustificò in maniera analitica il principio di Dualità.
Iniziò le indagini sulle configurazioni geometriche associate ai complessi lineari.
Scoprì le importanti formule enumerative che portano il suo nome e che legano le singolarità di una curva al suo grado e alla sua classe.

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\kappa \qquad n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota$$
$$I = 3n(n-2) - 6\delta - 8\kappa \qquad \kappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8t$$

dove m è la classe, n l'ordine, δ il numero dei nodi, κ il numero delle cuspidi, ι il numero dei punti di inflessione e τ il numero delle bitangenti.

La geometria in Italia prima del 1860

L'Italia partecipa in ritardo al rinnovato interesse per la Geometria, senza svolgere un ruolo rilevante fino alla comparsa di LUIGI CREMONA, che si avvicina alla geometria leggendo, su indicazione di BRIOSCHI, CHASLES e PONCELET, al cui spirito geometrico rimase sempre fedele, Abel e i testi tedeschi sulle funzioni abeliane.
Ben presto amplia i suoi orizzonti e affina le sue conoscenze, studiando le opere di CAYLEY, SALMON, STEINER. Le sue prime indagini (1855-1861) spaziano dalle tangenti sferoconiugate, alle rigate di terzo grado, alla quartica di seconda specie.

Teoria sintetica delle curve algebriche piane

Progetto di sviluppare le idee abbozzate nell'Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven di STEINER (1848) e raccogliere in ampia sintesi i risultati, ottenute per lo più con metodi analitici da Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Salmon. Si basa sulla nozione di polarità, come introdotta dal GRASSMANN, ma che nelle sue applicazioni è assolutamente originale, per esempio nello studio della curve covarianti Hessiana e Steineriana, (nomi introdotti da Cremona).

Cremona: Introduzione a una teoria delle curve piane (1862)

Il desiderio di trovare, coi metodi della pura geometria, le dimostrazioni degli importantissimi teoremi enunciati dall'illustre STEINER *nella sua breve Memoria Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven, mi ha condotto ad intraprendere alcune ricerche delle quali offro qui un saggio benché incompleto. Da poche proprietà di un sistema di punti in linea retta ho dedotto la teoria delle curve polari [...] la qual teoria mi si è affacciata così spontanea e feconda di conseguenze, che ho dovuto persuadermi, risiedere veramente in essa il metodo più naturale per lo studio delle linee piane [..]*
La teoria delle curve polari costituisce la seconda Sezione, nella quale svolgo e dimostro con metodo geometrico, semplice ed uniforme, non solo i teoremi di STEINER*, ch'egli aveva enunciati senza prove, ma moltissimi altri ancora, in parte nuovi ed in parte già ottenuti dai celebri geometri* PLČKER, CAYLEY, HESSE, CLEBSCH, SALMON*, ..., col soccorso dell'analisi algebrica. [...]*
Io sarò lietissimo se questo potrà contribuire a diffondere in Italia l'amore per le speculazioni di geometria razionale.

Il Cremona si ricollega al principio di continuità del Poncelet, al De Jonquières per il concetto di indice di una serie semplicemente infinita di curve.
Fa uso sistematico del principio di corrispondenza successivamente esplicitato da Chasles, da cui prende il nome.
Nell'Introduzione, Cremona dimostra, tra gli altri risultati enunciati da Steiner, che la quartica piana generale ha 28 tangenti doppie e le principali proprietà di questa configurazione.

Lo stesso disegno, attuato per le curve algebriche nell'Introduzione, fu per le superfici attuato nei Preliminari per una teoria geometrica delle superfici, che furono giudicati dal NOETHER, *pari alla Introduzione per il valore sistematico, ma superiori per la originalità* (NOETHER - Obituario a Cremona).
Sia l'Introduzione che i Preliminari non realizzarono completamente il proposito dell'autore di costruire in essi la Geometria su basi proprie, sottraendola da gni dipendenza dall'Analisi.
Nessun trattato di Geometria pura ebbe, secono NOETHER una più larga e profonda influenza sullo sviluppo e sull'applicazione dei metodi geometrici, paragonabile soltanto a quella che i compendi del SALMON ebbero sull'indirizzo algebrico geometrico
In Italia queste due monografie valsero a suscitare e diffondere il gusto degli studi geometrici.

Applicazioni dei metodi dell'Introduzione e dei Preliminari

Lavori che sviluppano i temi dell'Introduzione

Note sulla superficie romana di Steiner e sulla ipocicloide tricuspide.

Lavori che sviluppano i temi dei Preliminari

Nel 1868 viene stampata la Mémore de Géométrie pure sur les surfaces du troisiéme ordre in cui il CREMONA inizia la serie delle sue ricerche sulla superficie cubica, di cui studia in la configurazione delle 27 rette e il loro comportamento rispetto alle curve tracciate sulla superficie, in base a una rappresentazione piana usata nello stesso tempo e con il medesimo scopo anche dal CLEBSCH.

In due celebri note del 1863-64, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, CREMONA pose e affrontò il problema della ricerca di tutte le trasformazioni biunivoche tra due piani, partendo dalla considerazione critica delle trasformazioni quadratiche introdotte da STEINER e successivamente studiate da Schiaperelli e Magnus che *cercarono le formole analitiche per la trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra [...] sotto la condizione che ad un punto qualunque dell'una corrisponda un sol punto nell'altra, e reciprocamente [...] (trasformazione di primo ordine).*
[Dalle loro indagini] sembrerebbe doversi concludere che, nella più generale ipotesi, alle rette di una figura corrispondono nell'altra coniche circoscritte ad un triangolo fisso (reale o no); ossia che la più generale trasformazione di primo ordine sia quella che lo Schiaparelli appella trasformazione conica.
Ma egli è evidente che applicando ad una data figura più trasformazioni coniche successive, dalla composizione di queste nascerà una trasformazione che sarà ancora di primo ordine, benché in essa alle rette della figura data corrisponderebbero nella trasformata, non già coniche, ma curve d'ordine più elevato.

In questo breve scritto mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia. Stabilisco dapprima due equazioni che devono aver luogo fra i numeri dei punti semplici e multipli comuni a tutte le curve che corrispondono a rette.

Dall'Introduzione alla prima Memoria

Naturalmente queste equazioni ammettono in generale più soluzioni, il numero delle quali è tanto più grande quanto è più grande né ciascuna soluzione offre una speciale maniera di trasformazione.

Dall'Introduzione alla seconda Memoria

Poi dimostro come, per mezzo di raggi appoggiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano, e così trasformare una figura data in quello, in un'altra figura situata in questo.

Dall'Introduzione alla prima Memoria

Le trasformazioni speciali introdotte nella prima nota sono erano già state considerate da de Jonquiéres (manoscritto pubblicato tra la prima e la seconda Memoria del Cremona). CREMONA le determina con una ingegnosa costruzione geometrica.

Fra tutte le diverse trasformazioni corrispondenti a un dato valore di n ve n'ha una che può dirsi la più semplice, perchè in essa le curve d'ordine n che corrispondono alle rette della figura proposta hanno in comune null'altro che un punto $(n-1)$-plo e $2(n-1)$ punti semplici. Di questa speciale trasformazione si è occupato un abilissimo geometra francese, il sig. JONQUIÈRES, il quale ne ha messe in luce parecchie eleganti proprietà e ne ha fatta applicazione alla generazione di una certa classe di curve gobbe. Ora io mi propongo di mostrare che lo stesso metodo e le stesse proprietà si possono estendere anche alle trasformazioni che corrispondono a tutte le altre soluzioni delle due equazioni che ho accennate. E per tal modo si acquisterà anche un mezzo facile per la costruzione di altrettante classi di curve gobbe.

Dall'Introduzione alla seconda Memoria

Proprietà delle trasformazioni birazionali

CREMONA aprì un nuovo campo di ricerca alla Geometria Algebrica, ponendo per primo, nella sua generalità, il problema delle trasformazioni birazionali, che da allora presero il nome di TRASFORMAZIONI CREMONIANE.

L'immagine delle rette con una trasformazione birazionale è una rete di curve razionali con un solo punto di intersezione variabile, che si dice rete omaloidica.

Una trasformazione birazionale non è definita nell'insieme dei punti base e contrae l'insieme delle curve base. Cremona iniziò lo studio dei punti e delle curve fondamentali delle reti omaloidiche.

Teorema di Cremona

Se un sistema omaloidico ha α_1 punti semplici, α_2 punti doppi, α_3 punti tripli, ... fondamentali e inoltre, β_1 rette, β_2 coniche, β_3 cubiche, ... fondamentali, i numeri α sono uguali ai numeri β, non necessariamente nello stesso ordine.

Questo importante risultato venne dimostrato da CREMONA per induzione e successivamente da CLEBSCH e BERTINI secondo linee più eleganti.

L'importanza del nuovo campo di indagini così aperto dal CREMONA*, apparve subito manifesta ai matematici stranieri; e la teoria cremoniana ricevette ben presto il suo naturale completamento con la scoperta compiuta pressochè simultaneamente dal* CLIFFORD*, dal* ROSANES *e dal* NOETHER *[1870] di quella decomponibilità di ogni trasformazione biunivoca del piano nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche, che dopo le acute obiezioni del* SEGRE *doveva essere rigorosamente stabilita soltanto nel 1901 per opera del* CASTELNUOVO*.*
Nello stesso tempo le vedute del CREMONA *venivano estese allo spazio dal* CAYLEY *e soprattutto dal* NOETHER*, che iniziava lo studio delle corrispondenze biunivoche tra due varietà ad un numero qualsivoglia di dimensioni e ne indagava le forme fondamentali.*

U. Amaldi - SIPS

Altre indagini, collegate alle trasformazioni birazionali, riguardano lo studio delle rappresentazioni piane delle superficie, cominciando da casi particolari

- La superficie romana di STEINER [1867]
- Le rigate cubiche [1868]
- Le rigate di ordine $m+n$ dotate di due direttrici rettilinee, multiple rispettivamente secondo m e n [1868].

Successivamente, ispirato dai lavori di NOETHER, utilizzò sistematicamente particolari trasformazioni birazionali dello spazio, per costruire nuove superfici razionali, partendo dal piano e da altre superfici razionali note.
Queste indagini sulla rappresentazione delle superfici erano affini a quelle del CLEBSCH e del NOETHER sullo stesso argomento, ma da un punto di vista diverso. I geometri tedeschi, ricollegandosi alla tradizione riemanniana, concepivano le superficie algebriche in sè, astraendole dallo spazio in cui sono immerse, fino a dimostrare (NOETHER) che una superficie con un fascio razionale di curve razionali

Importanza di Cremona come fondatore della scuola italiana di geometria algebrica

I geometri italiani che seguirono questa via, anche se non assisterono alle lezioni di CREMONA, anche quando la sua produzione scientifica si arrestò, lui chiamarono Maestro, perché sentivano di appartenere alla sua Scuola, di derivare dai suoi alti insegnamenti e dalle opere immortali. E gli scienziati stranieri pure lo riconobbero ed ammirarono come Maestro, ed insieme come uno dei principali fattori del mirabile incremento dei metodi geometrici negli ultimi cinquant'anni.

Bertini - Necrologio

L'importanza di Cremona come fondatore della scuola geometrica italiana risiede anche nella passione e nell'impegno che profuse nell'insegnamento e nella diffusione delle idee geometriche che circolavano fuori dall'Italia. I suoi numerosi corsi di Geometria Superiore toccavano sempre gli ultimi e più notevoli progressi. Tra questi si ricorda il famoso corso a tre mani tenuto al Politecnico di Milano nel 1869 da F. BRIOSCHI, F. CASORATI e L. CREMONA sulla teoria delle funzioni elittiche e abeliane, nel quale Cremona espose il punto di vista di CLEBSCH.

Ricordo dell'opera di Cremona al Congresso di Bologna

parto dal tempo in cui visse e fiorì LUIGI CREMONA, il fondatore della nostra scuola. Per spiegarsi l'azione che ebbe quest'uomo eccezionale, per comprendere come egli, in un paese dove era scarsamente nota l'opera delle fiorenti scuole francesi e tedesche, sia riuscito a destar l'entusiasmo dei giovani meglio dotati e a suscitare un insolito fervore di ricerche, non basta la lettura degli scritti di lui: occorre averlo conosciuto, aver provato il fascino che emanava dalla sua potente personalità. Una volontà indomabile che si esercitava prima su se stesso e poi sugli altri, la parola austera, parca negli elogi, tanto più preziosi in conseguenza, e quella felice unione di acume scientifico e di gusto artistico che colpiva il nostro spirito latino.

Cenno ai principali contributi della Scuola di geometria proiettiva di Cremona

1. Studio delle superfici cubiche e quartiche (configurazione delle rette e dei piani tritangenti): CAPORALI (1885-1886), DE PAOLIS (1854-1892), BERTINI e i suoi allievi BERZOLARI (1863-1949) e CIANI (1864-1942)
2. Studio proiettivo di superfici speciali razionali mediante rappresentazione piana: CAPORALI, DE PAOLIS, DEL RE (1859-1921).
3. Sistemi omaloidici di superfici e trasformazioni cremoniane dello spazio: DE PAOLIS (1854-1892) MONTESANO (1863-1930) PIERI (1860-1913).
4. Problemi enumerativi sulle superfici razionali e sui corrispondenti sistemi omaloidici: sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane CAPORALI, 1881.
5. Procedimenti geometrici per costruire tutte le trasformazioni birazionali piane di un qualsiasi ordine: sulle reti omaloidiche di curve nel piano MONTESANO, 1905.

devo rilevare che il suo [di CREMONA*] interesse è sempre rivolto alle proprietà proiettive. Anche dove, con la scoperta delle trasformazioni che portano il suo nome, o con la rappresentazione piana della superficie cubica e di altre superficie, egli ha preparato metodi e argomenti per ricerche future, di quei metodi si vale per trasportare dall'uno all' altro ente proprietà proiettive. Nello stesso ordine di idee si muovono i discepoli che egli predilesse. Occorre in Italia arrivare ad una ricerca fatta dal BERTINI nel 1877 per trovar traccia di una classificazione, ove son riguardati come equivalenti forme geometriche (si tratta di involuzioni piane) riconducibili l'una all'altra mediante trasformazioni birazionali. Ma il BERTINI, pronto allora come oggi, nella sua florida vecchiezza, ad accoghere ogni nuovo indirizzo geometrico, aveva subito anche l'influenza di MAX NOETHER che, come poi dirò, ebbe tanto peso nello sviluppo della nostra scuola.*

Il teorema di Bertini sulle involuzioni piane del secondo ordine

Teorema di Bertini

Esistono quattro tipi birazionalmente distinti di involuzioni piane del secondo ordine:

- L'omologia armonica (fissato un punto P e una retta p, associa a X il quarto armonico tra X, P e $p \cap r_{AX}$.
- La trasformazione piana involutoria di DE JONQUIÈRES.
- L'involuzione di GEISER (Coppie di intersezioni variabili delle cubiche per 7 punti fissi).
- L'involuzione di BERTINI (Coppie di punti che presentano una sola condizione alle curve del settimo ordine con otto punti fissi).

Autori italiani che contribuirono allo sviluppo di queste indagini, oltre allo stesso Bertini, furono CAPORALI, MARTINETTI (1859-1936) e BERZOLARI (1863-1949).

I caratteri principali di un sistema di curve piane sono la dimensione, il genere p della curva generale e il grado, ovvero il numero delle intersezioni libere di due sue curve generali.
Quando cerchiamo di calcolare questi numeri dal sistema completo $C^n(O_1^{k_1} O_2^{k_2} \dots O_s^{k_s})$ dobbiamo considerare due problemi:

- I punti fissi possono essere diversi da quelli assegnati
- Le condizioni imposte dai punti base assegnati possono non essere indipendenti.

Abbiamo quindi dei caratteri virtuali e dei caratteri reali.

Caratteri virtuali

- genere virtuale $p' = 1/2(n-1)(n-2) - 1/2 \sum k_i(k_i - 1)$;
- grado virtuale $\nu' = n^2 - \sum k_i^2$;
- dimensione virtuale $r' = 1/2n(n+3) - 1/2 \sum k_i(k_i + 1)$

Il sistema lineare è sovrabbondante quando $r > r'$ e l'eccesso $r - r'$ si dice sovrabbondanza.

Conseguenze dele ricerche di Bertini sulle involuzioni piane

In queste ricerche appare come risultato saliente l'esistenza di un fascio di curve razionali o di un fascio di curve ellittiche. Bertini si occupa quindi di classificare i tipi birazionalmente irriducibili di siffatti sistemi, utilizzando lo stesso procedimento di riduzione all'ordine minimo per mezzo di trasformazioni quadratiche, già impiegato dal NOETHER per dimostrare la decomponibilità di ogni trasformazione birazionale piana in fattori quadratici.

Contributi alla classificazione dei sistemi lineari di curve

- GIOVAN BATTISTA GUCCIA (1855 - 1914). Riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di curve razionali (1886) ed ellittiche (1887).
- MARTINETTI reti sovrabbondanti di genere 2 (1898)
- DE FRANCHIS fesci di genere 2 e sistemi lineari di genere 3 e dimensione maggiore di 1

I contributi di Jung alla riduzione dei sistemi generali di genere p qualsiasi, contengono in germe concetti e vedute, che più tardi ulteriormente elaborati, dovevano assumere, nello sviluppo della Geometria algebrica, un ufficio importante, come per esempio il concetto dei grado calcolato in modo da segnare un primo passo verso l'introduzione dei caratteri virtuali del Castelnuovo (1865-1952)).

Tra i risultati di Jung sono da menzionare

- La determinazione di un limite superiore per la dimensione di un sistema lineare di curve piane di dato genere
- L'invarianza per trasformazioni birazionali della differenza tra il numero dei punti fondamentali e il numero delle curve fondamentali semplici.

Superata la fase purista, cioè quella della geometria algebrica studiata con metodi fondamentalmente sintetici, senza far ricorso a sussidi di carattere analitico, abbiamo detto come la geometria algebrica italiana cominci ad indirizzarsi, con BERTINI, verso un concezione birazionale di problemi.
Accanto a questa tendenza, si svuppa la Geometria iperspaziale.
L'elaborazione da parte di BETTI e BELTRAMI del concetto di varietà a quante si voglia dimensioni, aveva preparato la via all'accoglimento entusiastico delle idee di KLEIN (e di LIE) sulla geometria della totalità degli enti geometrici dotati di proprietà caratteristiche (per esempio le rette dello spazio, le curve piane di dato grado, etc.), che preludono ad una geometria degli spazi di dimensione qualunque.

Enrico D'Ovidio (1843-1933) e Giuseppe Veronese (1854-1917)

ENRICO D'OVIDIO studiava, nello spazio metrico proiettivo a n dimensioni le relazioni fondamentali tra i vari spazi immersi e le proprietà dei complessi lineari o dei sistemi lineari di iperpiani.
GIUSEPPE VERONESE assunse un punto di vista nettamente proiettivo nella sua opera più famosa, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirensund Schneidens (1881), dove diede per primo una trattazione organica della Geometria proiettiva degli iperspazi.
VERONESE usa sistematicamente nella Behandlung il metodo delle proiezioni e sezioni, mostrandone la sua fecondità. Egli mette in luce il principio generale secondo cui le proprietà proiettive di ogni ente geometrico di un qualsivoglia spazio si possono agevolmente scoprire, riguardandolo come immagine proiettiva di un altro ente geometrico normale (appartenente ad uno spazio in generale più ampio) le cui proprietà in quel suo ambiente naturale si rivelano in tutta la loro semplicità.

- Studio delle immagini proiettive in S_3 e sul piano della superficie omoloide normale del 4° ordine dello spazio a 5 dimensioni (Superficie di VERONESE) VERONESE (1882).
- Classificazione delle superfici irriducibili di ordine $n - 1$ in S_n. PASQUALE DEL PEZZO (1859-1936) (1885).
- Classificazione delle superfici irriducibili di ordine n in S_n DEL PEZZO (1887).

L'opera di Corrado Segre (I)

Corrado Segre contribuì largamente alla diffusione dei metodi iperspaziali in Italia. La sua opera si differenzia nettamente per il suo eclettismo che, superando completamente le tendenze puriste, corrisponde ad un nuovo stadio di maturità raggiunto dalla Geometria italiana.

Primo periodo (1883-84)

Trattazione sistematica della geometria iperspaziale sfruttando procedimenti sintetici le traduzioni geometriche dei teoremi algebrici di Weierstrass, Kronecker e Frobenius sull'equivalenza dei fasci di forme bilineari e quadratiche.

- Teoria delle quadriche nello spazio a n dimensioni;
- Classificazione dei tipi proiettivi di superfici del quarto ordine con conica doppia
- Classificazione dei tipi proiettivi delle omografie di S_n
- Geometria delle coniche del piano considerate come punti dello spazio proiettivo a cinque dimensioni

Secondo periodo (1885-86)

Superamento dei confini della geometria proiettiva classica nello studio di nuovi enti e di nuovi problemi.

- La varietà cubica nello spazio a quattro dimensioni e in particolare i casi particolari caratterizzati dalla presenza di piani o da più punti doppi
- Varietà iperalgebriche

Terzo periodo (1887-90)

SEGRE cominciò a sviluppare nuovi punti di vista, in grado di ampliare gli orizzonti della geometria italiana. Le origini di questi nuovi punti di vista sono nei lavori su:

- sistemi lineari di curve algebriche piane;
- varietà algebriche, composte di un una serie semplicemente infinita di spazi.

Riemann

La curva è l'oggetto astratto su cui ha senso estendere una funzione analitica. Il problema centrale per questi oggetti è analitico: determinare le funzioni meromorfe con singolarità assegnate. Uno strumento fondamentale sono i differenziali olomorfi che si possono definire su una superficie di Riemann. L'approccio di Riemann è analitico.

Clebsch e Brill-Noether

I problemi funzionali relativi alle superfici di Riemann si possono riformulare come problemi geometrici su una curva piana. Le funzioni razionali vengono sostituite dai sistemi lineari di curve, che tagliano sulla data curva piana una famiglia di divisori linearmente equivalenti. I differenziali olomorfi vengono sostituiti dal sistema lineare delle curve aggiunte, ovvero dalle curve di grado $d-3$ passanti con molt. $h-1$ per i punti singolari di molt. h. L'approccio di Brill e Noether è algebrico.

Data una serie lineare su una curva piana (o su una superficie di Riemann astratta), possiamo immergere la curva in un iperspazio in maniera che la serie sia tagliata dagli iperpiani. Le proprietà della serie diventano proprietà proiettive dell'immersione. Date due serie lineari sulla stessa curva è possibile costruire la rigata delle congiungenti i punti omologhi delle due immersioni iperspaziali e le proprietà proiettive di questa rigata riflettono le proprietà delle due serie.

Il SEGRE osserva che la Geometria proiettiva delle superfici razionali di un iperspazio equivale alla Geometria birazionale dei sistemi lineari di curve piane. Pertanto, i risultati citati di BERTINI, GUCCIA, JUNG e MARTINETTI sulla classificazione in tipi birazionali dei sistemi lineari di curve di genere 0, 1 e 2 si traducono in teoremi di natura proiettiva iperspaziale sulle superfici razionali a sezioni piane di genere 0, 1 e 2. L'uso dei metodi iperspaziali per ricostruire la Geometria sopra una curva determina un nuovo indirizzo in cui convergono la tradizione riemanniana e le tendenze algebrico-geometriche risalenti al CREMONA

Una corrente di pensiero diversa dalla cremoniana e che, attraverso il KLEIN, si propagò nel nostro paese fra il 1880 e il 90, portò ad estendere la geometria proiettiva agli iperspazi. GIUSEPPE VERONESE e CORRADO SEGRE furono i maggiori rappresentanti di questo indirizzo. Specialmente il SEGRE, spirito eclettico, maestro insuperabile, rapito precocemente al nostro affetto e alla nostra ammirazione, vide le applicazioni che della geometria iperspaziale potevano farsi alla teoria delle curve algebriche. Sviluppando una idea già adombrata dal KLEIN e dal NOETHER, egli traduce le proprietà di una curva invarianti per trasformazioni birazionali in proprietà proiettive di un opportuno modello della curva, e trasporta così questioni per lui nuove nel terreno più familiare della geometria proiettiva iperspaziale. Questo procedimento ha permesso a lui e ai suoi discepolo di ricostruire in modo originale la teoria che BRILL e NOETHER avevano esposta in una classica memoria, e di ampliarla in varie direzioni.

GUIDO CASTELNUOVO (1867-1952) presenta le prime applicazioni dei metodi iperspaziali di Segre in Geometria sulle curve ellittiche (1888), Teoria geometrica delle serie lineari sopra un curva algebrica qualsivoglia (1889).

Opera di sintesi: SEGRE Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito. Segna l'inizio del periodo più luminoso e caratteristico della Geometria algebrica italiana.

Nella Introduzione è sviluppata una trattazione sistematica della Geometria sopra una curva e inoltre sono posti i fondamenti, dal medesimo punto di vista, per una Geometria sopra una varietà a quante si vogliano dimensioni. Una prima applicazione a queste varietà dei nuovi metodi è l'introduzione di un nuovo invariante birazionale relativo, l'invariante di Zeuthen Segre (1896).

È possibile una prima, grossolana, classificazione birazionale delle curve algebriche in base a un invariante birazionale numerico, il genere della curva.

Due modi equivalenti per definire il genere di una curva

1. FORMULA DI CLEBSCH Detta k_i la molteplicità dell'i-esimo punto singolare di un modello piano, $p = (n-1)(n-2)/2 - 1/2 \sum k_i(k_i - 1)$.
2. MAX NOETHER. Dato un modello piano di ordine n della curva, le cui singolarità siano solo punti doppi, il genere p è il numero massimo di curve indipendenti di ordine $n-3$ che passano semplicemente per i punti doppi;

L'equivalenza tra (1) e (2) segue dal fatto non banale che i punti doppi pongono condizioni indipendenti al sistema delle curve di grado $n-3$. La formula di Clebsch è un caso di formula di postulazione.

Nel contesto della teoria di RIEMANN il genere di una curva si definisce come il massimo numero di 1-forme olomorfe linearmente indipendenti su C.
Il legame con le precedenti definizioni segue dalla possibilità di scrivere le 1-forme meromorfe del piano che si restringono a 1-forme olomorfe sulla curva di eq. $f(x, y) = 0$ nella forma

$$\boxed{\frac{P(x, y)dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

con $P(x, y)$ polinomio di grado minore o uguale a tre il cui ordine di annullamento nei punti singolari della curva sia non minore dell'ordine di annullamento della derivata a denominatore .
La naturale estensione alle superfici fu suggerito da CLEBSCH (1868), che definì il genere di una superficie come il massimo numero di 2-forme olomorfe linearmente indipendenti su S.

Analogamente al caso delle curve, una 2-forma meromorfa dello spazio che si restringe a una 2- forma olomorfe sulla superficie S di equazione $f(x, y, z) = 0$ si scrive nella forma

$$\boxed{\frac{P(x, y, z)dx \wedge dy}{\partial f / \partial z}}$$

con $P(x, y, z)$ polinomio di grado minore o uguale a quattro il cui ordine di annullamento nei punti singolari della curva sia non minore dell'ordine di annullamento della derivata a denominatore.
Le superfici di grado $n = 4$ che passano con la dovuta molteplicità per i punti singolari di S sega, fuori dal luogo base, una serie lineare di curve che prende il nome di serie canonica. La dimensione vettoriale della serie canonica coincide con il genere geometrico della superficie.

L'introduzione del genere aritmetico di una superficie risale ai primi tentativi fatti da CAYLEY, CLEBSCH e NOETHER, intorno al 1870, di pervenire al calcolo diretto del genere geometrico mediante formule di postulazione analoghe a quelle per le curve.
Sia S una superficie irriducibile dello spazio tridimensionale, irriducibile e dotata di singolarità ordinarie, cioè al più una curva γ di punti doppi, di cui solo un numero finito cuspidali,ala quale possegga al più un numero finito di punti tripli ordinari, tripli anche per S. Sia d il grado della curva γ, t il numero dei punti tripli di Γ e G il genere della normalizzazione di Γ. La formula di postulazione per il numero delle superfici aggiunte ad S è allora

$$\boxed{p_a = \left(\binom{n-1}{3}\right) - (n-4)d + 2t + G - 1}$$

Questo numero è il genere aritmetico di S.

A differenza del caso delle curve, la formula di postulazione in generale non calcola il genere geometrico. Il primo controesempio fu notato da CAYLEY che osservò come il genere aritmetico può essere negativo per le superfici rigate.
Le superficie in cui il genere aritmetico è diverso dal genere geometrico si dicono irregolari e $p_g - p_a$ si dice l'irragolarità della superficie.

> *il solo caso di divergenza tra i due generi, che fosse noto nei primi tempi, riguardava le rigate irrazionali e le superficie trasformabili in rigate. Ma fin dalle prime nostre ricerche riuscimmo a costruire molti altri tipi di superficie irregolari, aventi cioè i due generi diversi. Si trattava di caratterizzare questa classe di superficie e di rendersi ragione dell'anomalia che in esse si riscontra.*

Guido Castelnuovo - ICM 1928

Val forse la pena di accennare qual'era il metodo di lavoro che seguivamo allora per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo. Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomigha a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie. Basterà qui citarne uno solo: mentre sopra una superficie regolare ogni sistema continuo di curve algebriche è contenuto in un sistema lineare di curve dello stesso ordine, ciò non avviene per le superficie irregolari, le quali posseggono sempre sistemi continui non appartenenti a sistemi lineari.

Guido Castelnuovo - ICM 1928

Invariante si Zeuthen-Segre

Se consideriamo una curva piana C e un fascio generico di rette, possiamo definire la classe r di C, come il numero delle rette del fascio che sono tangenti a C. Classe (r), grado (d) e genere (g)i C sono allora legate da

$$\boxed{r = 2(d + g - 1)}$$

Se consideriamo una superficie nello spazio tridimensionale, possiamo considerare la classe μ_2 della superficie, la classe μ_1 della curva sezione piana, e il grado μ_0 della superficie. Il numero $\mu_2 - 2\mu_1 + 3\mu_0 - 4$ è l'invariante di Zeuthen - Segre, che può essere calcolato in generale partendo dalle sezioni di S con un fascio di superficie di grado qualsiasi e indicato $I(S)$. A meno di una costante di traslazione coincide con la caratteristica di Eulero Poincaré della superficie S. È un invariante topologico ma non birazionale.
Un invariante birazionale della superficie si ottiene considerando $I(S) + e$, dove e è il numero di curve eccezionali di S.

Contributi di Castelnuovo alla teoria delle curve algebriche

Nel volume XXII degli Annali di Matematica, apprve, accanto alla Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito del Segre la La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico del Bertini. Entrambi i lavori avevano lo scopo di presentare un quadro organico della teoria delle curve algebriche da due diversi punti di vista, al fine di attrarre l'interesse dei matematici italiani su questa branca fondamentale della Geometria.

Usando i metodi iperspaziali e all'uso sistematico della nozione di somma di due serie lineari, CASTELNUOVO dimostrava con estrema eleganza e semplicità il teorema di Riemann Roch, stabiliva importanti formule numerative e stabiliva un importante risultato sulle involuzioni irrazionali.

Teorema di Castelnuovo - Humbert (1893)

Su una curva non esistono sistemi continui di involuzioni irrazionali di genere $g \geq 2$, ovvero di morfismi suriettivi $f : X \to Y$ su curve di genere $g \geq 2$

La sintesi del primo periodo del pensiero di CASTELNUOVO è in ricerche generali sopra i sistemi di curve piane del 1891 che per risultati e nuovi punti di vista segnano un momento decisivo per lo sviluppo della Geometria algebrica.
In essa introduce i caratteri virtuali di una serie lineare (dimensione e genere) e dimostra la loro invarianza birazionale e definisce la sovrabbondanza come la differenza tra la dimensione effettiva e quella virtuale. In questa Memoria grande importanza assumono i concetti di serie caratteristica, cioè la serie segata da un sistema lineare su una delle curve del sistema e il sistema aggiunto.
Le Ricerche del CASTELNUOVO costiuiscono, dal punto di vista birazionale, una teoria organica dei sistemi lineari sulle superfici razionali e aprirono la strada alle ricerche sulla Geomatria delle superfici, designando nei concetti di carattere virtuale, serie caratteristica e sistema aggiunto il tipo degli strumenti meglio appropriati al nuovo ordine di problemi. In particolare la considerazione dei successivi sistemi aggiunti doveva dar luogo ad uno dei più fecondi strumenti di ricerca della Geometria algebrica.

CASTELNUOVO ed ENRIQUES si incontrarono a Roma nel 1892, quando Castelnuovo aveva 27 anni ed Enriques solo 21. Castelnuovo era studente di CORRADO SEGERE, il quale lo incoraggiò ad occuparsi della teoria delle superfici, in cui era estremamente interessato.
I due giovani si avvicinarono all'argomento in maniera meno diretta, basandosi sulle tecniche sviluppate da Castelnuovo per le curve. e in particolare sull'approccio di Castelnuovo al Teorema di Riemann Roch.
Pur accettando l'idea che l'analisi complessa dovesse svolgere un ruolo chiave nella teoria, ebbero un approccio più geometrico e meno algebrico dei loro predecessori tedeschi.

Fondamentali per la teoria erano la considerazione dei sistemi lineari di curve sulla superficie, in particolare del sistema canonico e del sistema aggiunto ad un sistema di curve dato, di cui cercarono una definizione geometrica e birazionalmente invariante che sostituisse quella proiettiva di MAX NOETHER.

Dato un sistema lineare $|C|$, il sistema aggiunto è dato dalle curve che segano il gruppo canonico sulla curva generale del sistema e passano con molteplicità $i-1$ per ogni punto di molteplicità i del sistema lineare $|C|$.

In altre (moderne) parole abbiamo, sulla normalizzazione X della superficie

$$\omega_C \cong \omega_X \otimes \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C$$

da cui segue la celebre formula di aggiunzione

$$2g-2 = C\dot{(}C+K)$$

La principale difficoltà per le applicazioni del sistema aggiunto sta nel determinare la dimensione del sistema aggiunto di un sistema lineare di curve di genere π. Nel suo primo lavoro sulle superfici, Ricerche di geometria sulle superfici algebriche, Enriques determinò tale dimensioni per le superfici regolari ($\pi + p_g - 1$), per le quali diede anche una ingegnosa dimostrazione geometrica del teorema di Riemann Roch che calcola la dimensione r di un sistema lineare secondo la formula

$$r = \boxed{p_a} + \omega - \pi + 1 + s$$

dove s è il numero delle intersezioni comuni a due elementi generali del sistema e ω è la sovrabbondanza, definita esprimendo il numero di curve indipendenti del sistema aggiunto che passano per gli s punti di intersezione di due curve del sistema lineare $|C|$ come

$$2p_a + \omega$$

La sovrabbondanza ω ha un'altro significato che rende conto del suo nome. Se $|C|$ è segata dal sistema aggiunto e la dimensione virtuale ρ di $|C|$ viene calcolata con la formula di postulazione di Noether, si ha, in virtù del teorema di Noether

$$r - \rho = \omega - i$$

Enriques - riposte armonie

I plurigeneri

Castelnuovo ed Enriques si resero presto conto che il genere aritmetico e il genere geometrico erano invarianti troppo deboli su cui basare una classificazione delle superfici.

Il primo controesempio di Enriques

Esistono superfici non razionali con $p_g = p_a = 0$. Enriques produsse come controesempio la sestica che ha gli spigoli del tetraedro come curve doppie. Non esistono superficie aggiunte (quadriche passanti semplicemente per la curva dei punti doppi) ma esistono quartiche (l'unione dei piani delle facce). Quindi il sistema bicanonico è non vuoto, quindi la superficie non è razionale.

Teorema di Castelnuovo (1896)

Una superficie è razionale se e solo se $p_a = p_g = P_2 = 0$, dove P_2 è la dimensione del sistema bicanonico.

Questa di Castelnuovo è la prima classificazione birazionale di una superficie ed è la base della classificazione di Enriques delle superfici.

La teoria delle superficie algebriche - Clebsch e Noetheri

Lo studio della geometria birazionale delle superfici trae le sue origini da una nota del Clebsch del 1868 sul calcolo di un invariante birazionale e da due memorie classiche del Noether (1869 e 1874), dove introduceva, seguendo un accenno del Clebsch lo studio di certi integrali doppi a differenziale algebrico, che restano dappertutto finiti e sono analoghi agli integrali abeliani di prima specie.

Principali risultati di Noether

- introduzione di invarianti birazionali (genere geometrico, genere lineare (della serie canonica));
- teorema di razionalità delle superficie contenenti un fascio di curve razionali;
- classificazione dei piani doppi razionali.

Il Picard, volgendosi allo studio delle superficie algebriche per via trascendente, aveva avuto l'idea di considerare accanto agli integrali doppi di Clebsch e Noether gli integrali semplici algebrici, che appartengono ad una data superficie e aveva mostrato, su talune classi di superfici, copme la presenza di siffatti integrali, che nel caso più generale mancano, rilevi importanti proprietà della superficie stessa (1884-1893).
Il Picard divide gli integrali su una superficie in tre tipi:

1. Quelli che sono ovunque finiti
2. quelli che sono algebricamente infiniti lungo certe curve
3. quelli che sono logaritmicamente infiniti lungo certe curve

Sulle superfici liscie dello spazio non esistono integrali del primo tipo, ma ne esistono su alcune superfici singolari (Humbert).

A proposito degli integrali del secondo tipo, nel 1904 SEVERI mostrò come semplificare tali integrali in modo che fossero infiniti lungo una sola curva irriduibile. Se s sono gli integrali indipendenti del primo tipo, r quelli del primo o del secondo tipo, e q è l'irregolarità della superficie, allora Severi e Castelnuovo, utilizzando il teorema di Completezza di Enriques dimostrarono che $s = q$ e $r = 2q$.
Il teorema di completezza fu una spina nel fianco alla scuola italina. Enriques e Severi tentarono ripetutamente di darne una dimostrazione geometrica soddisfaciente, demolendo con arguzia e ferocia, l'uno la dimostrazione dell'altro.
Una dimostrazione moderna è possibile con la teoria di GROTHENDIECK delle deformazioni infinitesime di ordine superiori.

Secondo MUMFORD

> ENRIQUES *must be credited with a nearly complete geometric proof using, as did Grothendieck, higher order infinitesimal deformations. In other words, he anticipated Grothendieck in understanding that the key to unlocking the Fundamental Theorem was understanding and manipulating geometrically higher order deformations . He had the correct ideas about infinitesimal geometry , though he had no idea at all how to make precise definitions*

Secondo me c'è una forte analogia tra questo e la teoria algebrica delle equazioni differenziali sviluppata da Lie tra il 1870 e il 1899. Lie aveva le idee corrette sulla teoria dei fibrati dei getti ma non aveva alcuna idea di come definirli precisamente.
Entrambi Enriques e Lie (come Riemann prima di loro) sono matematici che fondano una nuova teoria senza avere ancora il linguaggio per esprimerne i concetti. Le loro dimostrazioni senza definizioni sono corrette perchè i concetti esistono anche senza il linguaggio. Questa è l'intuizione matematica.

Mi sembra che l'accanimento sulle pretese dimostrazioni di Enriques (Griffith e Harris arrivano al punto di non chiamarle dimostrazioni ma visioni) sia ingiusto e un compito dello storico sia quello di investigare le ragioni, matematiche e non, della diversa considerazione dell'opera di LIE rispetto a quella di ENRIQUES.

Mi sembra che l'accanimento sulle pretese dimostrazioni di Enriques (Griffith e Harris arrivano al punto di non chiamarle dimostrazioni ma visioni) sia ingiusto e un compito dello storico sia quello di investigare le ragioni, matematiche e non, della diversa considerazione dell'opera di LIE rispetto a quella di ENRIQUES.