Centro PRISTEM - Mateinitaly

LESSENZIALE2

Pesaro, 11-13 ottobre 2024

mateinitaly

Un percorso ludico sul sistema binario

prof. Alex Saltuari

Liceo Majorana, Roma

Perché?

Un percorso ludico sul sistema binario

A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

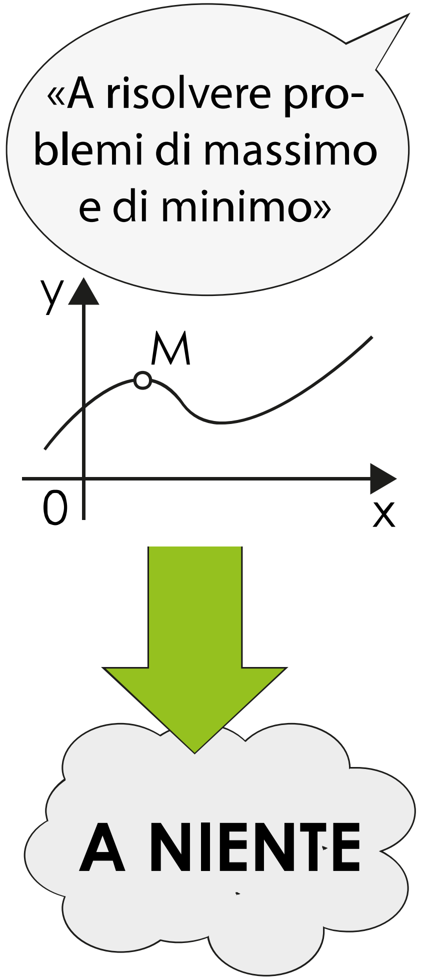
LA DERIVATA

A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

LA DERIVATA

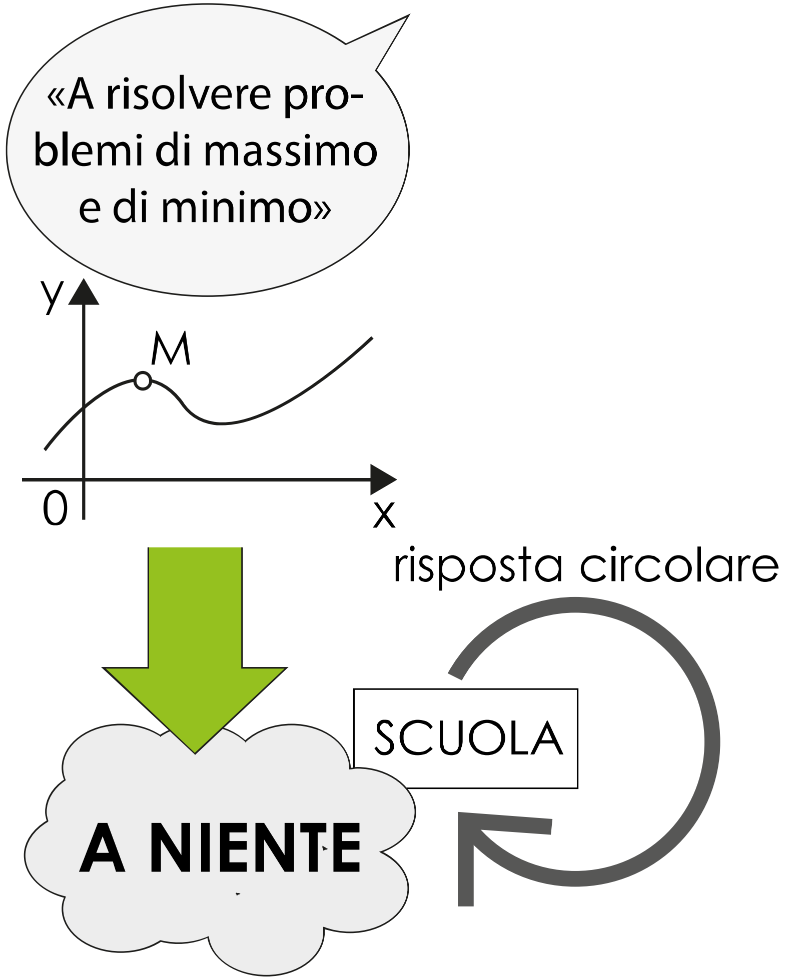
A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

LA DERIVATA



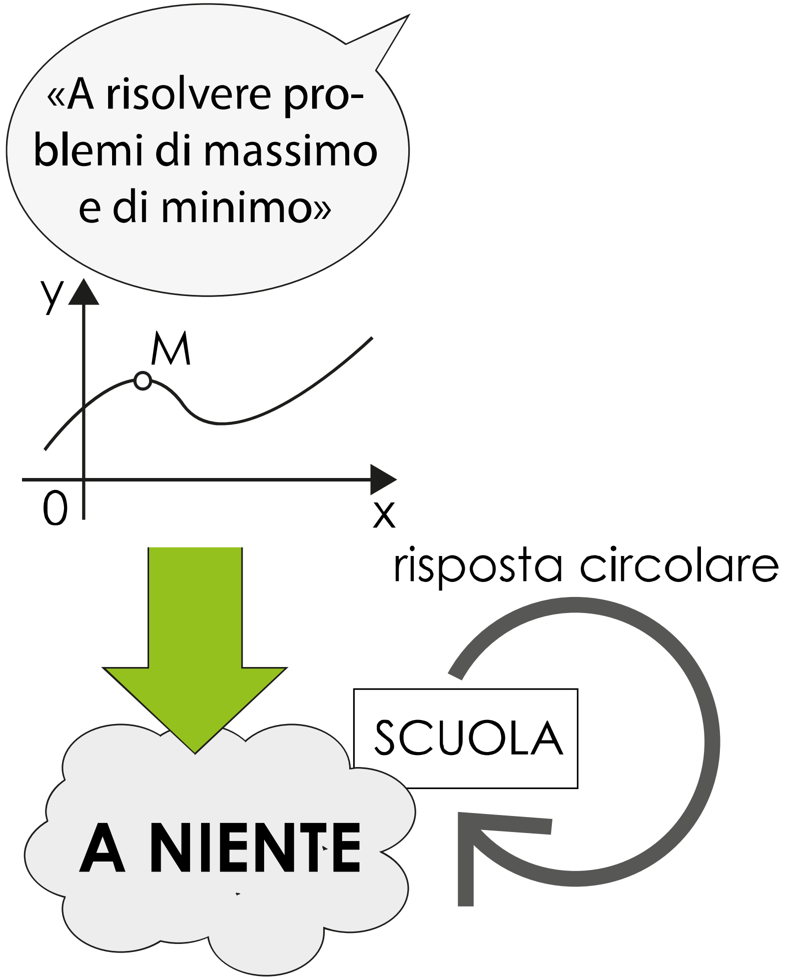
A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

LA DERIVATA



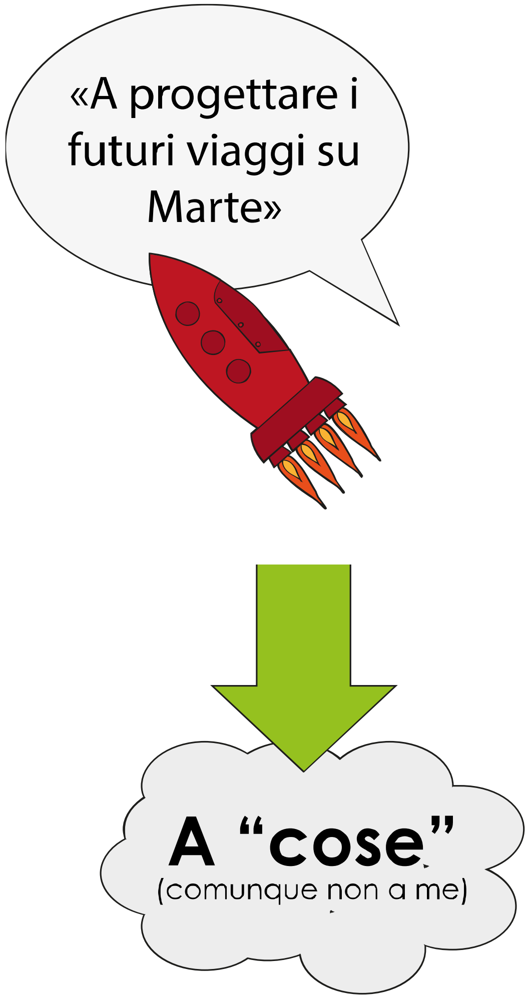
A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

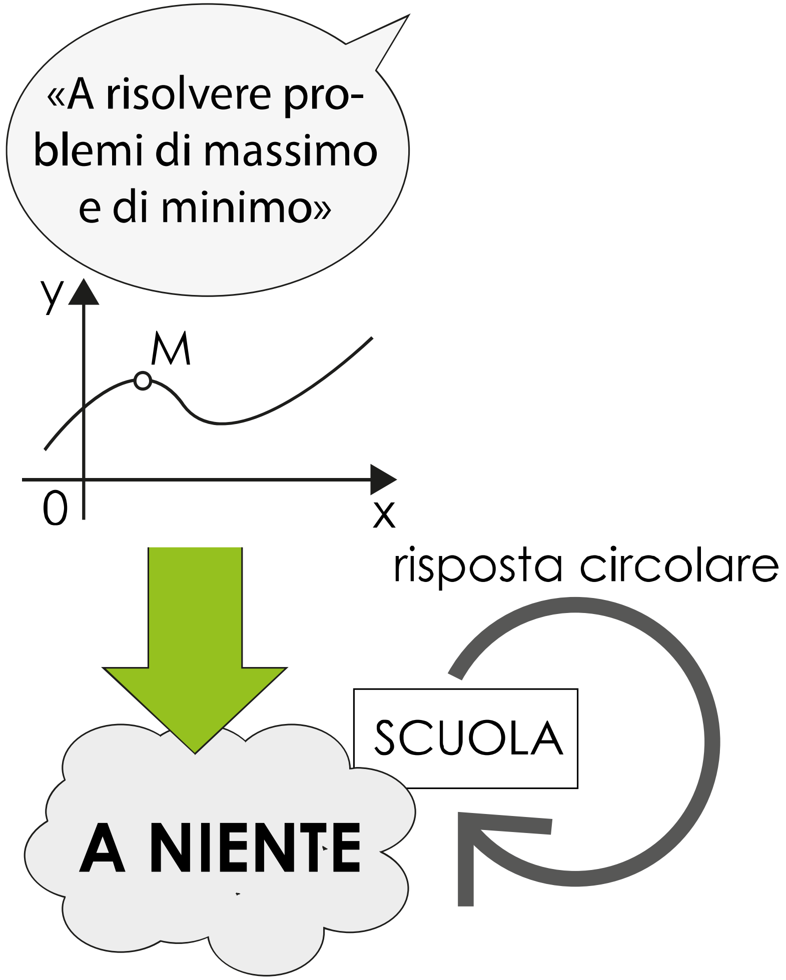
LA DERIVATA



A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

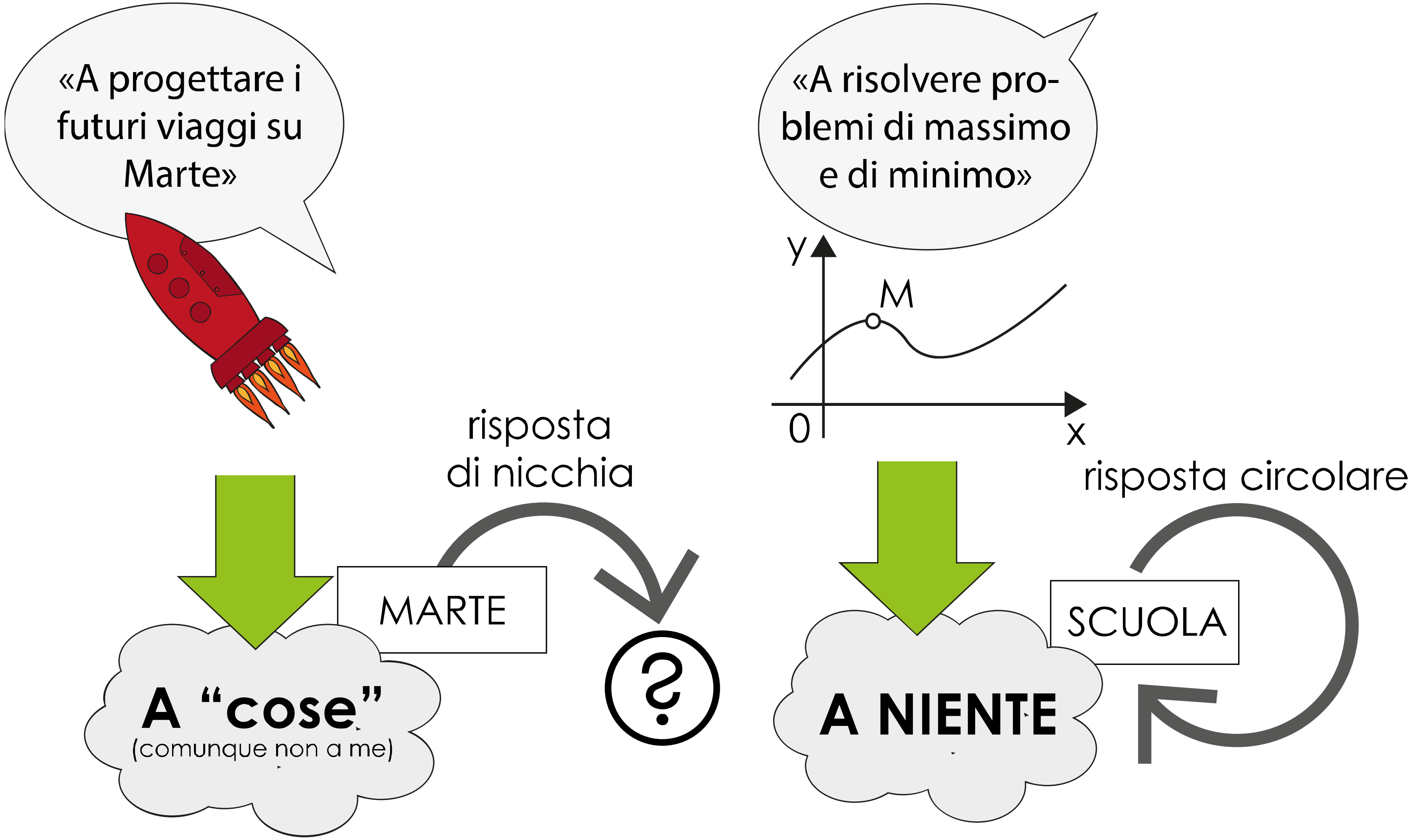
LA DERIVATA





A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

LA DERIVATA



A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

LA DERIVATA

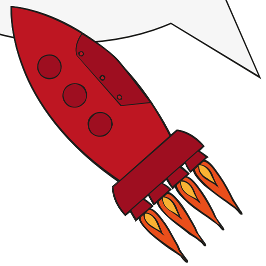
«A procacciarsi il cibo»

SERVE!

risposta definitiva

!

«A progettare i futuri viaggi su Marte»



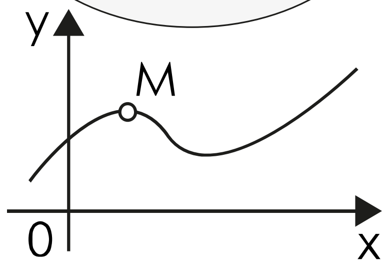
A "cose"
(comunque non a me)

MARTE

risposta di nicchia

?

«A risolvere problemi di massimo e di minimo»



A NIENTE

SCUOLA

risposta circolare

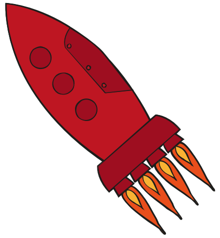
A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

In qualsiasi gioco «sociale»

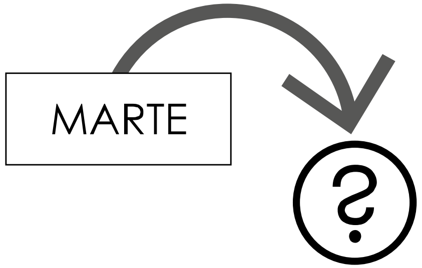
A vincere!

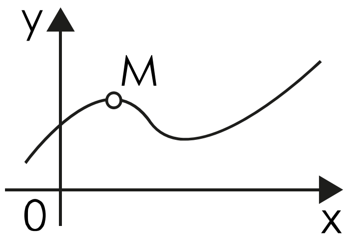
A capire il trucco!

risposta definitiva

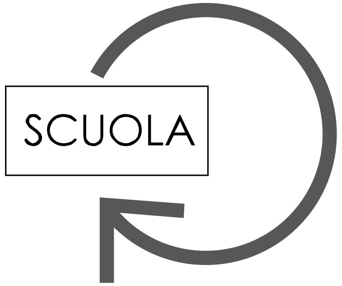


risposta di nicchia





risposta circolare



A che cosa serve…
(classificazione sentimentale)

In qualsiasi gioco «sociale»

A vincere!

A capire
il trucco!

«Capire un gioco», cioè conoscere una sua strategia vincente o capirne il «trucco», viene sempre percepito dagli studenti come una competenza vera, tale cioè da migliorare una persona.

risposta
definitiva

Il gioco non è quindi soltanto un espediente per introdurre o per approfondire un tema matematico ma arricchisce quella specifica conoscenza di un valore «affettivo».

Affinché il meccanismo funzioni e la competenza matematica afferente al gioco venga percepita come «degna di essere conosciuta» (e magari ri-studiata), devono essere verificate alcune condizioni.

Vincere il gioco deve essere socialmente premiante.

Il gioco deve essere spendibile al di fuori delle mura scolastiche (tra amici, in famiglia)

Non deve essere possibile (o comunque non deve essere facile) sostituire la competenza matematica richiesta con un altro tipo di ragionamento

Il gioco non è quindi soltanto un espediente per introdurre o per approfondire un tema matematico ma arricchisce quella specifica conoscenza di un valore «affettivo».

Affinché il meccanismo funzioni e la competenza matematica afferente al gioco venga percepita come «degna di essere conosciuta» (e magari ri-studiata), devono essere verificate alcune condizioni.

Vincere il gioco deve essere socialmente premiante.

Il gioco deve essere spendibile al di fuori delle mura scolastiche (tra amici, in famiglia)

Non deve essere possibile (o comunque non deve essere facile) sostituire la competenza matematica richiesta con un altro tipo di ragionamento

Il gioco non è quindi soltanto un espediente per introdurre o per approfondire un tema matematico ma arricchisce quella specifica conoscenza di un valore «affettivo».

Affinché il meccanismo funzioni e la competenza matematica afferente al gioco venga percepita come «degna di essere conosciuta» (e magari ri-studiata), devono essere verificate alcune condizioni.

Vincere il gioco deve essere socialmente premiante.

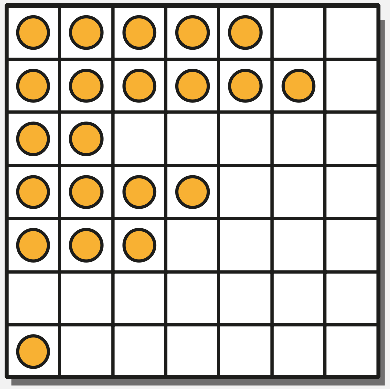
Il gioco deve essere spendibile al di fuori delle mura scolastiche (tra amici, in famiglia)

Non deve essere possibile (o comunque non deve essere facile) sostituire la competenza matematica richiesta con un altro tipo di ragionamento

In questo percorso mostrerò alcuni giochi atti a innescare il «compiacimento» di conoscere il sistema binario. C’erano due grandi filoni che potevano essere percorsi:

Vincere un gioco
con il sistema binario

Il sistema binario viene usato per creare strategie vincenti. Esempio per eccellenza: il **NIM**



Capire il trucco
con il sistema binario

Il sistema binario viene usato per svelare i meccanismi sottostanti ad alcune «magie». Esempi: «**Scopri il numero**», «**In fondo alla fila!**», «**Il problema di Giuseppe**»

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Vediamo delle «magie» che apparentemente con il sistema binario non c’entrano nulla…

Capire il trucco
con il sistema binario

Il sistema binario viene usato per svelare i meccanismi sottostanti ad alcune «magie». Esempi: «**Scopri il numero**», «**In fondo alla fila!**», «**Il problema di Giuseppe**»

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

U

1 GIOCO NUMERO 1 – **INDOVINA IL NUMERO**

Agli studenti vengono distribuite le tabelle rappresentate a fianco. Ciascuno è invitato a pensare a un intero da 1 a 63 e a rilevare all’insegnante soltanto il «nome» (U,D,Q,O,S,T) delle tabelle che contengono il numero. L’insegnante, senza guardare le il foglio (e senza conoscere le tabelle a memoria), svelerà magicamente il numero.

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

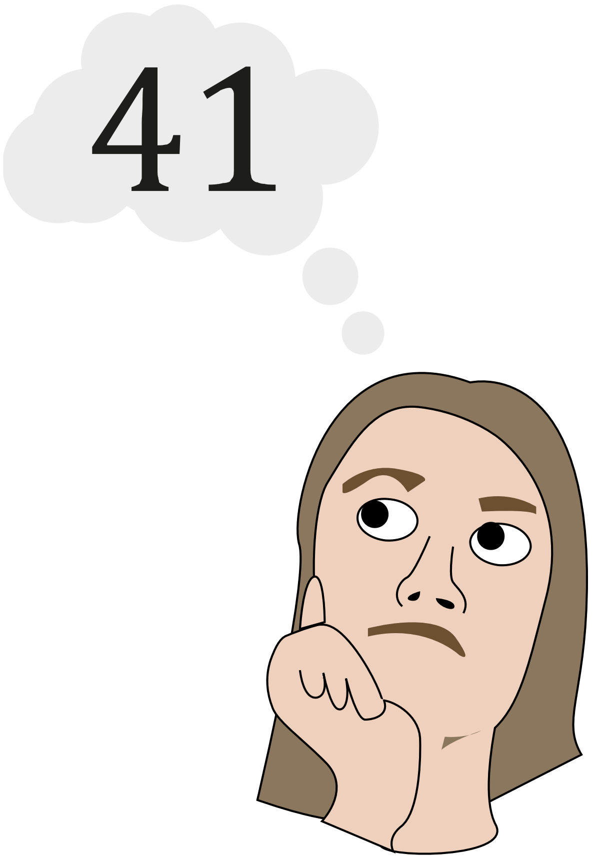
S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

1 GIOCO NUMERO 1 – **INDOVINA IL NUMERO**



ESEMPIO

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

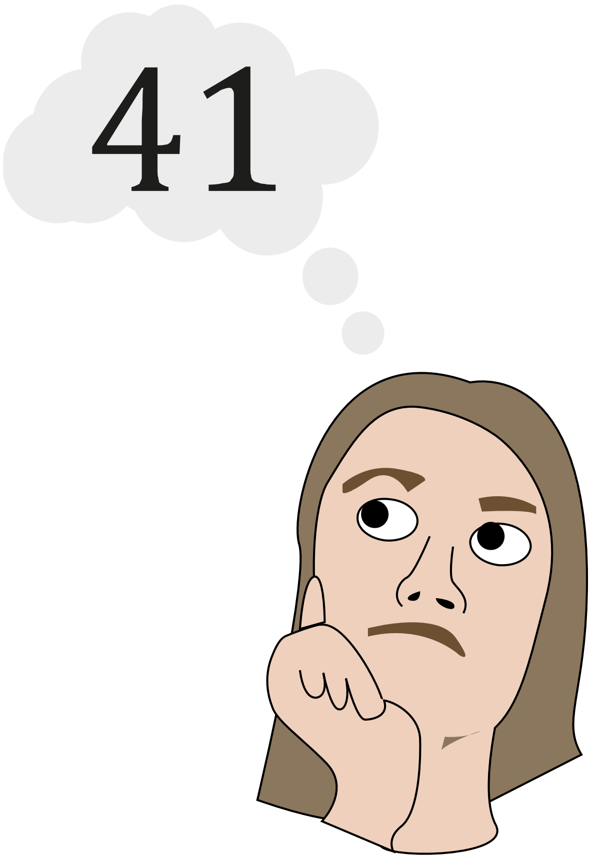
S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

1 GIOCO NUMERO 1 – **INDOVINA IL NUMERO**



ESEMPIO

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

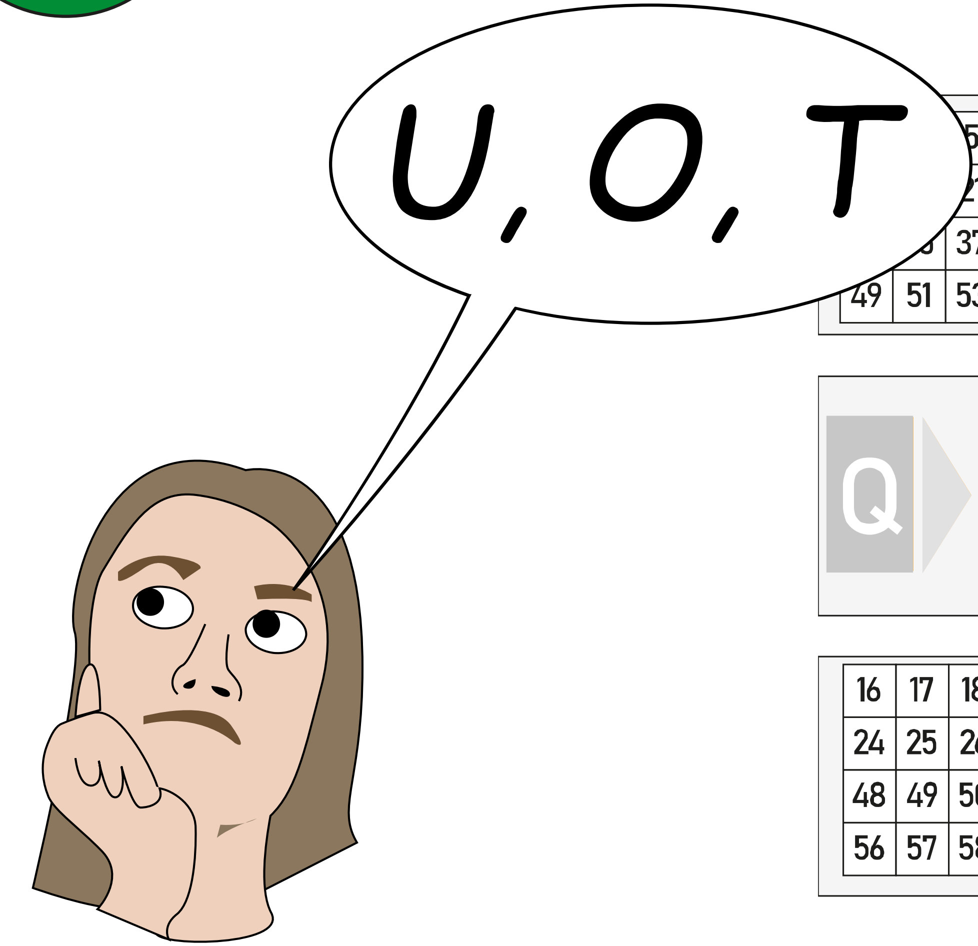
S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

1 GIOCO NUMERO 1 – **INDOVINA IL NUMERO**



ESEMPIO

[illegible]	[illegible]	5	7	9	11	13	15
[illegible]	[illegible]	21	23	25	27	29	31
[illegible]	[illegible]	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

U

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

D

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

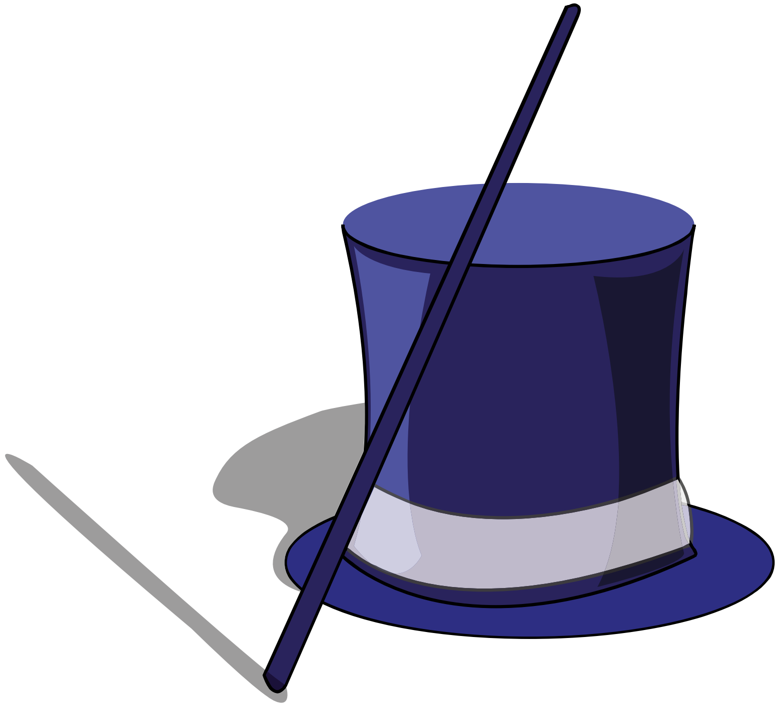
S

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

1

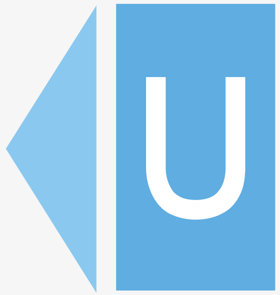
GIOCO NUMERO 1 – **INDOVINA IL NUMERO**



Come fa l’insegnante a indovinare?

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63



000001	000011	000101	000111	001001	001011	001101	001111
010001	010011	010101	010111	011001	011011	011101	011111
100001	100011	100101	100111	101001	101011	101101	101111
110001	110011	110101	110111	111001	111011	111101	111111

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

U

In **U** stanno tutti i numeri che, in binario, in <u>ultima posizione</u>, hanno la cifra $\boxed{1}$. Possiamo indicare questa tabella con **U** | | | | | | 1 |

00000**1**	00001**1**	00010**1**	00011**1**	00100**1**	00101**1**	00110**1**	00111**1**
01000**1**	01001**1**	01010**1**	01011**1**	01100**1**	01101**1**	01110**1**	01111**1**
10000**1**	10001**1**	10010**1**	10011**1**	10100**1**	10101**1**	10110**1**	10111**1**
11000**1**	11001**1**	11010**1**	11011**1**	11100**1**	11101**1**	11110**1**	11111**1**

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

0

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

001000	001001	001010	001011	001100	001101	001110	001111
011000	011001	011010	011011	011100	011101	011110	011111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

In **O** stanno tutti i numeri che, in binario, <u>in quartultima posizione</u>, hanno la cifra $\boxed{1}$. Possiamo indicare questa tabella con **O** $\boxed{}\boxed{}\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

00**1**000	00**1**001	00**1**010	00**1**011	00**1**100	00**1**101	00**1**110	00**1**111
01**1**000	01**1**001	01**1**010	01**1**011	01**1**100	01**1**101	01**1**110	01**1**111
10**1**000	10**1**001	10**1**010	10**1**011	10**1**100	10**1**101	10**1**110	10**1**111
11**1**000	11**1**001	11**1**010	11**1**011	11**1**100	11**1**101	11**1**110	11**1**111

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

Riscrivendo le tabelle nel sistema binario, notiamo che ciascuna contiene numeri «imparentati» fra loro. Vediamo alcuni esempi.

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

In **T** stanno tutti i numeri che, in binario, <u>in sestultima (prima) posizione</u>, hanno la cifra $\boxed{1}$.
Possiamo indicare questa tabella con **T** $\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

100000	**1**00001	**1**00010	**1**00011	**1**00100	**1**00101	**1**00110	**1**00111
101000	**1**01001	**1**01010	**1**01011	**1**01100	**1**01101	**1**01110	**1**01111
110000	**1**10001	**1**10010	**1**10011	**1**10100	**1**10101	**1**10110	**1**10111
111000	**1**11001	**1**11010	**1**11011	**1**11100	**1**11101	**1**11110	**1**11111

Riassumendo abbiamo la situazione schematizzata in basso. Con un po’ di fortuna, è possibile anche capire il perché dei «nomi» **U,D,Q,O,S,T**.

1

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

1

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

1

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

1

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

1

S

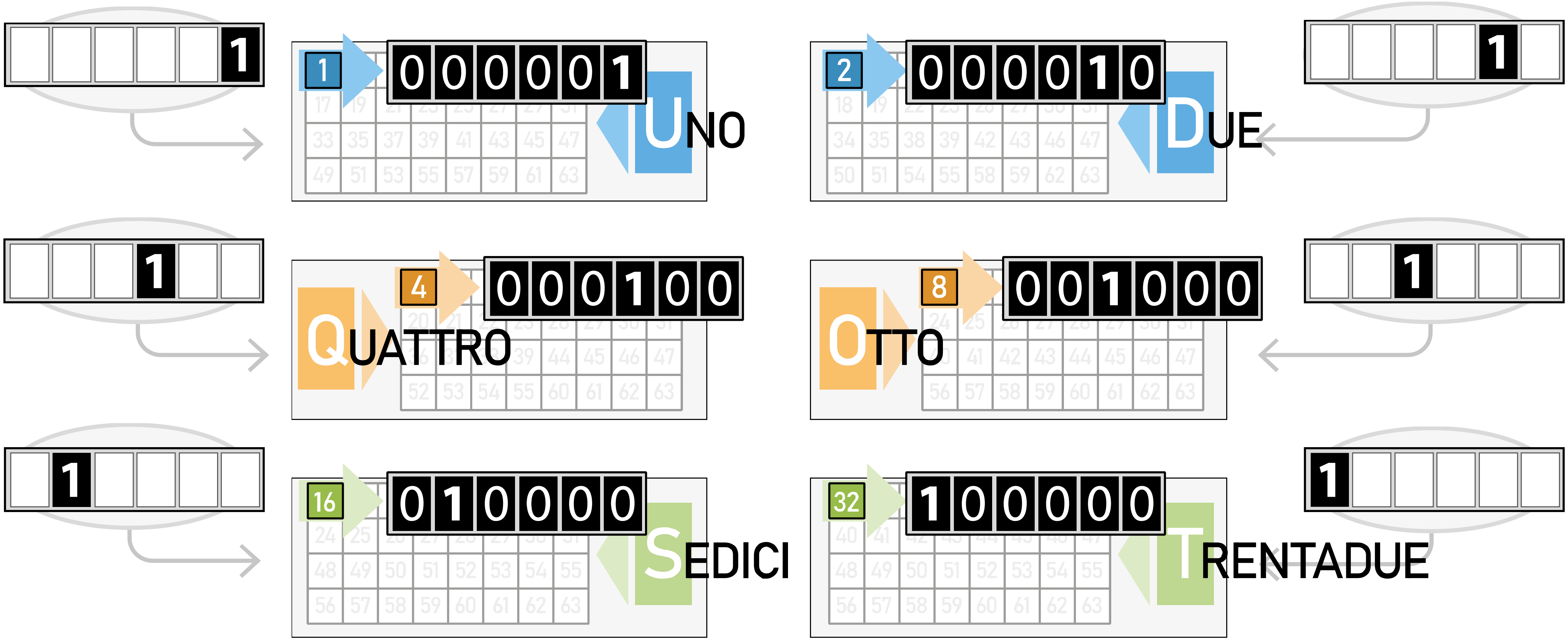
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

1

T

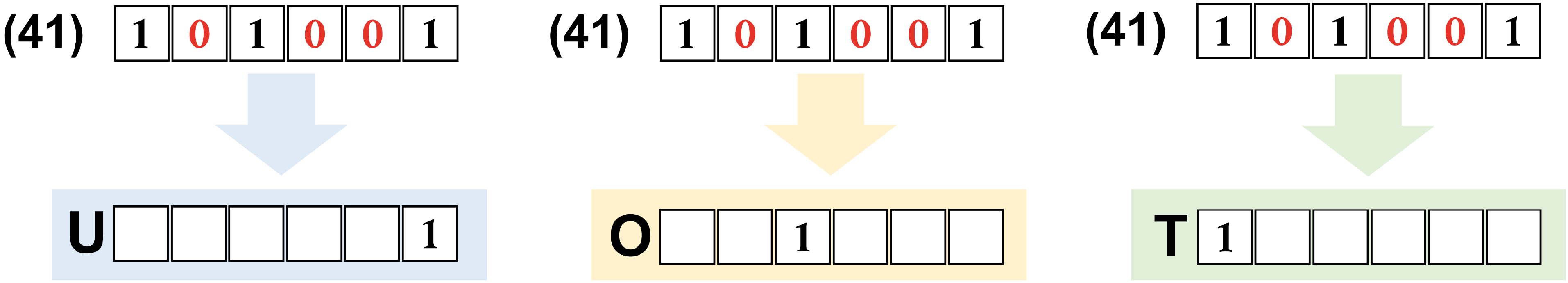
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Riassumendo abbiamo la situazione schematizzata in basso. Con un po’ di fortuna, è possibile anche capire il perché dei «nomi» **U,D,Q,O,S,T**.

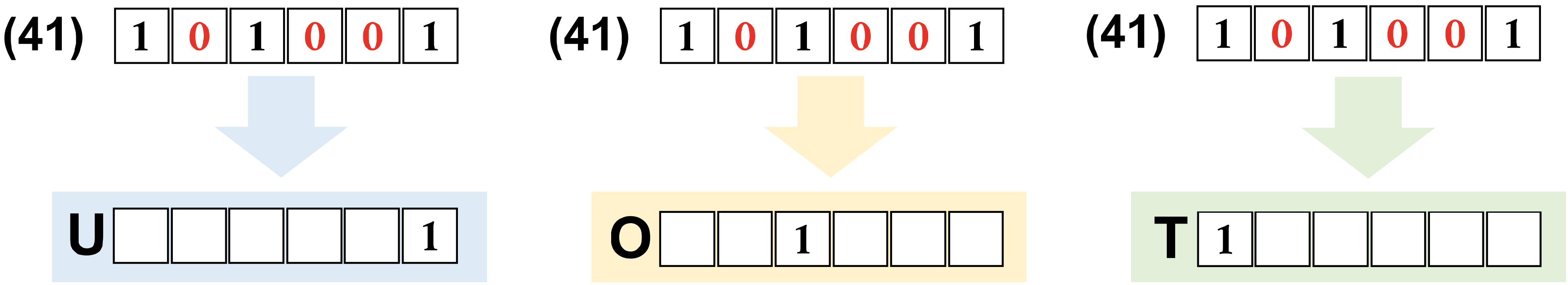


Le lettere sono le iniziali dei primi numeri in tabella: per costruzione sono potenze di 2, perché hanno una cifra «1» e tutte le altre «0» e sono quindi i più piccoli di ciascuna tabella.

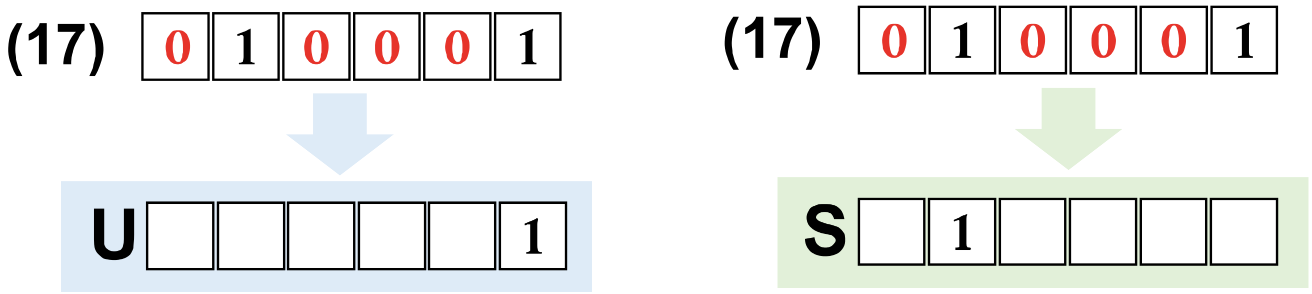
Il $41 = (101001)_2$ si trova nelle tabelle **U, O, I** (e soltanto in esse), per via della posizione delle cifre $\boxed{1}$ nella sua rappresentazione binaria.



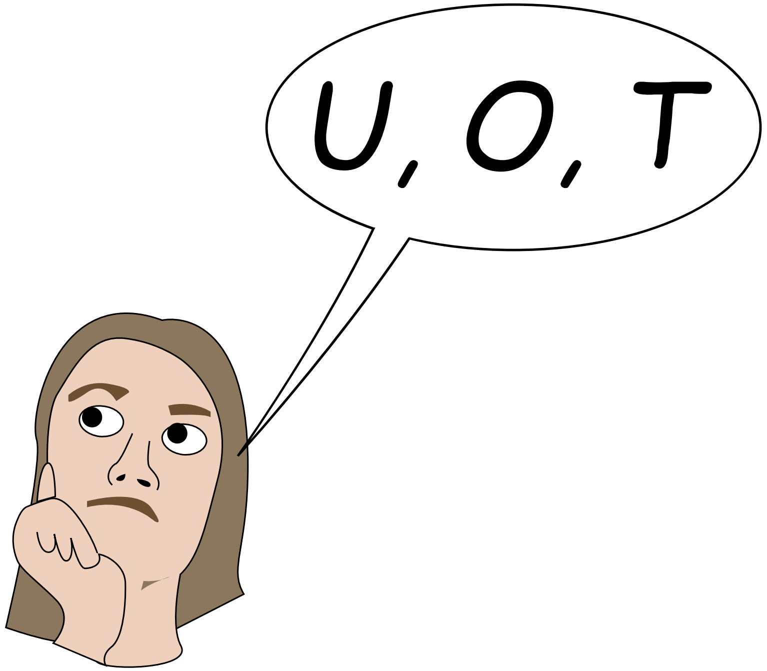
Il $41 = (101001)_2$ si trova nelle tabelle **U, O, I** (e soltanto in esse), per via della posizione delle cifre $\boxed{1}$ nella sua rappresentazione binaria.



Seguendo lo stesso ragionamento e senza dover controllare le tabelle, possiamo ricostruire le posizioni di tutti i numeri. Per esempio il $17 = (010001)_2$ si trova nelle tabelle **U,S** (e soltanto in esse):



Alla spiegazione manca l’ultimo tassello: come fa il mago a capire così velocemente a quale numero si sta pensando?



U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

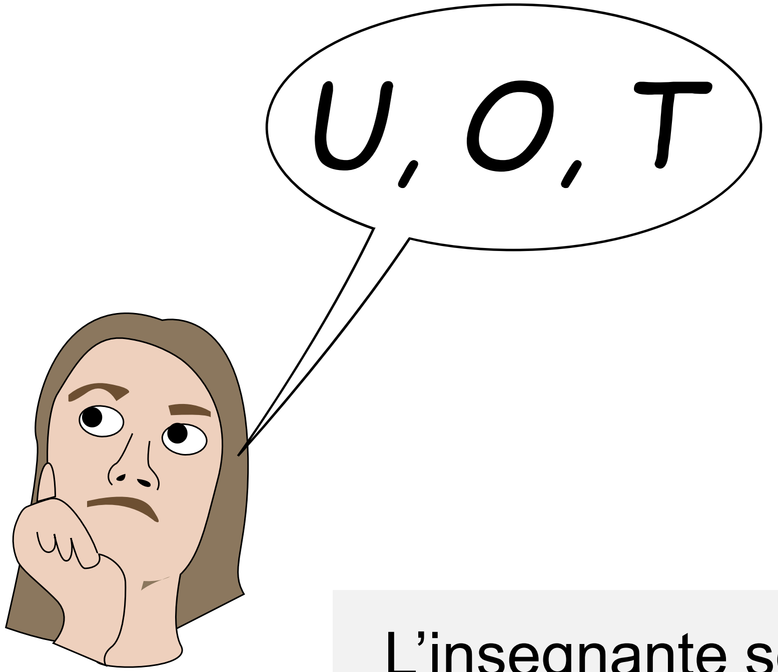
S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Alla spiegazione manca l'ultimo tassello: come fa il mago a capire così velocemente a quale numero si sta pensando?



U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	[illegible]	[illegible]
56	57	58	59	60	61	[illegible]	[illegible]

L'insegnante somma fra loro **U,O,T**, cioè **U**no, **O**tto, **T**rentadue, i «primi numeri» delle tabelle di appartenenza. Perché funziona?

L'insegnante somma fra loro **U,O,T**, cioè **U**no, **O**tto, **T**rentadue, i «primi numeri» delle tabelle di appartenenza. Perché funziona?

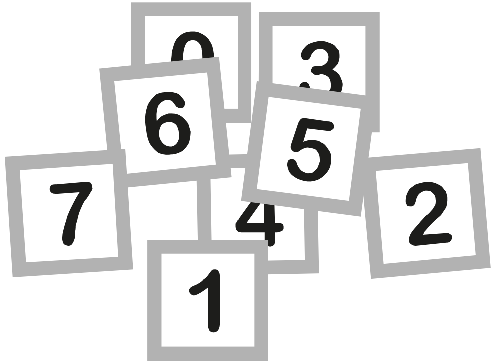
Sommare le singole potenze di 2 (ciascuna delle quali ha un solo $\boxed{1}$ in binario), vuol semplicemente dire mettere tutti gli $\boxed{1}$ al posto giusto!

(32)	1	0	0	0	0	0
(8)	0	0	1	0	0	0
(1)	0	0	0	0	0	1
(41)	1	0	1	0	0	1

2 GIOCO NUMERO 2 – **IN FONDO ALLA FILA!**

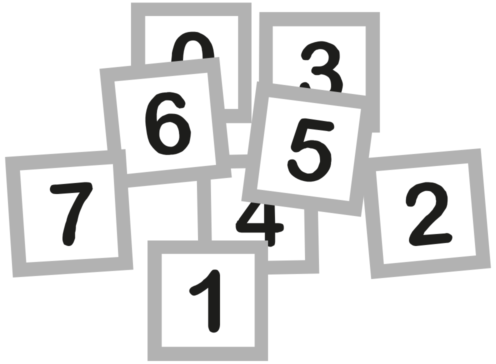
2

GIOCO NUMERO 2 – **IN FONDO ALLA FILA!**



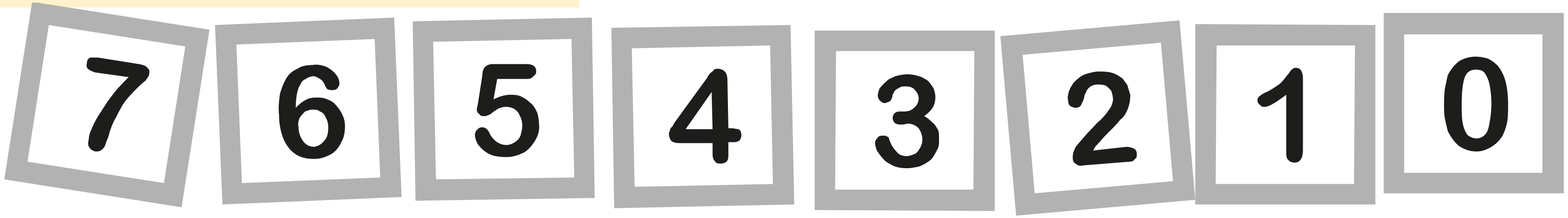
1) Ad ogni studente (o a ogni gruppo di studenti) vengono fornite 8 tessere numerate da 0 a 7

GIOCO NUMERO 2 – **IN FONDO ALLA FILA!**

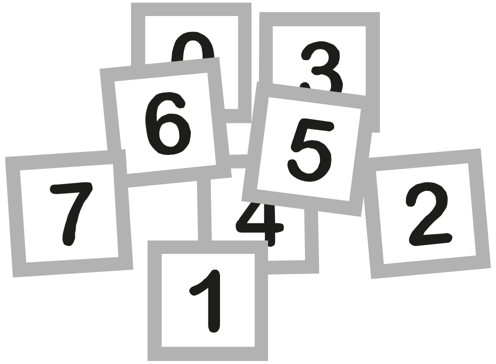


1) Ad ogni studente (o a ogni gruppo di studenti) vengono fornite 8 tessere numerate da 0 a 7

2) Gli studenti devono appoggiare le tessere in fila su banco, disponendo i numeri in ordine decrescente (quindi dal 7 allo 0)

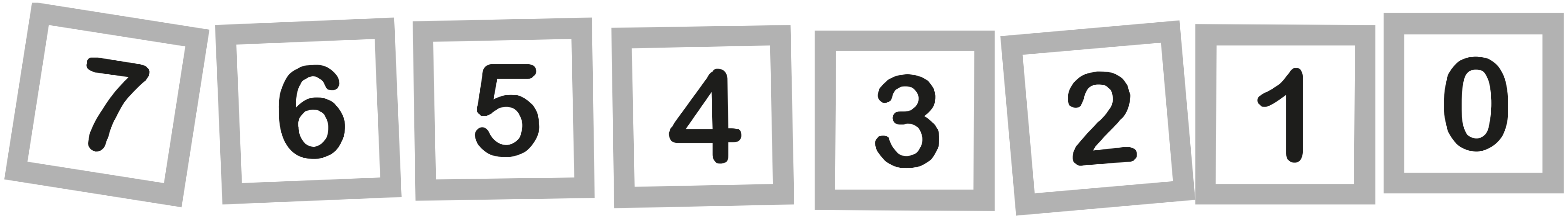


2 GIOCO NUMERO 2 – **IN FONDO ALLA FILA!**



1) Ad ogni studente (o a ogni gruppo di studenti) vengono fornite 8 tessere numerate da 0 a 7

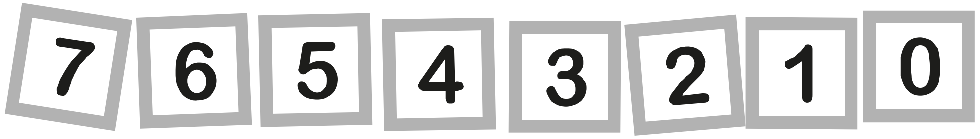
2) Gli studenti devono appoggiare le tessere in fila su banco, disponendo i numeri in ordine decrescente (quindi dal 7 allo 0)



3) Il compito assegnato agli studenti è di riordinare i numeri **in ordine crescente**, potendo però disporre di un solo tipo di mossa: «In fondo al fila!».

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l’intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.



Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l’intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

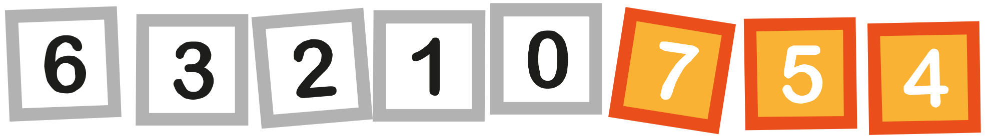
Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa



Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa 6 3 2 1 0 7 5 4

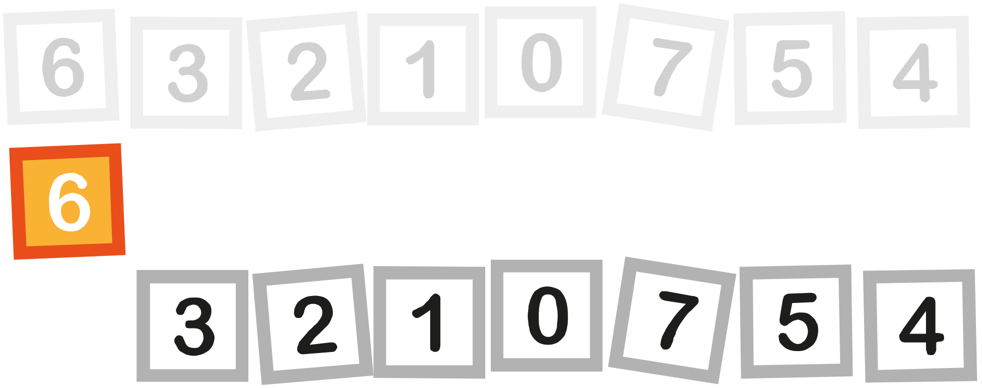
2° mossa 6 3 2 1 0 7 5 4

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa

2° mossa



Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l’intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa 6 3 2 1 0 7 5 4

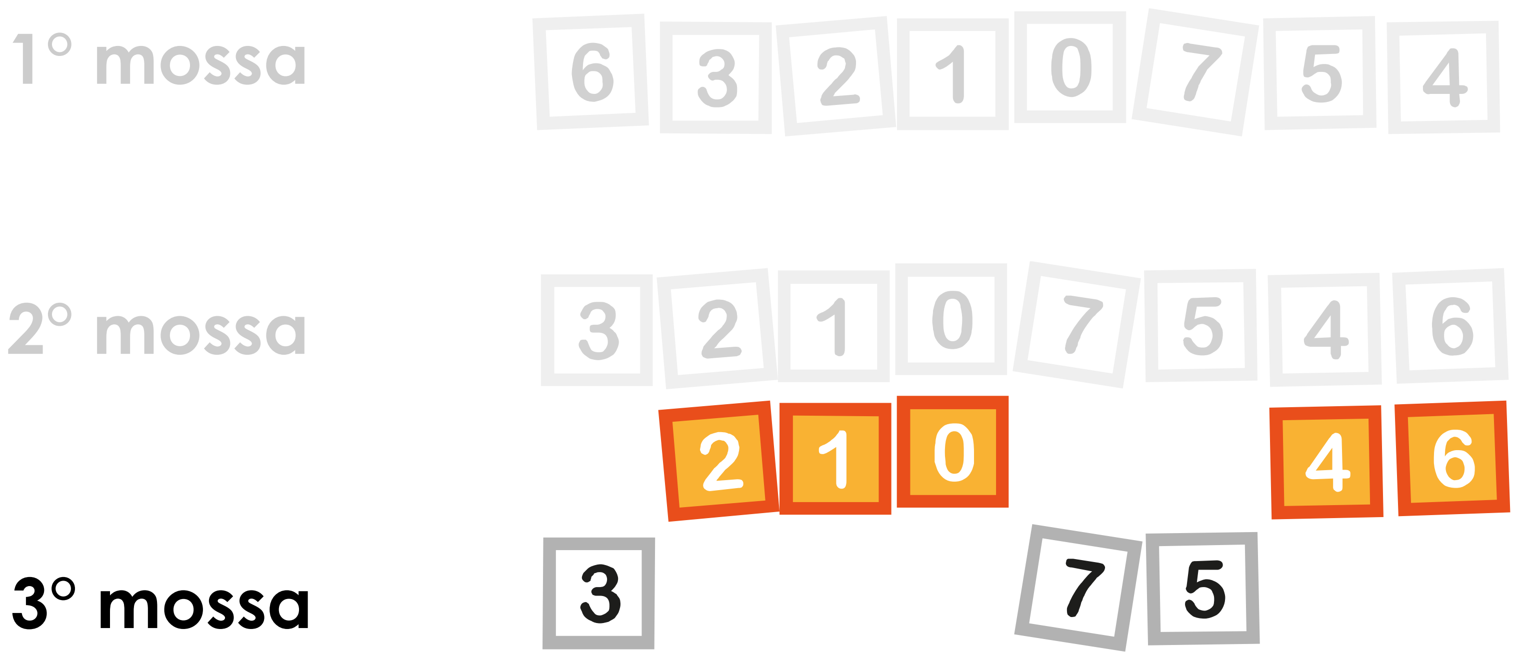
2° mossa 3 2 1 0 7 5 4 6

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l’intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.



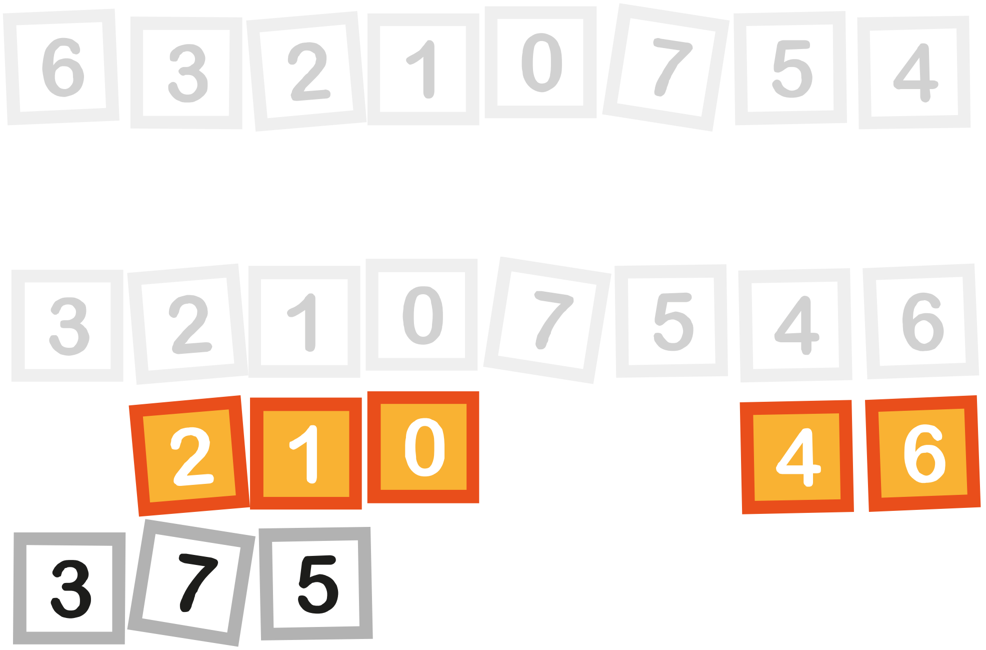
Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l'intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

1° mossa

2° mossa

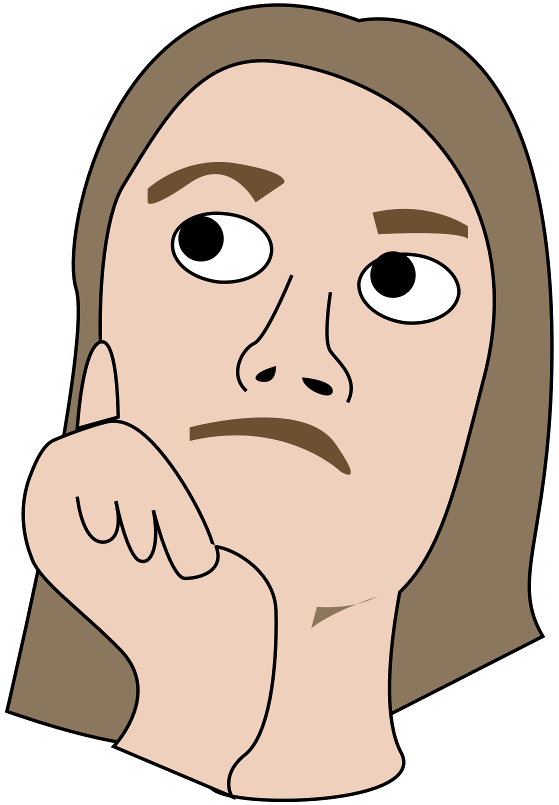
3° mossa



Spiegazione della mossa «In fondo alla fila!»

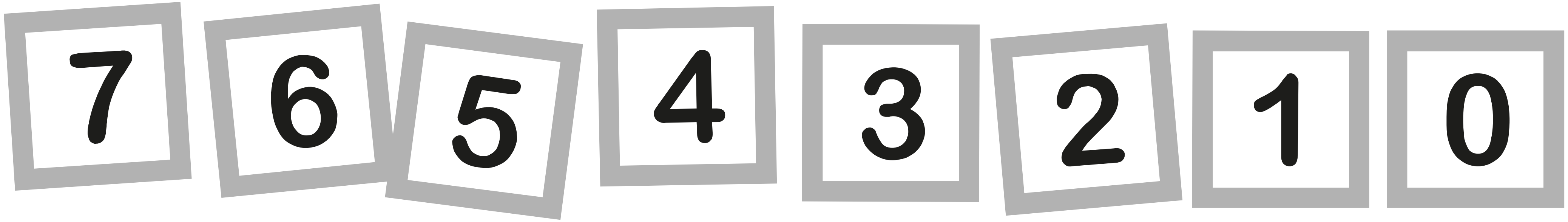
Ad ogni turno, bisogna scegliere un numero qualsiasi di tessere, estrarle dal gruppo (senza mischiarle fra loro, mantenendo cioè il loro ordine reciproco) e disporle in coda alla fila. Indipendentemente dal numero di tessere spostate, l’intera operazione viene conteggiata come «UNA» mossa.

Voi come risolvereste il problema?



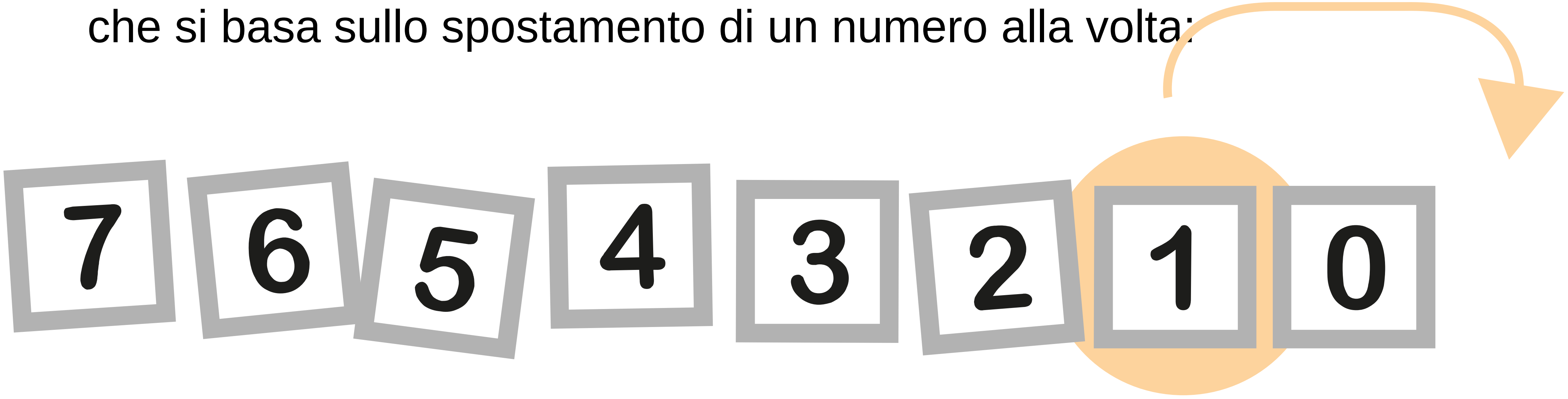
SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



SOLUZIONE «BANALE»

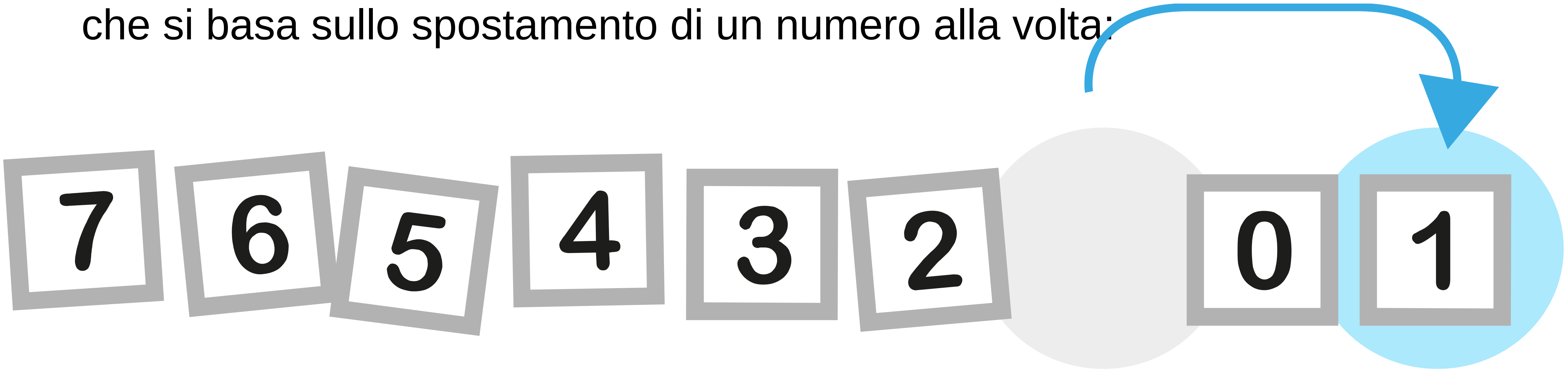
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 1

SOLUZIONE «BANALE»

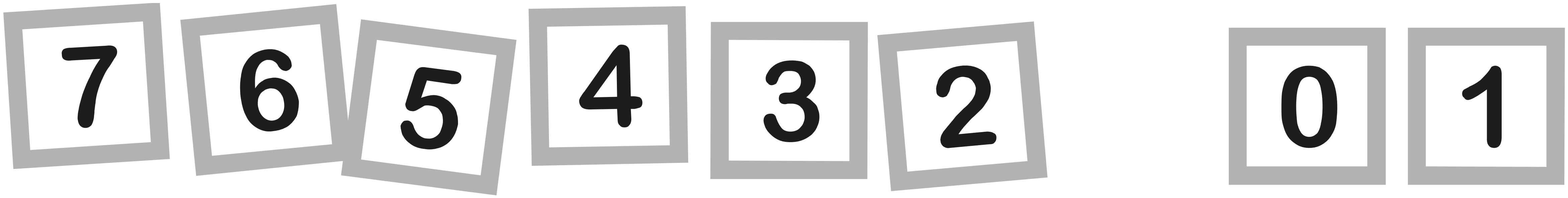
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 1

SOLUZIONE «BANALE»

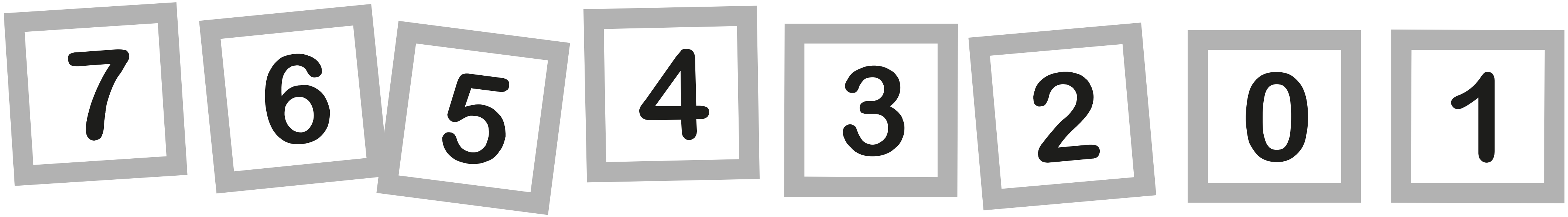
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 1

SOLUZIONE «BANALE»

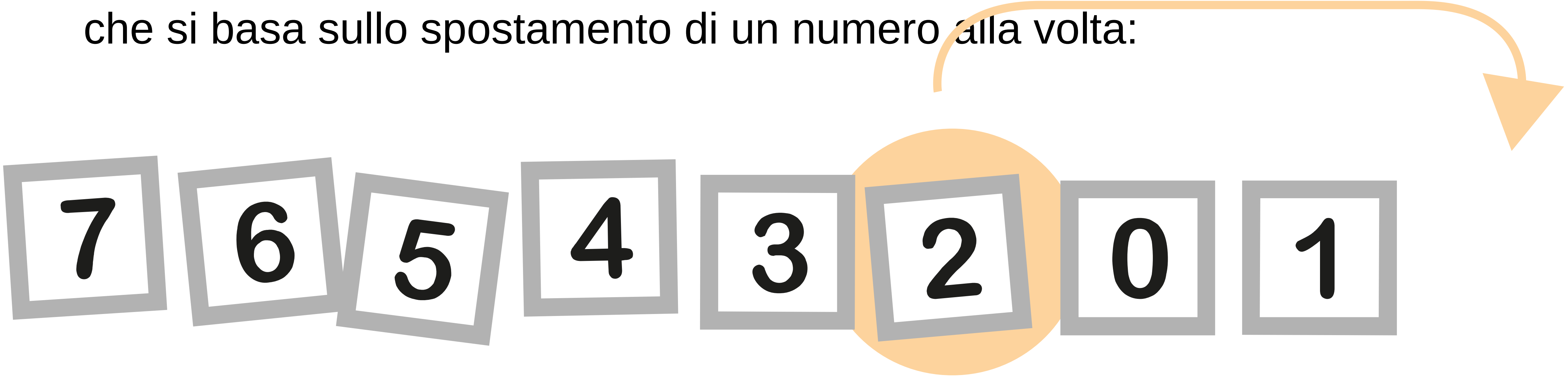
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 1

SOLUZIONE «BANALE»

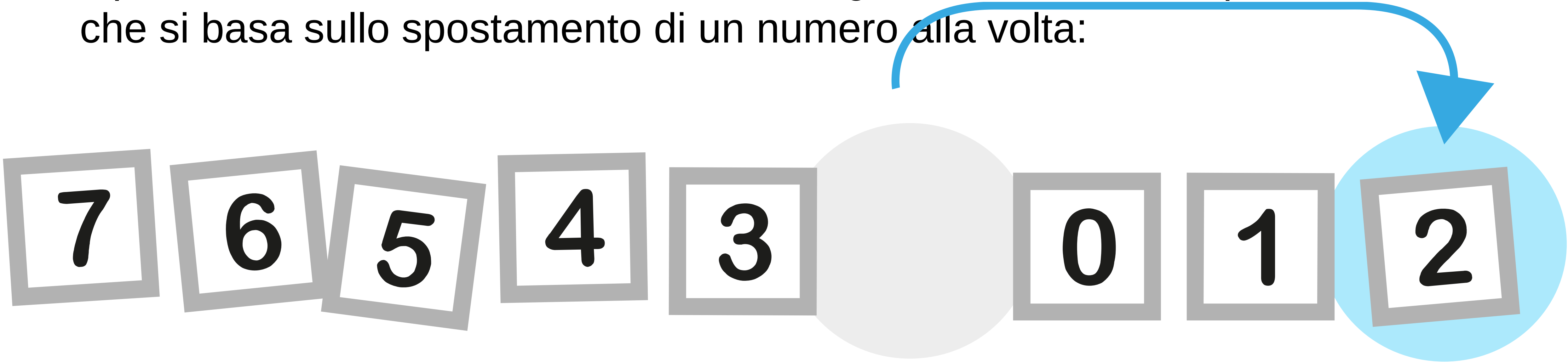
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 2

SOLUZIONE «BANALE»

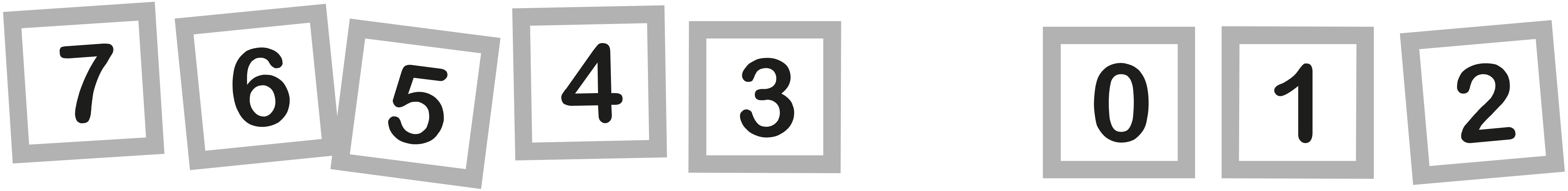
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 2

SOLUZIONE «BANALE»

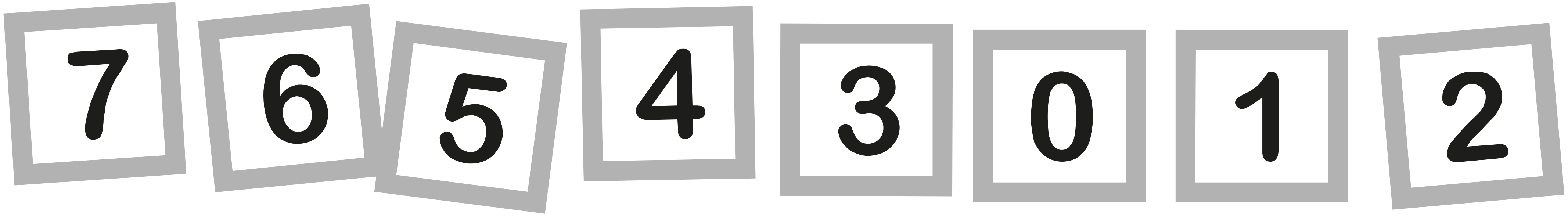
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 2

SOLUZIONE «BANALE»

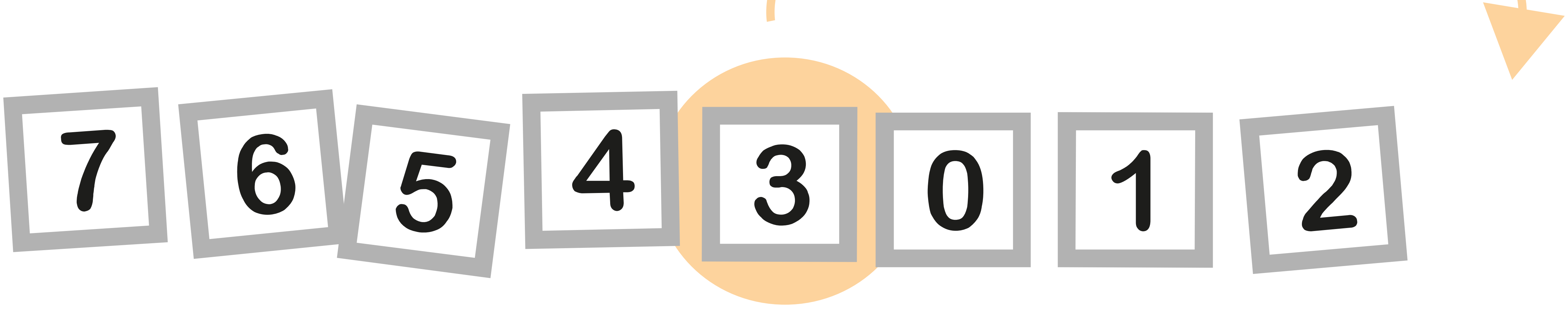
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 2

SOLUZIONE «BANALE»

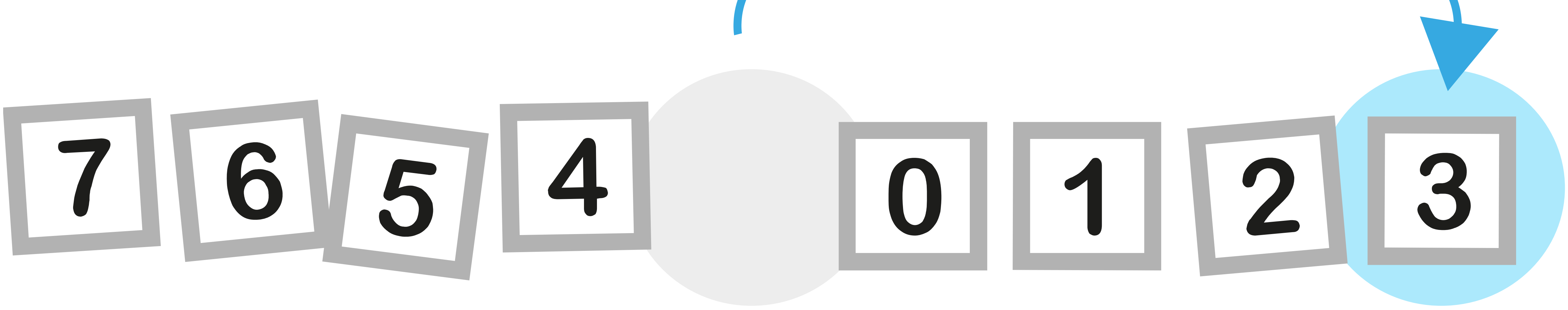
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 3

SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 3

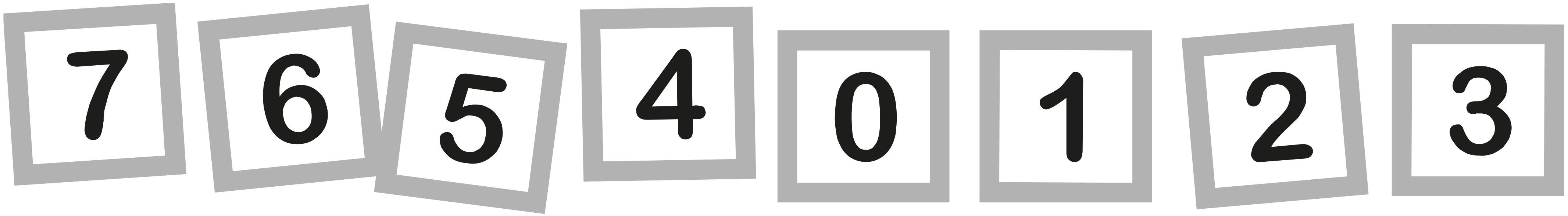
SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:

Mossa numero: 3

SOLUZIONE «BANALE»

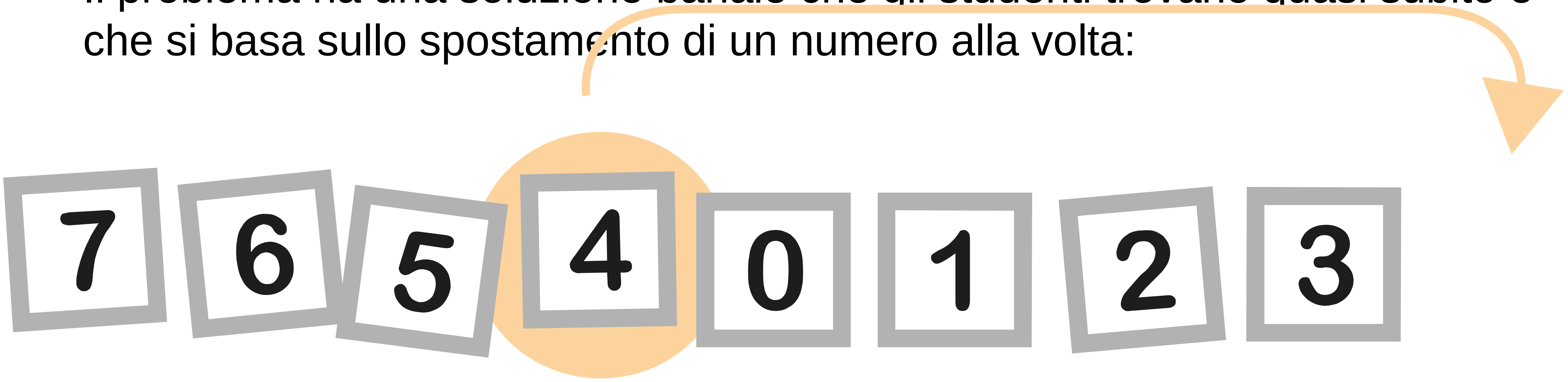
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 3

SOLUZIONE «BANALE»

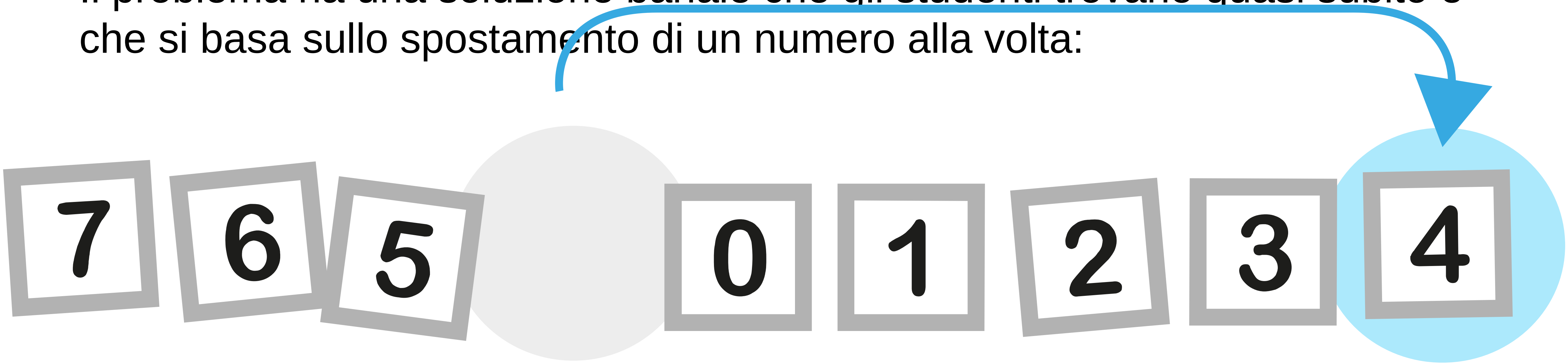
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 4

SOLUZIONE «BANALE»

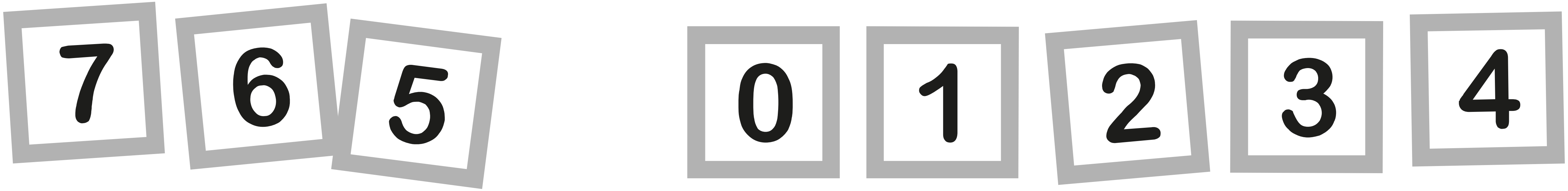
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 4

SOLUZIONE «BANALE»

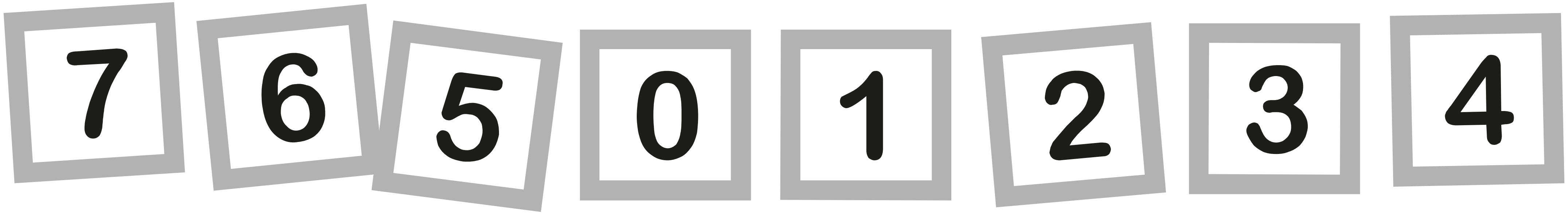
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 4

SOLUZIONE «BANALE»

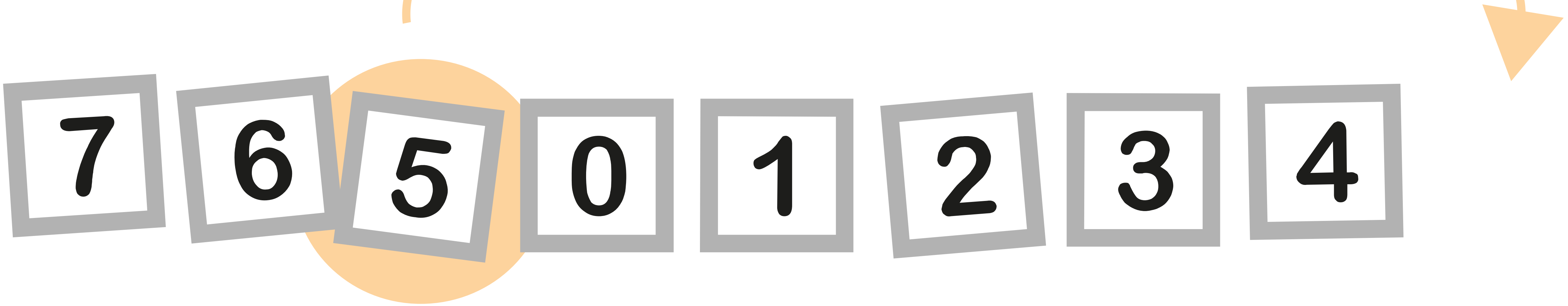
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 4

SOLUZIONE «BANALE»

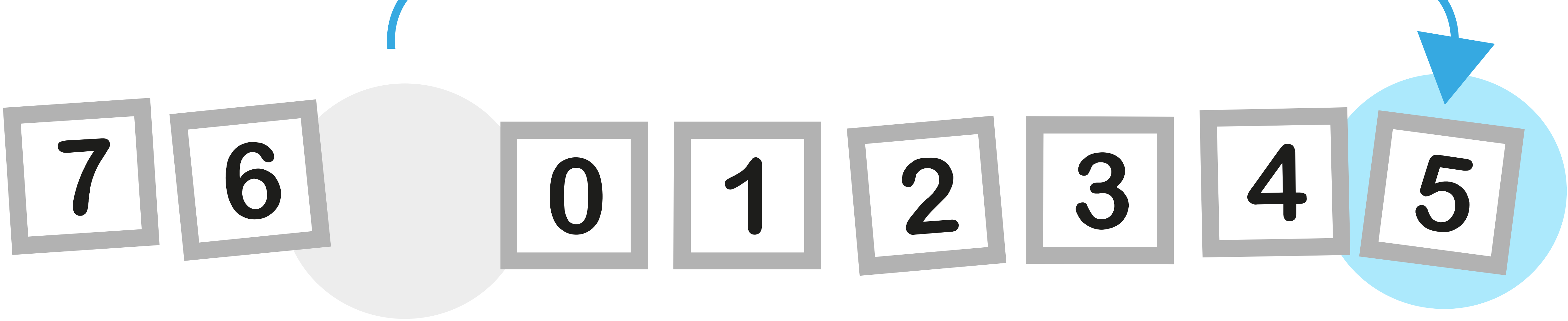
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 5

SOLUZIONE «BANALE»

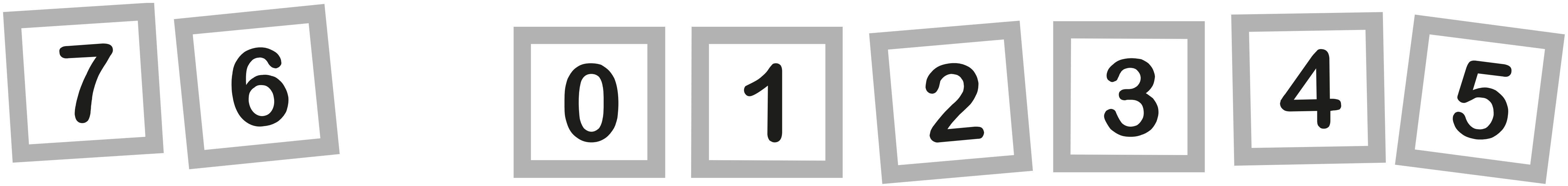
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 5

SOLUZIONE «BANALE»

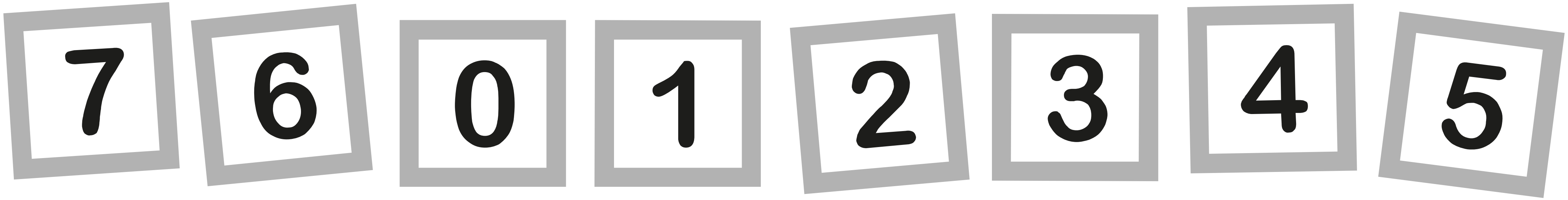
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 5

SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 5

SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:

Mossa numero: 6

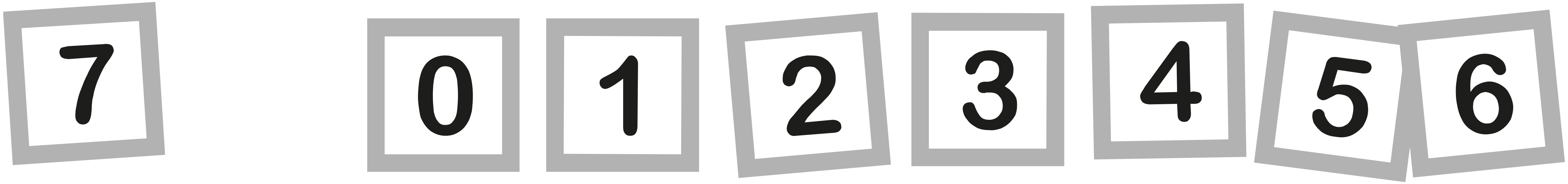
SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:

Mossa numero: 6

SOLUZIONE «BANALE»

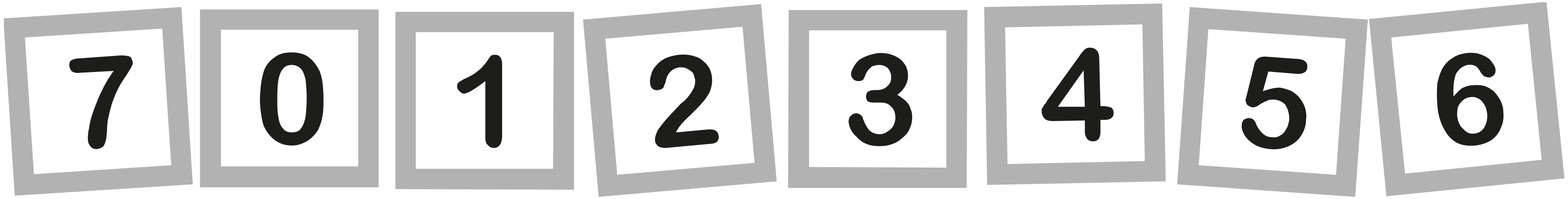
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 6

SOLUZIONE «BANALE»

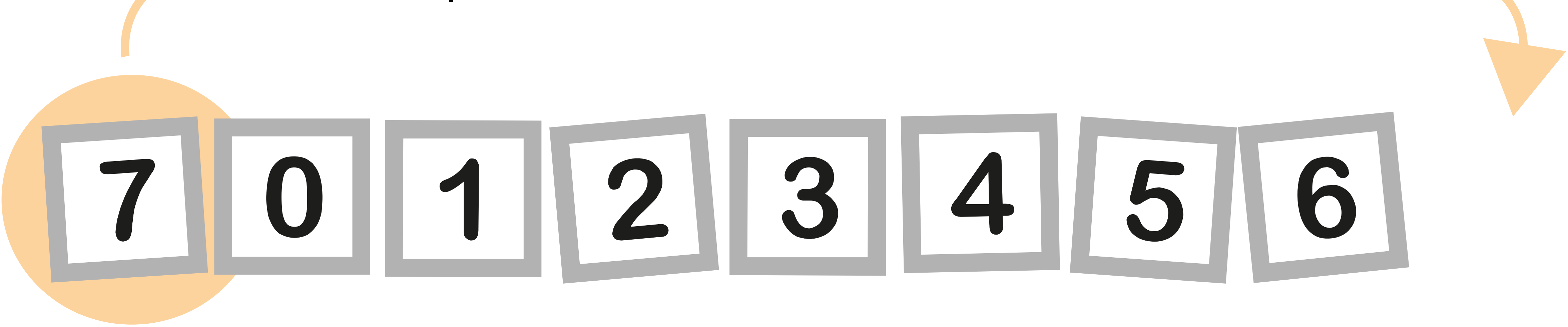
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 6

SOLUZIONE «BANALE»

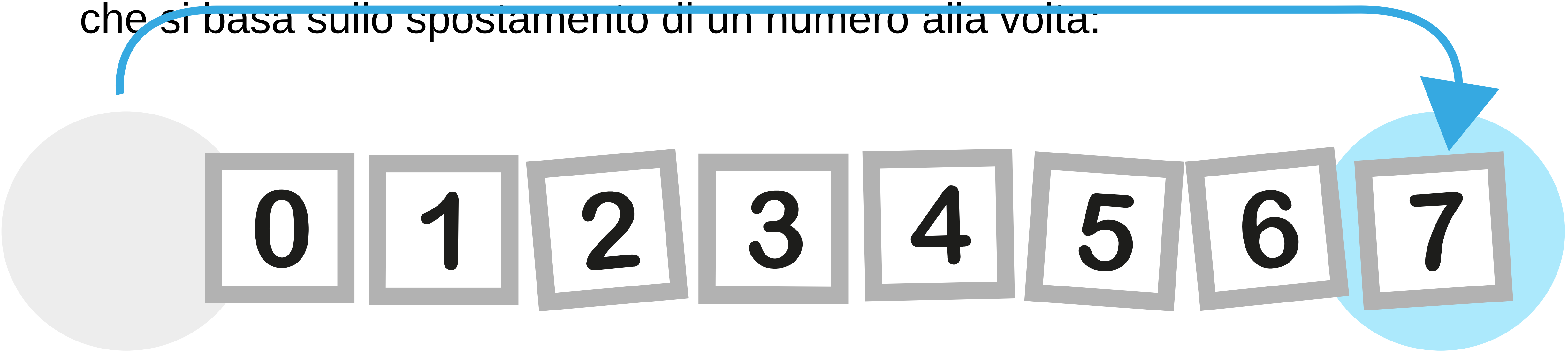
Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 7

SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:



Mossa numero: 7

SOLUZIONE «BANALE»

Il problema ha una soluzione banale che gli studenti trovano quasi subito e che si basa sullo spostamento di un numero alla volta:

0 1 2 3 4 5 6 7

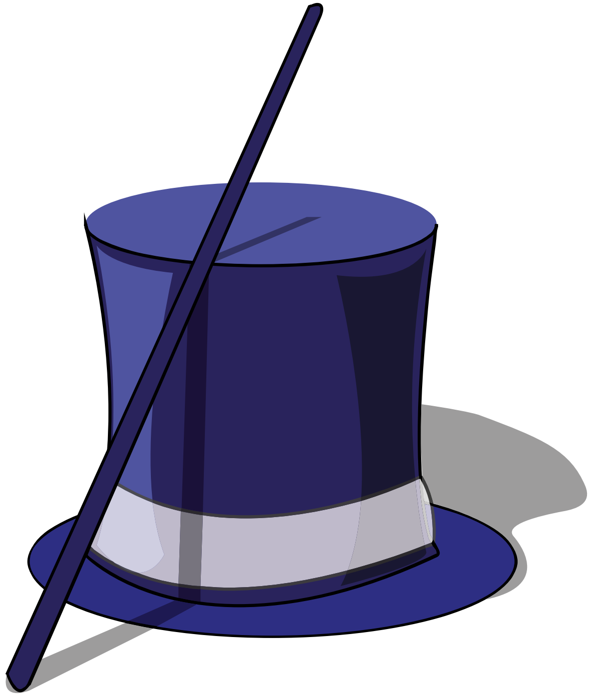
Mossa numero: 7

Spostando un numero alla volta (o anche sette per volta) è possibile, dopo 7 mosse, disporre le tessere in ordine crescente. Si tratta di una soluzione poco interessante per l'uso che se ne farà in seguito, per cui il docente aggiunge alcune richieste al fine di trovare alternative. La più ovvia (ma non l'unica) è di «fare economia di mosse»:

Trovate una soluzione che metta in ordine la sequenza in **meno di sei mosse**!

Importante: l'insegnante prende nota «pubblicamente» (sulla lavagna o scrivendolo su un poster) delle strategie vincenti, segnando le mosse che hanno portato al riordino.

Vediamo ora una piccola magia



1

Disponete di nuovo le tessere su una fila ma stavolta mischiatele in un ordine qualsiasi

1. Disponete di nuovo le tessere su una fila ma stavolta mischiatele in un ordine qualsiasi

2. Riprendete le tessere usate nel gioco «Indovina il numero».

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

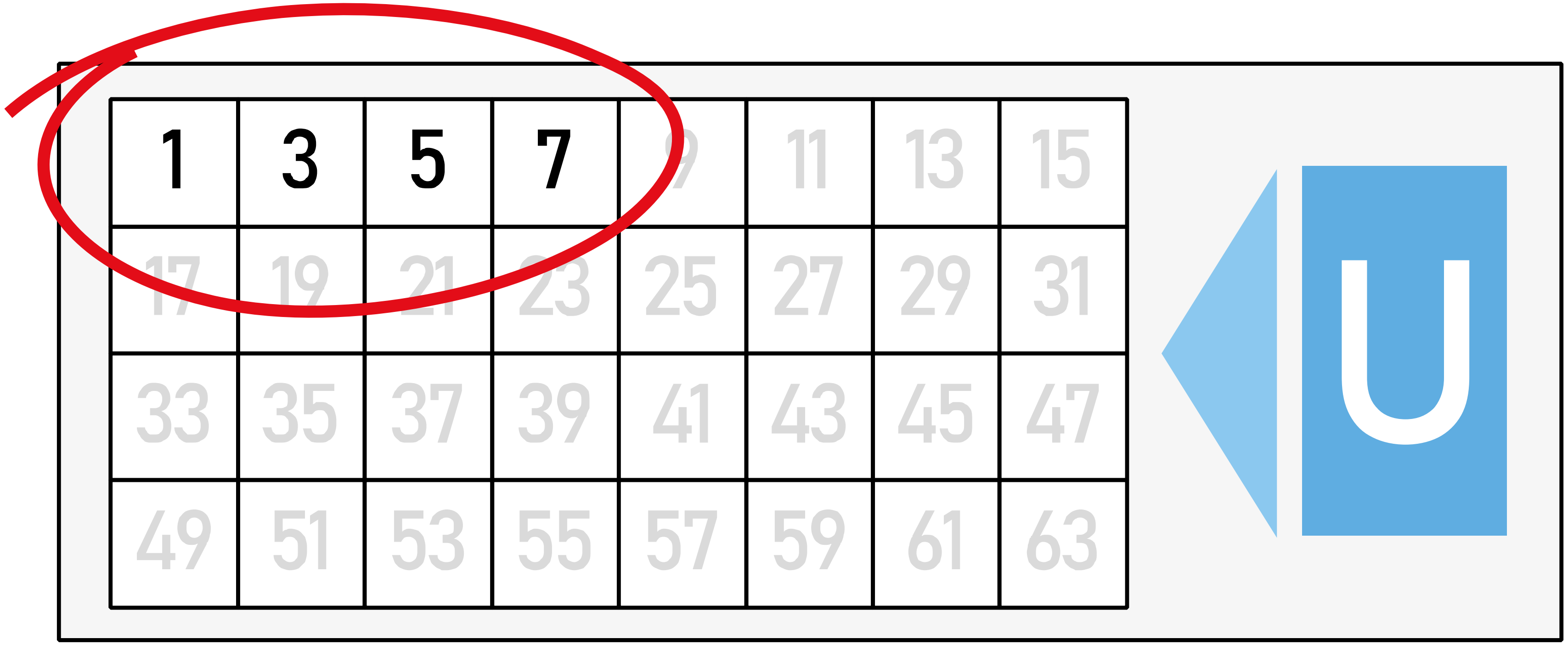
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

3

Prima mossa: selezionate dalla vostra sequenza casuale i quattro numeri indicati in basso (nell’ordine in cui ve li trovate, perché ricordo che non è concesso modificare le loro posizioni reciproche). Spostate le 4 tessere in fondo alla fila!



4 Seconda mossa: di nuovo fate «la mossa» utilizzando (nell’ordine in cui ve li trovate nella sequenza) i 4 numeri indicati in basso (stavolta dalla tabella **D**):

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

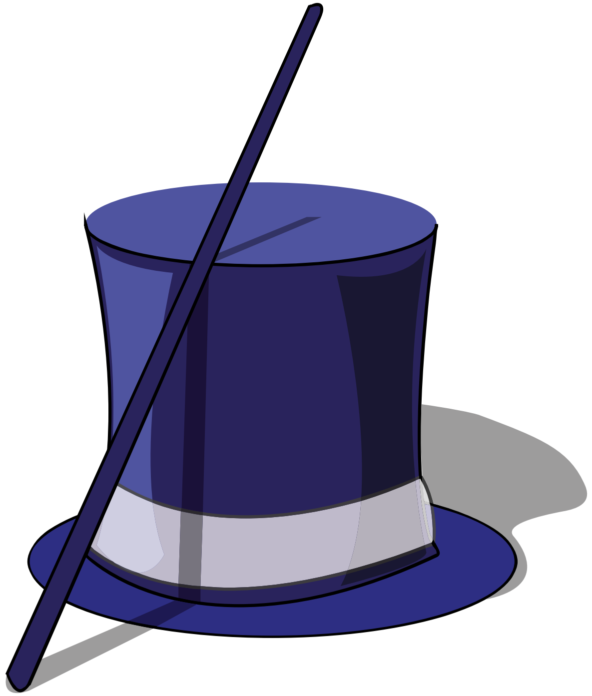
D

5 Terza mossa: i numeri da spostare in fondo sono i primi quattro della tabella **Q**:

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

E se non è magia questa…



Per capire perché la «magia» funziona, è utile affrontare la seguente questione: in un ipotetico riordino durato 6 mosse, due numeri **A** e **B** sono stati occasionalmente mossi, altre volte lasciati stare, secondo lo schema mostrato in basso (da leggere da destra verso sinistra, in direzione della freccia).

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	✕	✕	○	✕
numero **B**	○	✕	○	✕	○	○

Significato dei simboli:

✕ *spostato*	○ *non spostato*

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	✕	✕	○	✕
numero **B**	○	✕	○	✕	○	○

Significato dei simboli: ✕ *spostato* ○ *non spostato*

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli: × *spostato* ○ *non spostato*

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli:

× *spostato*	○ *non spostato*

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli: × *spostato* ○ *non spostato*

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli: | × *spostato* | ○ *non spostato* |

1. Alla prima mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
2. Alla seconda mossa, sia **A** sia **B** sono stati lasciati fermi.
3. Alla terza mossa, sia **A** sia **B** sono stati sposati.
4. Alla quarta mossa, **A** è stato spostato e **B** è stato lasciato fermo.
5. Alla quinta mossa, **A** è stato lasciato fermo e **B** è stato spostato.
6. Alla sesta mossa, né **A** né **B** sono stati sposati.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli:

× *spostato*	○ *non spostato*

Secondo voi, alla fine dei giochi, quale numero si troverà più a destra tra **A** e **B**?

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	×	×	○	×
numero **B**	○	×	○	×	○	○

Significato dei simboli:

× *spostato*	○ *non spostato*

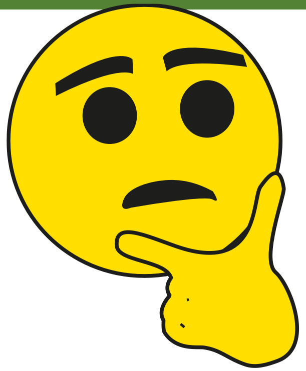
B, perché è l’ultimo che è stato spostato (e, muovendosi, è finito a destra di tutti i numeri «fermi») !

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **A**	○	○	✕	✕	○	✕
numero **B**	○	✕	○	✕	○	○

Significato dei simboli:

✕ *spostato*	○ *non spostato*

E nello schema in basso, chi tra **C** e **D** sarà finito più a destra?



	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **C**	✕	○	✕	○	○	✕
numero **D**	✕	○	○	✕	○	✕

Significato dei simboli:

✕ *spostato*	○ *non spostato*

C, perché nell’ultimo movimento «diverso» tra i due, è quello che è stato spostato «in coda alla fila».

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **C**	✕	○	✕	○	○	✕
numero **D**	✕	○	○	✕	○	✕

Significato dei simboli:

✕ *spostato*	○ *non spostato*

Sostituendo ai simboli ⊙,× le cifre $0{,}1$ e ragionando in binario, è possibile associare ad ogni tessera $\boxed{\boldsymbol{N}}$ della fila, un numero $\mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}}$, detto «codifica di spostamento», che descrive numericamente tutti gli spostamenti che hanno interessato la tessera $\boxed{\boldsymbol{N}}$.

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **C**	×	○	×	○	○	×
numero **D**	×	○	○	×	○	×

Significato dei simboli:

× *spostato*	○ *non spostato*

Sostituendo ai simboli ⊙,× le cifre $0,1$ e ragionando in binario, è possibile associare ad ogni tessera $\boxed{N}$ della fila, un numero $\mathbf{sp}\boxed{N}$, detto «codifica di spostamento», che descrive numericamente tutti gli spostamenti che hanno interessato la tessera $\boxed{N}$.

$$\mathbf{sp}\boxed{C} = (101001)_2 = 41$$

$$\mathbf{sp}\boxed{D} = (100101)_2 = 37$$

	mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
numero **C**	×	○	×	○	○	×
numero **D**	×	○	○	×	○	×

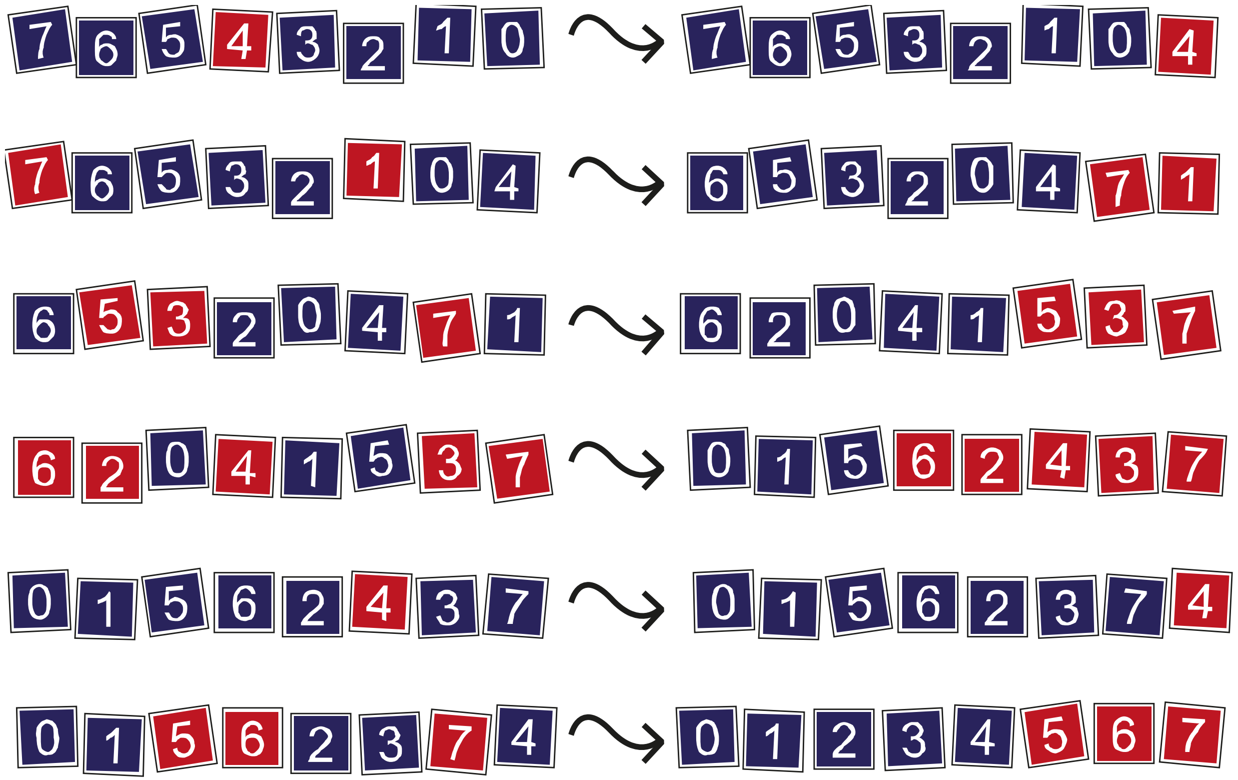
Significato dei simboli:

× *spostato*	○ *non spostato*

Tenete a mente questa osservazione, che verrà molto utilizzata in seguito:

Se una tessera $\boxed{\boldsymbol{N}}$ ha una codifica di spostamento $\mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}}$ maggiore di quella di un'altra tessera $\boxed{\boldsymbol{M}}$, alla fine di tutti gli spostamenti $\boxed{\boldsymbol{N}}$ si troverà a destra di $\boxed{\boldsymbol{M}}$.

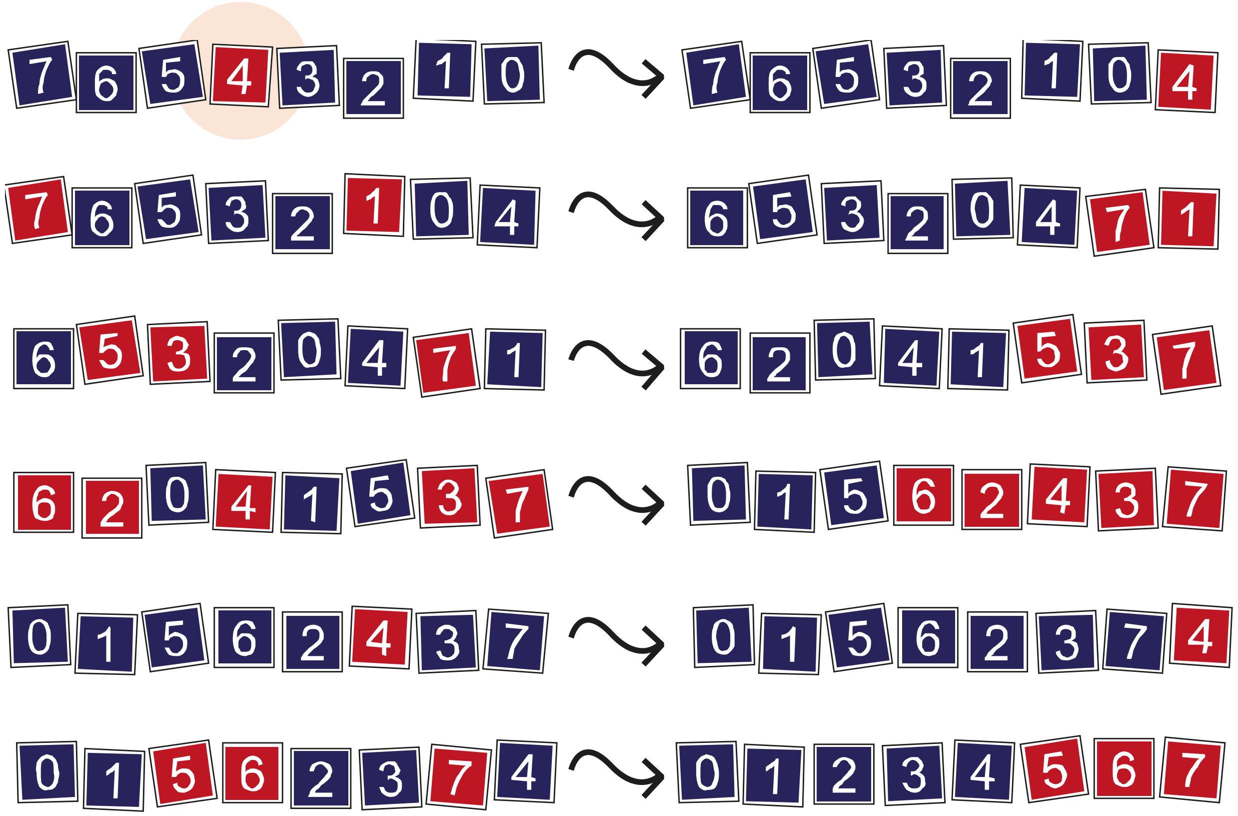
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l'insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp** $\boxed{\mathbf{4}}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1

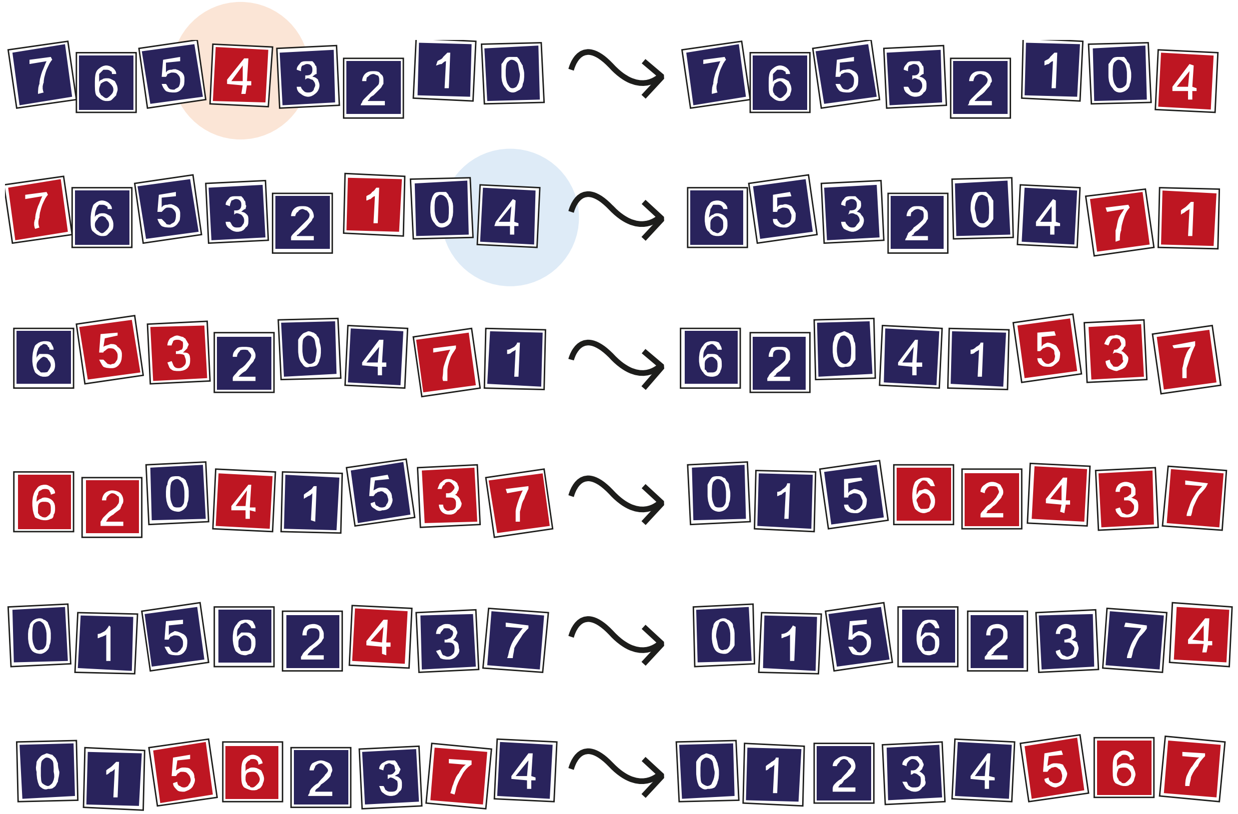
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l'insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di $\mathbf{sp}\boxed{4}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
					✕

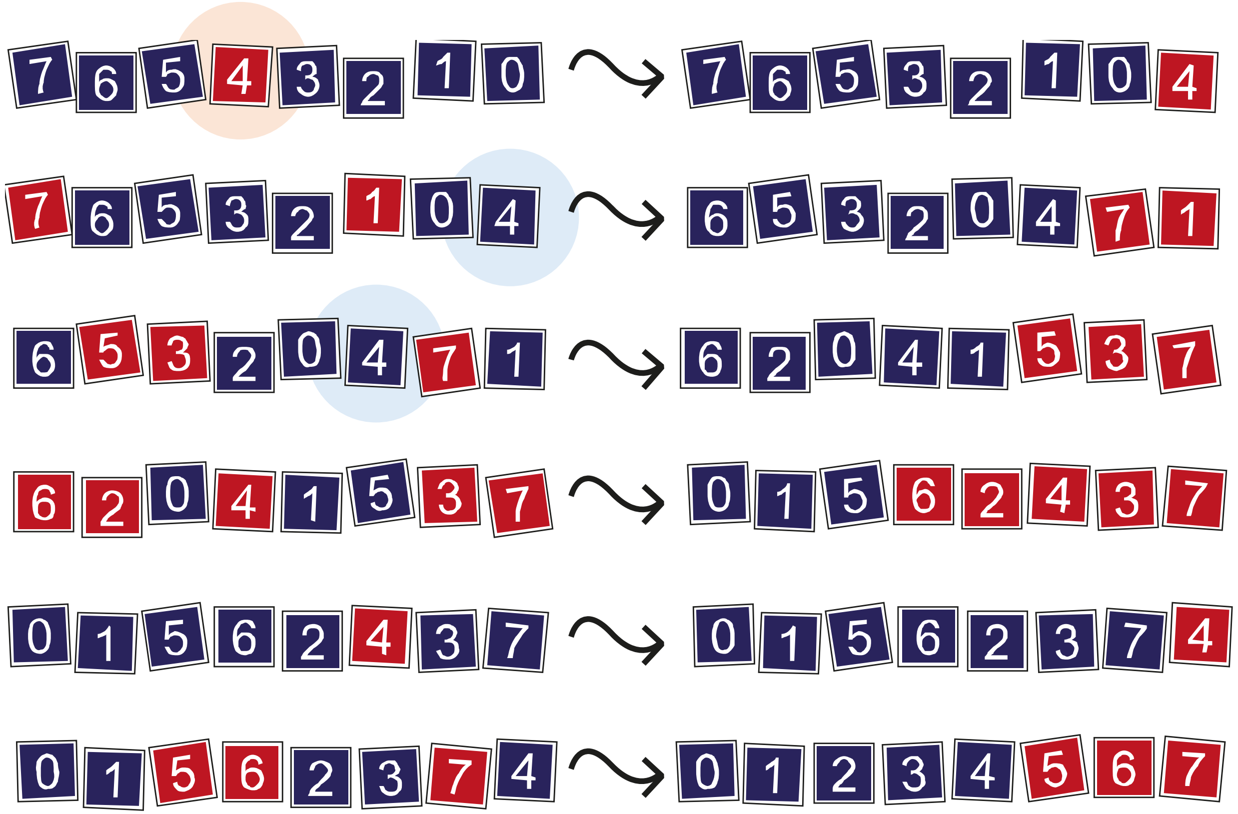
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l'insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp**$\boxed{4}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
				O	✕

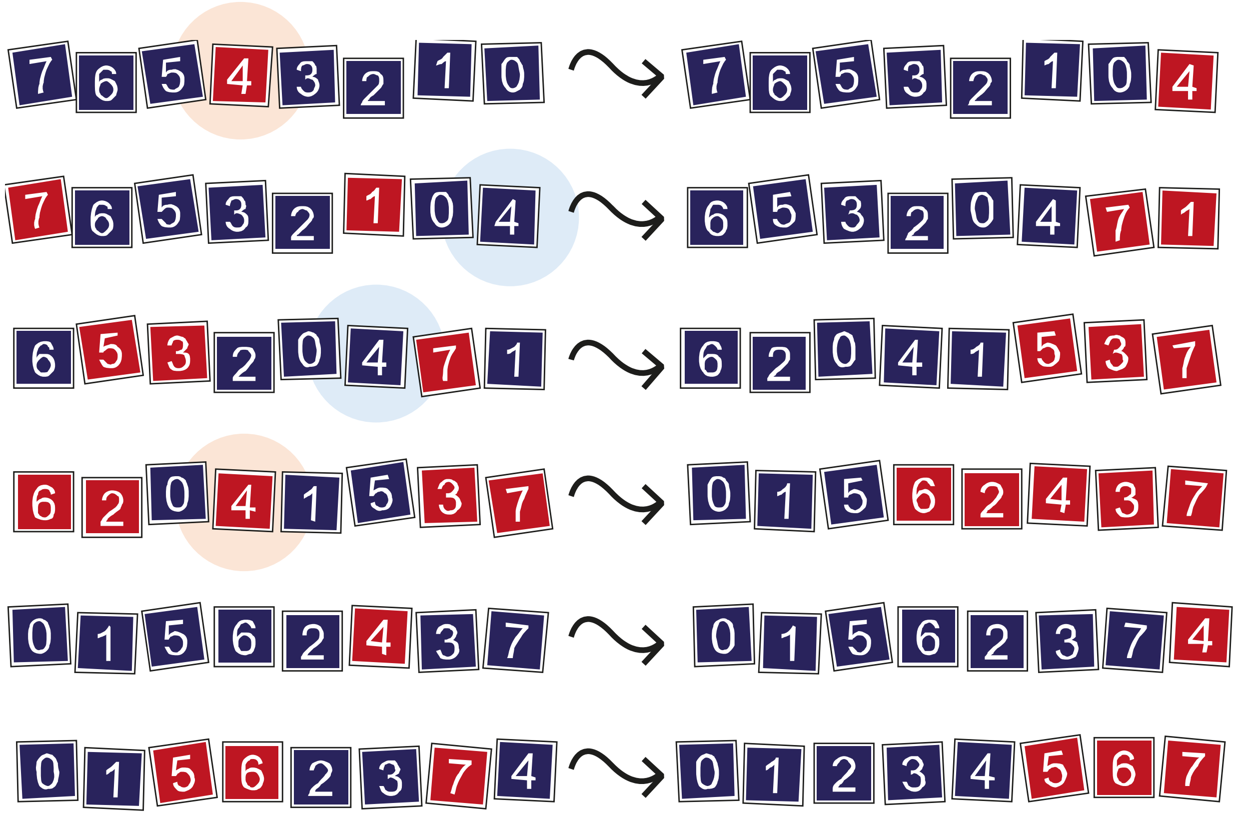
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l’insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di $\mathbf{sp}\boxed{\mathbf{4}}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
			O	O	✕

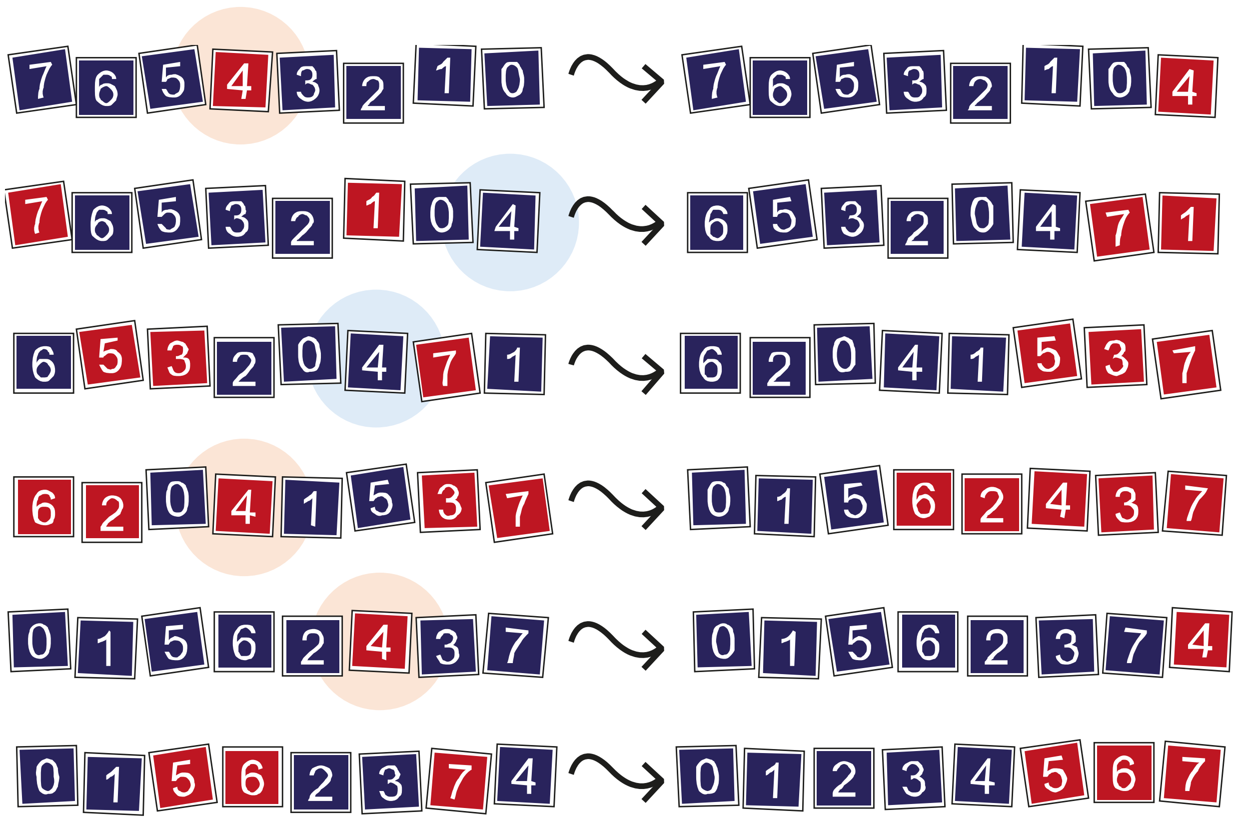
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l’insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp**$\boxed{\mathbf{4}}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
		✕	O	O	✕

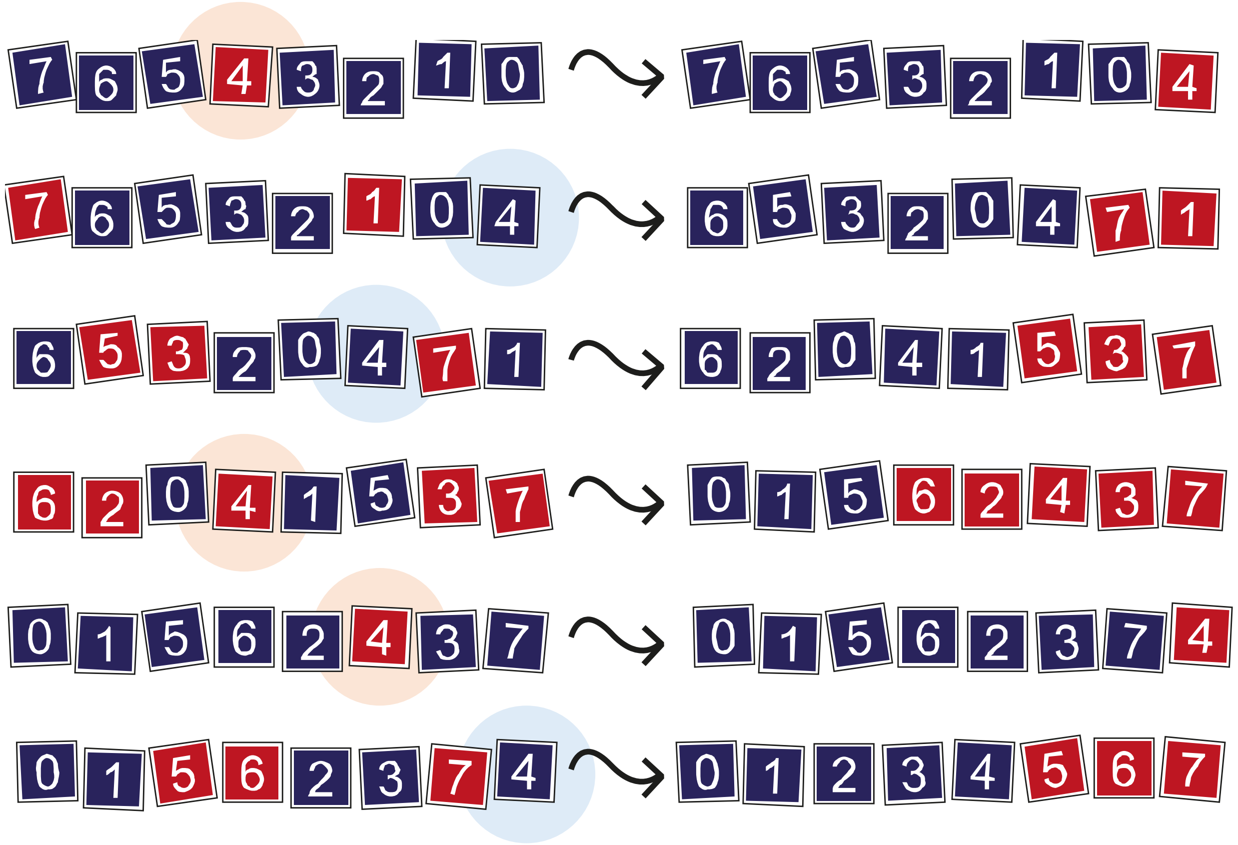
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l’insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp**$\boxed{4}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
	✕	✕	O	O	✕

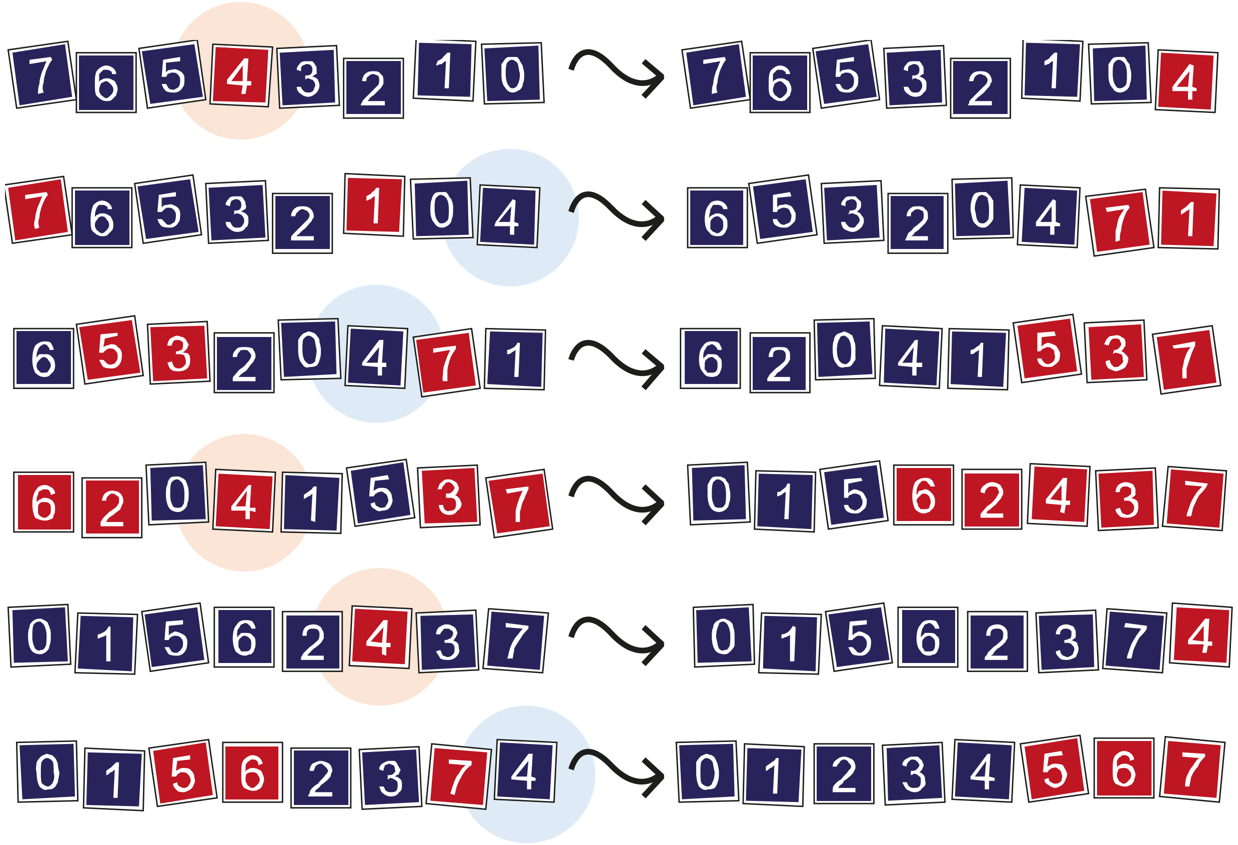
Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l'insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp**$\boxed{4}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
O	✕	✕	O	O	✕

Vediamo il calcolo di una codifica di spostamento, considerando l'insieme di tutte le mosse mostrate in basso (che potete trovare sul vostro foglio di lavoro)



Esempio di calcolo di **sp**$\boxed{\mathbf{4}}$ nella sequenza illustrata a fianco.

mossa 6	mossa 5	mossa 4	mossa 3	mossa 2	mossa 1
O	×	×	O	O	×

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{sp}\boxed{4} = (011001)2 = 25$$

25 è il numero che codifica gli spostamenti che hanno riguardato la tessera $\boxed{4}$.

Per ottenere una sequenza crescente a partire da una sequenza decrescente, dovremmo realizzare una serie di mosse tali che…

$$\mathbf{sp}\boxed{\mathbf{7}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{6}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{5}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{4}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{3}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{2}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{1}} > \mathbf{sp}\boxed{\mathbf{0}}$$

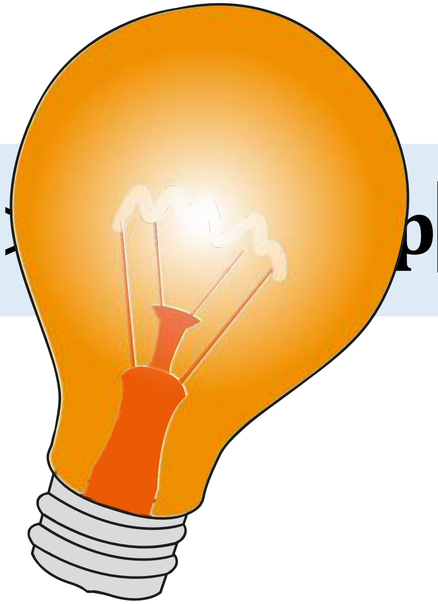
Per ottenere una sequenza crescente a partire da una sequenza decrescente, dovremmo realizzare una serie di mosse tali che…

$$\mathbf{sp}\boxed{7} > \mathbf{sp}\boxed{6} > \mathbf{sp}\boxed{5} > \mathbf{sp}\boxed{4} > \mathbf{sp}\boxed{3} > \mathbf{sp}\boxed{2} > \mathbf{sp}\boxed{1} > \mathbf{sp}\boxed{0}$$

Considerando che a numeri «piccoli» sono associate «poche» mosse*, quale è la «miglior» funzione $\mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{x}}\colon \{\boxed{\mathbf{0}}, \boxed{\mathbf{1}}, \ldots, \boxed{\mathbf{7}}\} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ che verifica la catena di disequazioni in alto?

** La quantità di mosse è determinata dal numero di cifre in binario della tessera che viene spostata più a destra, vale quindi* $\lceil log_2 sp\boxed{7} \rceil$*)*

$$\mathbf{sp}\boxed{7} > \mathbf{sp}\boxed{6} > \mathbf{sp}\boxed{5} > \mathbf{sp}\boxed{4} > \quad \mathbf{p}\boxed{2} > \mathbf{sp}\boxed{1} > \mathbf{sp}\boxed{0}$$



$$\mathbf{sp}\boxed{N} = \mathbf{N}$$

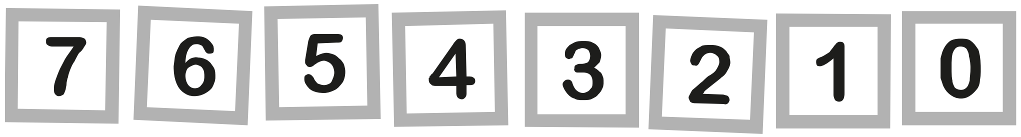
È l’uovo di Colombo! Spostando ogni tessera secondo la sua stessa rappresentazione in binario, si ottiene la rimessa in ordine più rapida.

$\mathrm{sp}\boxed{7} > \mathrm{sp}\boxed{6} > \mathrm{sp}\boxed{5} >$

$$\mathrm{sp}\boxed{N} = \mathrm{N}$$

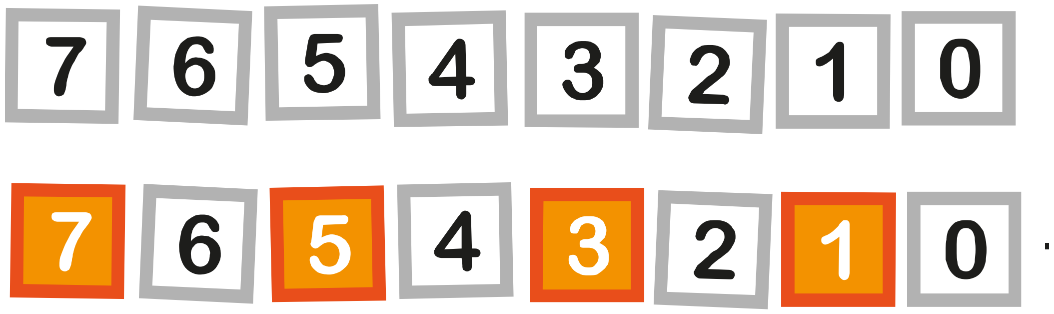
Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	○	○	○
1	0	0	1	○	○	×
2	0	1	0	○	×	○
3	0	1	1	○	×	×
4	1	0	0	×	○	○
5	1	0	1	×	○	×
6	1	1	0	×	×	○
7	1	1	1	×	×	×

Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.



Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	○	○	○
1	0	0	1	○	○	✕
2	0	1	0	○	✕	○
3	0	1	1	○	✕	✕
4	1	0	0	✕	○	○
5	1	0	1	✕	○	✕
6	1	1	0	✕	✕	○
7	1	1	1	✕	✕	✕

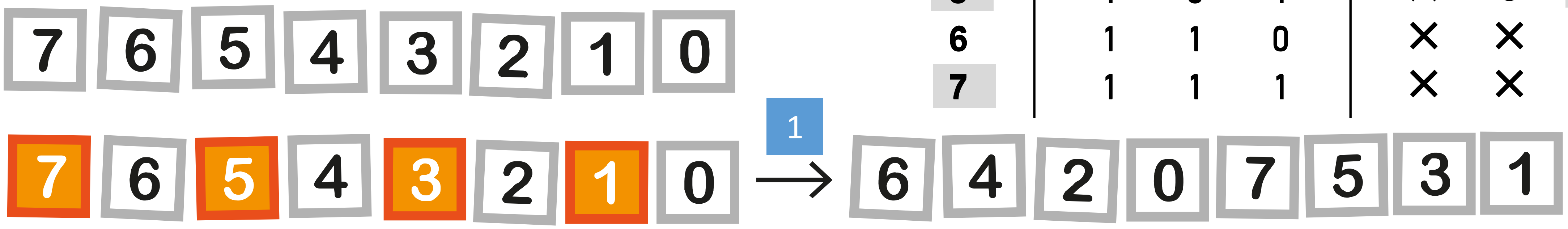
Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.



Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	O	O	O
1	0	0	1	O	O	X
2	0	1	0	O	X	O
3	0	1	1	O	X	X
4	1	0	0	X	O	O
5	1	0	1	X	O	X
6	1	1	0	X	X	O
7	1	1	1	X	X	X

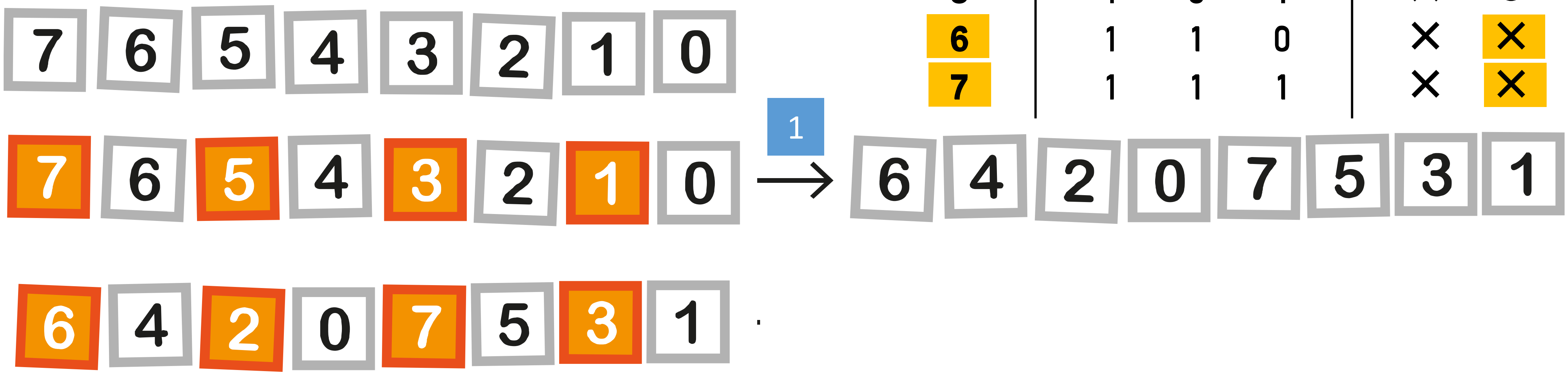
Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	O	O	O
1	0	0	1	O	O	×
2	0	1	0	O	×	O
3	0	1	1	O	×	×
4	1	0	0	×	O	O
5	1	0	1	×	O	×
6	1	1	0	×	×	O
7	1	1	1	×	×	×



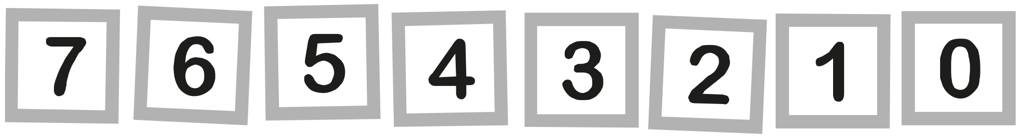
Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

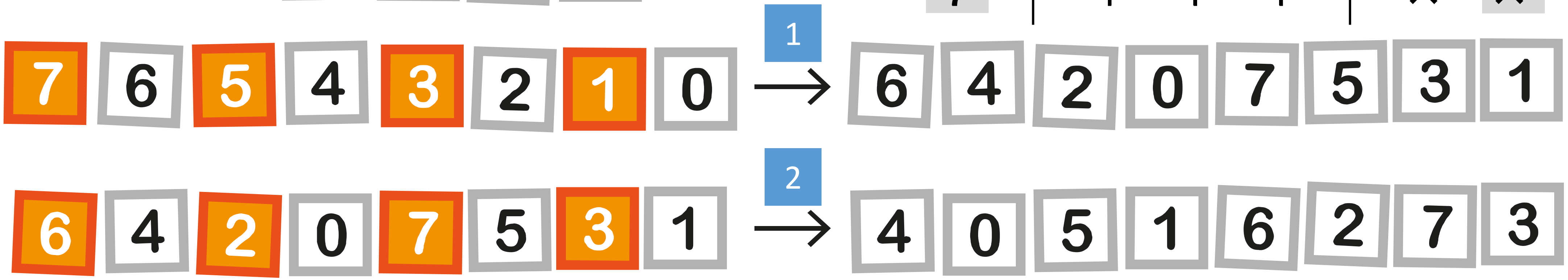
				SPOSTAMENTI		
Tessera N	rappresetazione in binario di N			mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	○	○	○
1	0	0	1	○	○	×
2	0	1	0	○	×	○
3	0	1	1	○	×	×
4	1	0	0	×	○	○
5	1	0	1	×	○	×
6	1	1	0	×	×	○
7	1	1	1	×	×	×



Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

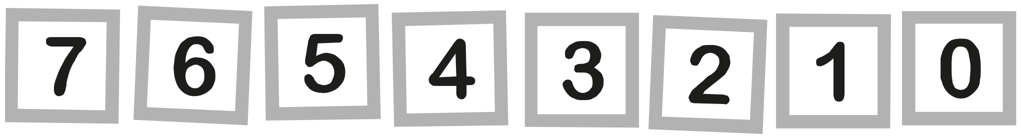
Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	O	O	O
1	0	0	1	O	O	X
2	0	1	0	O	X	O
3	0	1	1	O	X	X
4	1	0	0	X	O	O
5	1	0	1	X	O	X
6	1	1	0	X	X	O
7	1	1	1	X	X	X





Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	O	O	O
1	0	0	1	O	O	X
2	0	1	0	O	X	O
3	0	1	1	O	X	X
4	1	0	0	X	O	O
5	1	0	1	X	O	X
6	1	1	0	X	X	O
7	1	1	1	X	X	X



Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	mossa 2	mossa 1
0	0	0	0	○	○	○
1	0	0	1	○	○	×
2	0	1	0	○	×	○
3	0	1	1	○	×	×
4	1	0	0	×	○	○
5	1	0	1	×	○	×
6	1	1	0	×	×	○
7	1	1	1	×	×	×

7 6 5 4 3 2 1 0

7 6 5 4 3 2 1 0 $\xrightarrow{1}$ 6 4 2 0 7 5 3 1

6 4 2 0 7 5 3 1 $\xrightarrow{2}$ 4 0 5 1 6 2 7 3

4 0 5 1 6 2 7 3 $\xrightarrow{3}$ 0 1 2 3 4 5 6 7

Cerchiamo quindi di ritrovare la «magia» vista in precedenza, che **in sole tre mosse risolve il problema**. Accanto la rappresentazione in binario dei numeri e quindi la «traduzione» in termini di spostamenti.

Tessera N	rappresetazione in binario di N			SPOSTAMENTI mossa 3	SPOSTAMENTI mossa 2	SPOSTAMENTI mossa 1
0	0	0	0	○	○	○
1	0	0	1	○	○	×
2	0	1	0	○	×	○
3	0	1	1	○	×	×
4	1	0	0	×	○	○
5	1	0	1	×	○	×
6	1	1	0	×	×	○
7	1	1	1	×	×	×

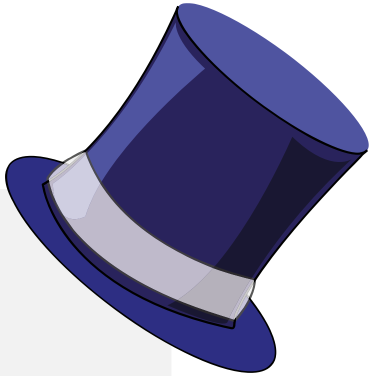
7 6 5 4 3 2 1 0

1 2 3

In sole 3 mosse!

0 1 2 3 4 5 6 7

Possiamo ora a svelare il «trucco»:

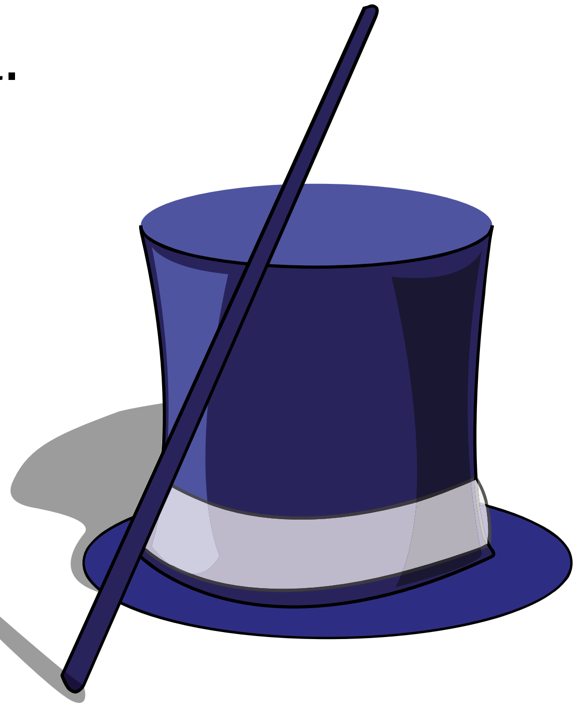


Il riordino di sequenze qualsiasi

Intanto osserviamo che scegliendo $\mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N}$, sicuramente vale che $\boldsymbol{N} > \boldsymbol{M} \Longrightarrow \mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} > \mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{M}}$. Questa condizione, da sola, assicura che la sequenza finale sarà in ordine crescente.

La relazione con le tabelle di «indovina il numero» è semplice: le prime tessere che andranno spostate sono quelle con un $\boxed{1}$ come cifra delle unità: si tratta proprio dei numeri presenti nella tabella **U**. Il discorso di applica «slittato» alle altre tabelle.

In classe ci si può cimentare anche in una seconda magia.



Applicando una qualsiasi delle strategia vincenti proposte dagli studenti (cioè una serie di mosse che effettivamente porta la sequenza da decrescente a crescente), di nuovo si assisterà alla rimessa in ordine di sequenze casuali.

Ciò è dovuto al fatto che nella sequenza decrescente, nessun elemento ha la corretta posizione reciproca rispetto al precedente: in una strategia vincente non si avrà quindi mai $\mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} = \mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{M}}$ per tessere $\boxed{\boldsymbol{N}}$, $\boxed{\boldsymbol{M}}$ diverse (perché resterebbero in posizione reciproca sbagliata) . Vale quindi sicuramente $\boldsymbol{N} > \boldsymbol{M} \Longrightarrow \mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} > \mathbf{sp}\boxed{\boldsymbol{M}}$, che, lo sappiamo, garantisce la rimessa in ordine.

Osservazione

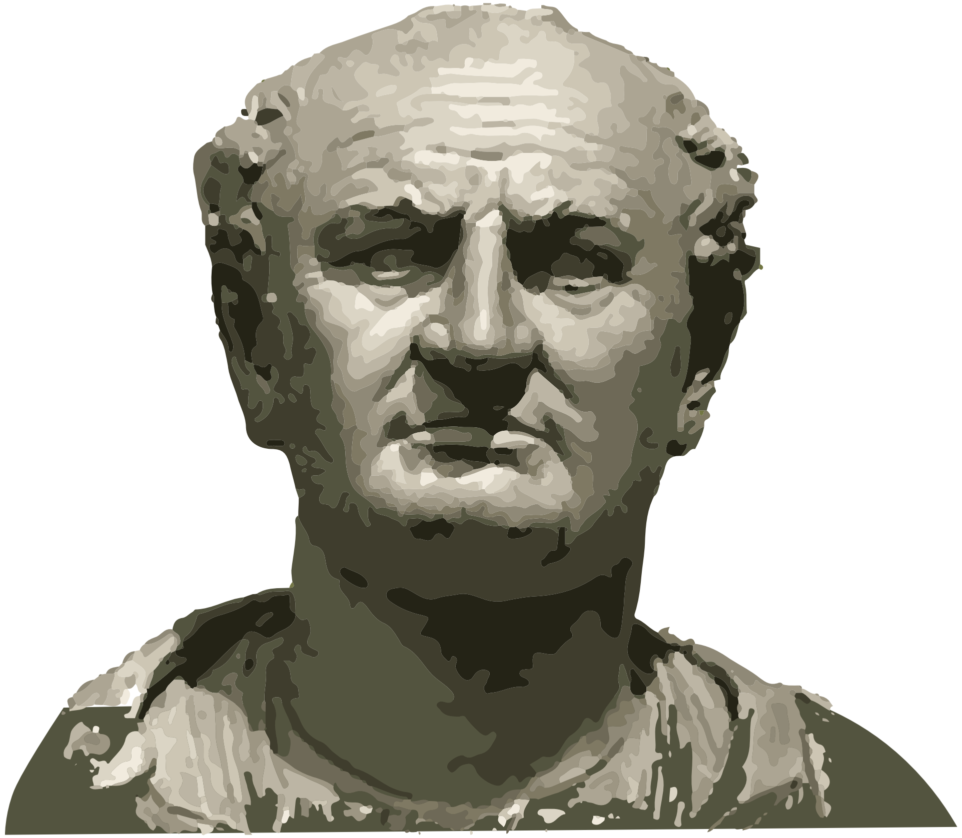
Nel caso di sequenze qualsiasi, la strategia $\boldsymbol{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N}$ *potrebbe non essere la più rapida. Basti pensare di partire con una sequenza già disposta in ordine crescente: <u>sarebbe sufficiente restare fermi</u> (0 spostamenti!), invece applicando* $\boldsymbol{sp}\boxed{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N}$ *le mosse saranno sempre e comunque 3.*

3 GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Il «problema» o la «permutazione» di Giuseppe, è un rompicapo matematico legato ad un episodio descritto* nelle cronache che costituiscono la **Guerra Giudaica**, opera dallo stesso Giuseppe Flavio: il contesto storico permette di creare un percorso interdisciplinare con Religione e, al liceo Classico, con Greco.

** ricostruito dagli storici con un po' di malizia*

3 GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**



Nel 67, Vespasiano cinge d’assedio la città fortificata di Iotapata, comandata dal generale giudaico Giuseppe Flavio. Al quarantasettesimo giorno, i romani sfondano le difese delle città e massacrano la popolazione.

Giuseppe, assieme ad altri 40 soldati, trova rifugio in una caverna, nella quale è impossibile irrompere ma dalla quale è impossibile fuggire.

3 GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Giuseppe vorrebbe arrendersi ai romani. Messi a parte dell'idea, i suoi soldati gli si rivoltano contro: arrendersi sarebbe un tradimento, è soltanto togliendosi tutti la vita che l'onore sarà salvo.

Con abili parole Giuseppe li dissuade: morire «da liberi» è giusto, ma il suicidio è inviso a Dio. Nella caverna sarà il destino a decidere chi morrà per mano di chi:

«[…] ognuno sarà ucciso da chi verrà sorteggiato dopo di lui […]. Non sarebbe giusto, infatti, che quando gli altri fossero morti qualcuno cambiasse idea e si salvasse.»

3

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Inizia così la carneficina:

[…] «Ognuno porgeva prontamente il collo a chi era stato sorteggiato dopo di lui, sicuro che presto anche il capo sarebbe morto: infatti stimavano più dolce della vita morire insieme con Giuseppe»

«Ma questi […] restò alla fine assieme ad un altro, e non volendo né essere condannato dalla sorte, né contaminarsi le mani col sangue di un connazionale […], persuase anche il compagno […] ad accettare di aver salva la vita»

3

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Ricapitoliamo la situazione…

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Ricapitoliamo la situazione…

- Giuseppe vorrebbe arrendersi ma non può

3

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Ricapitoliamo la situazione…

- Giuseppe vorrebbe arrendersi ma non può
- Inventa un sorteggio in ragione del quale tutti si uccidono a vicenda

3 GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

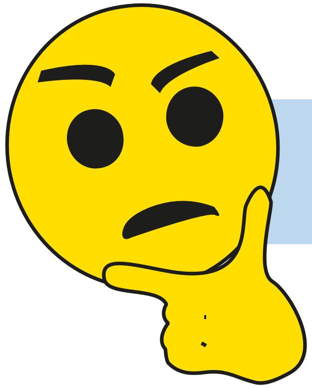
Ricapitoliamo la situazione…

- Giuseppe vorrebbe arrendersi ma non può
- Inventa un sorteggio in ragione del quale tutti si uccidono a vicenda
- Rimasto solo (o quasi), si arrende

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

Ricapitoliamo la situazione…

- Giuseppe vorrebbe arrendersi ma non può
- Inventa un sorteggio in ragione del quale tutti si uccidono a vicenda
- Rimasto solo (o quasi), si arrende



…è un po' sospetto…

3 GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

I posteri hanno quindi supposto che il «sorteggio» proposto da Giuseppe fosse in qualche modo pilotato o comunque deterministico. La frase

> *«[…] ognuno sarà ucciso da chi verrà sorteggiato dopo di lui […]»*

è stata interpretata come una «conta circolare», nella quale ciascuno era tenuto ad uccidere il compagno che aveva di fianco.

GIOCO NUMERO 3 – **IL PROBLEMA DI GIUSEPPE**

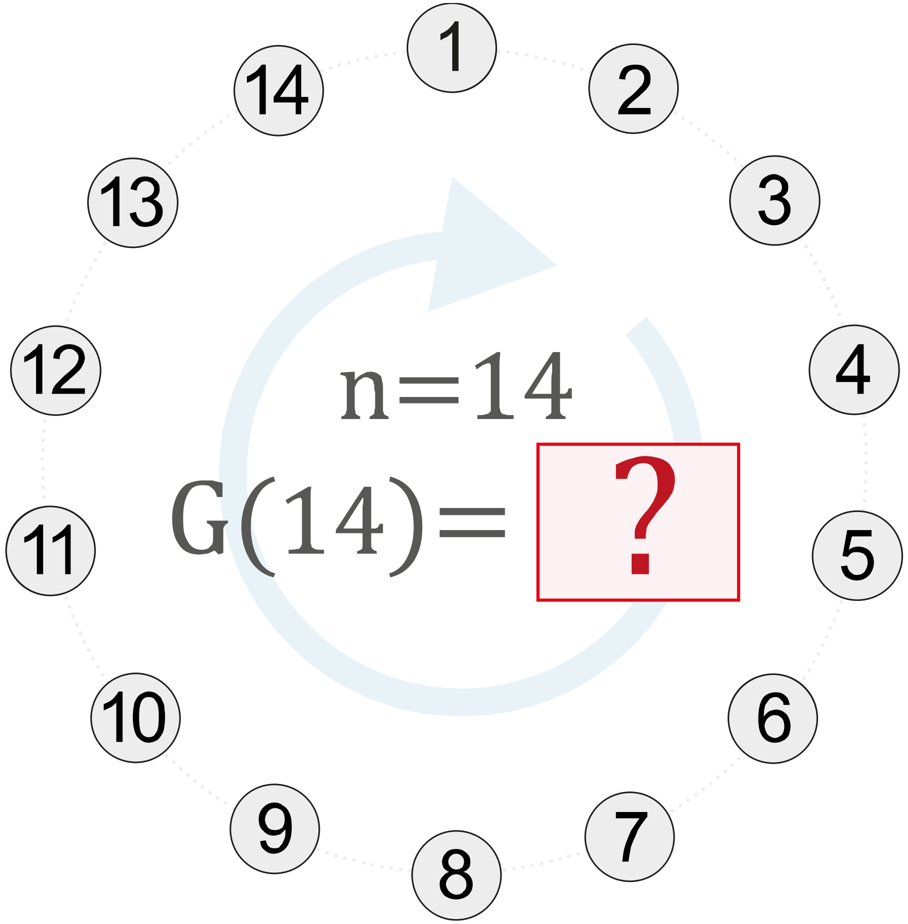
I posteri hanno quindi supposto che il «sorteggio» proposto da Giuseppe fosse in qualche modo pilotato o comunque deterministico. La frase

«[…] ognuno sarà ucciso da chi verrà sorteggiato dopo di lui […]»

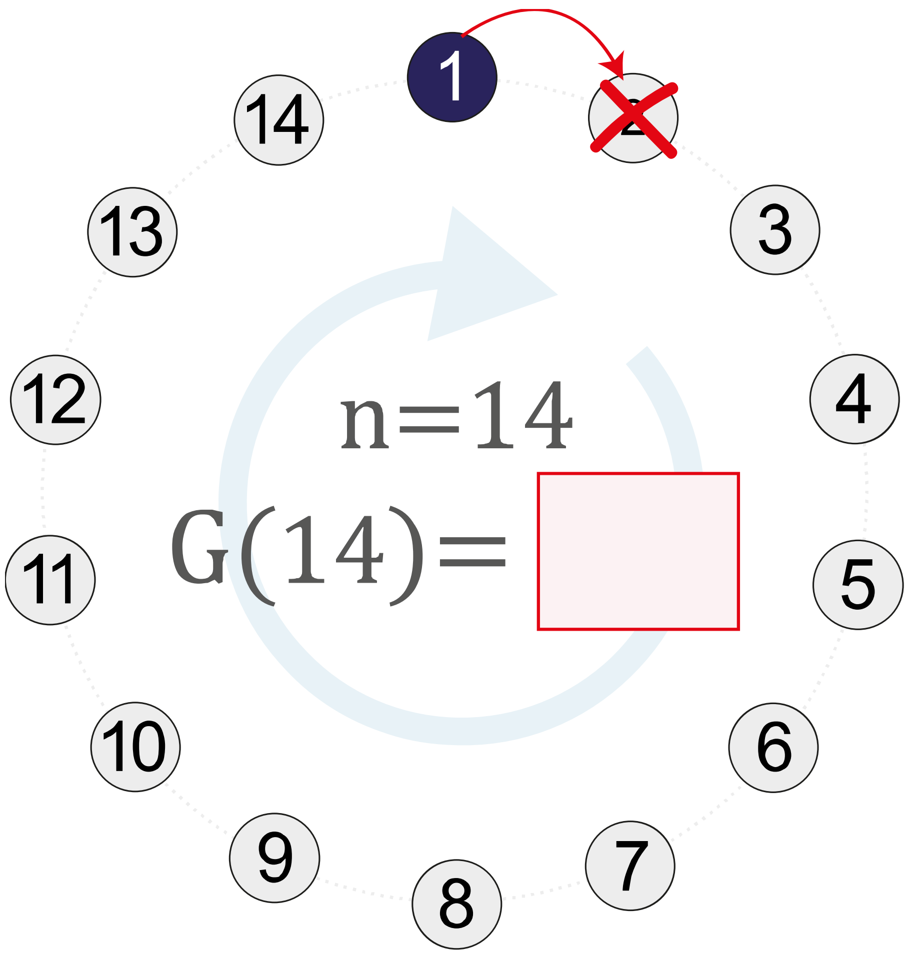
è stata interpretata come una «conta circolare», nella quale ciascuno era tenuto ad uccidere il compagno che aveva di fianco.

L'aleatorietà delle posizioni iniziali (sorteggiate), sarebbe stata aggirata da Giuseppe indicando chi doveva iniziare, oppure selezionando per se stesso la posizione «del sopravvissuto».

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).

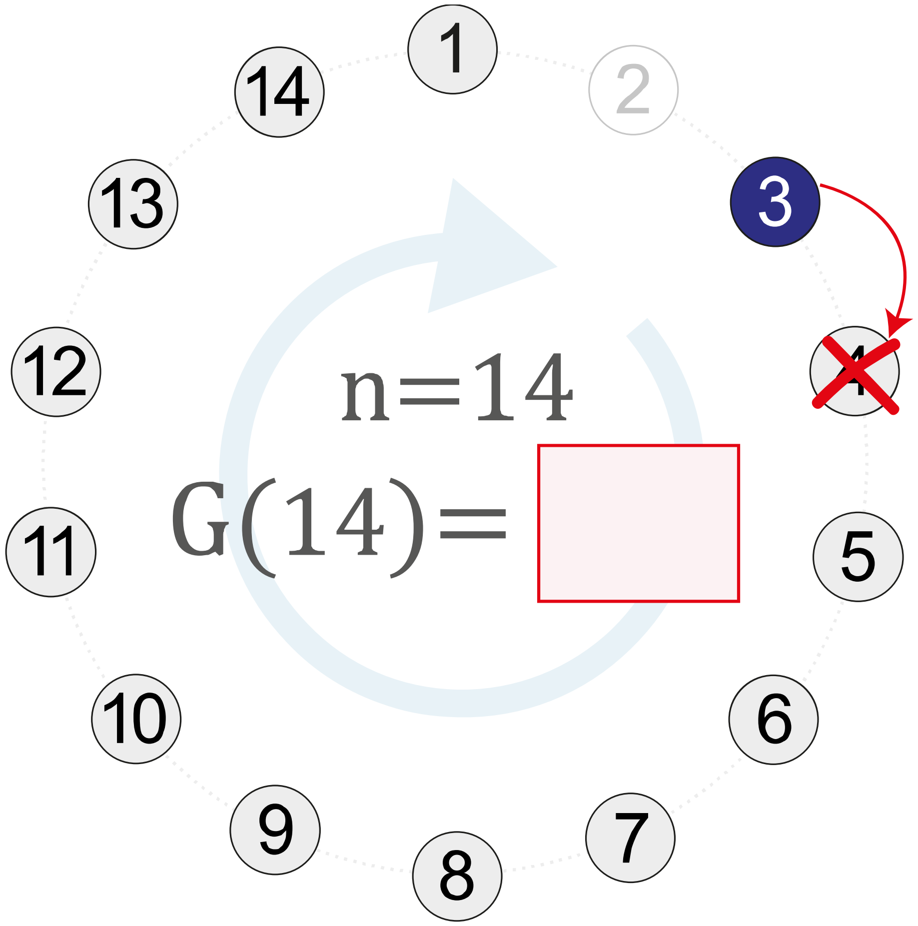


Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



Il soldato in prima posizione uccide il compagno che ha di fianco (immaginando di procedere in senso orario).

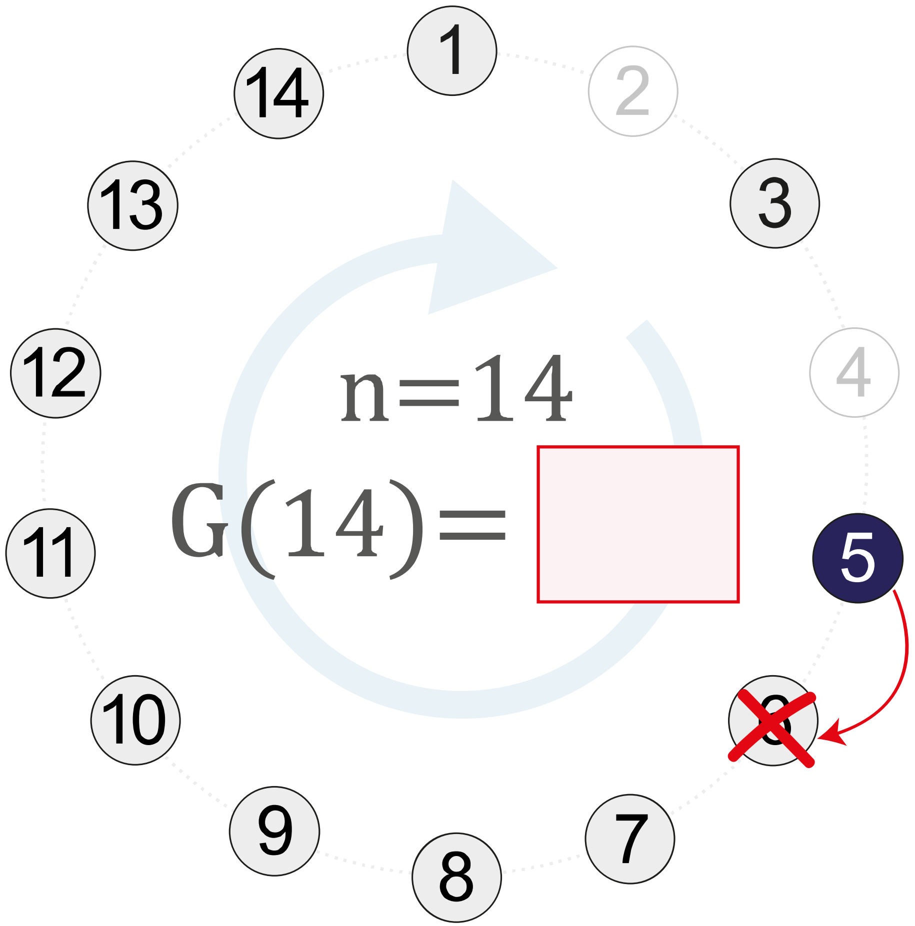
Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



Il soldato in prima posizione uccide il compagno che ha di

Ovviamente il soldato morto è uscito dal «gioco». La «mano» passa alla persona in posizione 3, che elimina il compagno a fianco.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



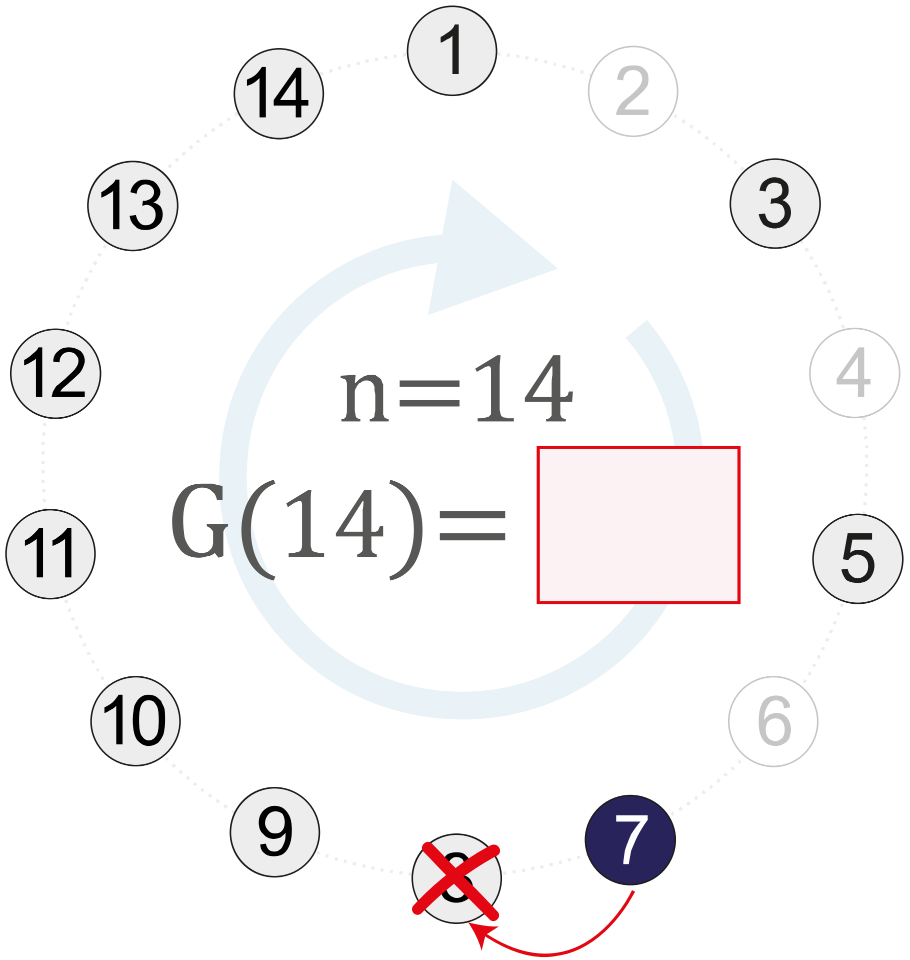
Il soldato in prima posizione uccide il compagno che ha di

Ovviamente il soldato morto è uscito dal «gioco». La «mano» passa alla persona in posizione 3,

fianco.

Continuiamo così, a finire il primo giro.

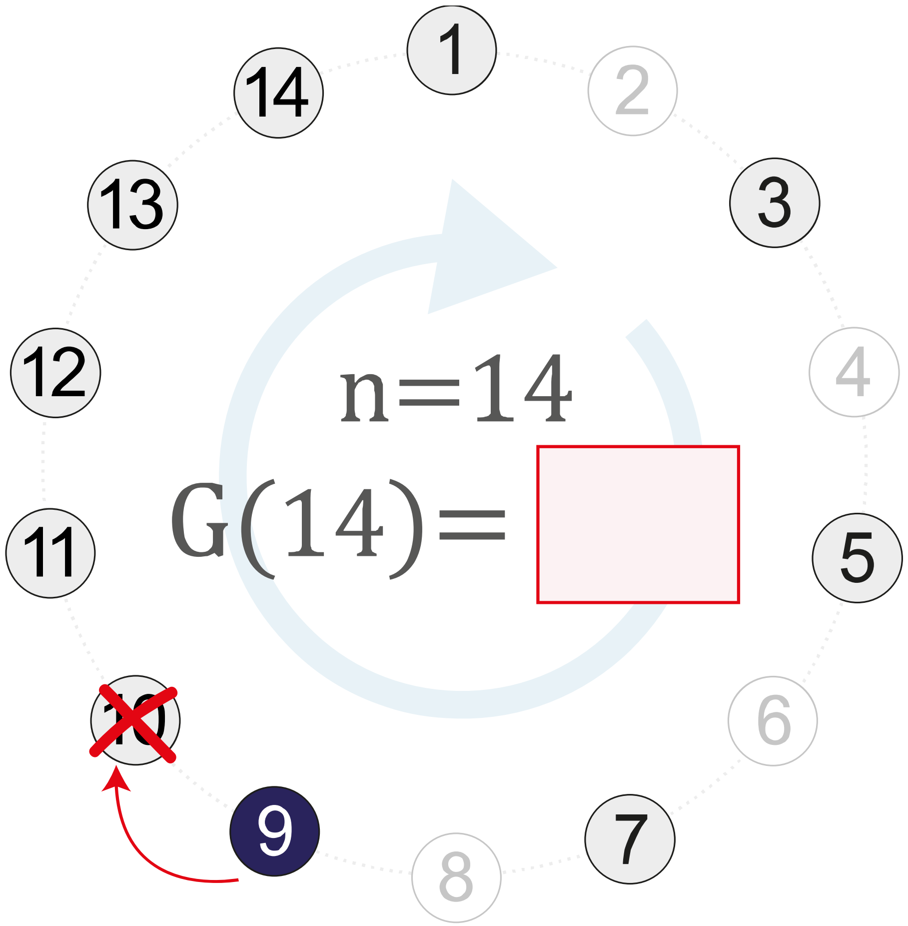
Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



Ovviamente il soldato morto è uscito dal «gioco». La «mano» passa alla persona in posizione 3, c… fianco.

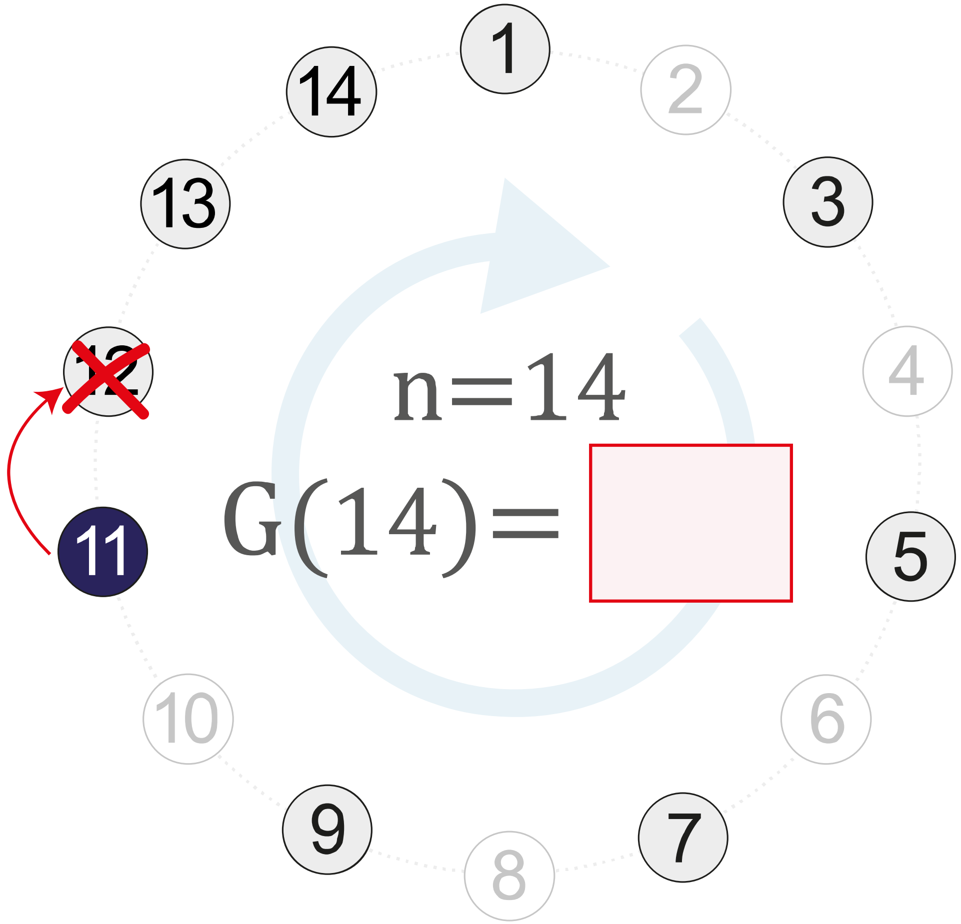
Continuiamo così, a finire il primo giro.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



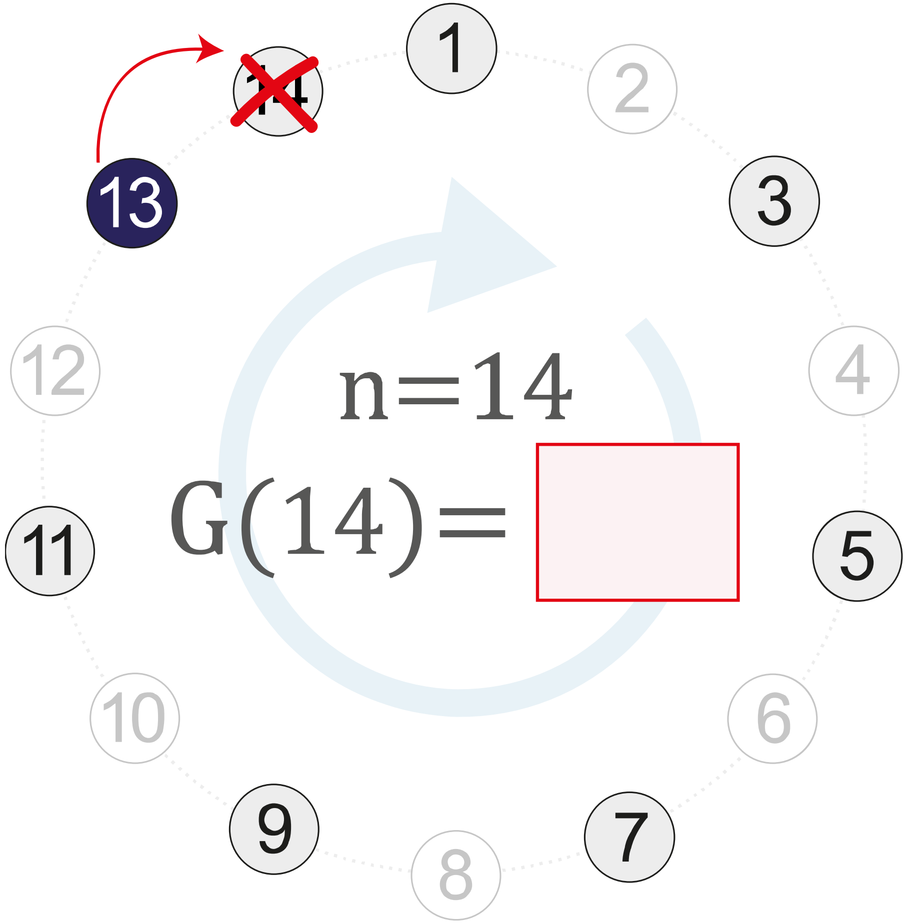
Continuiamo così, a finire il primo giro.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



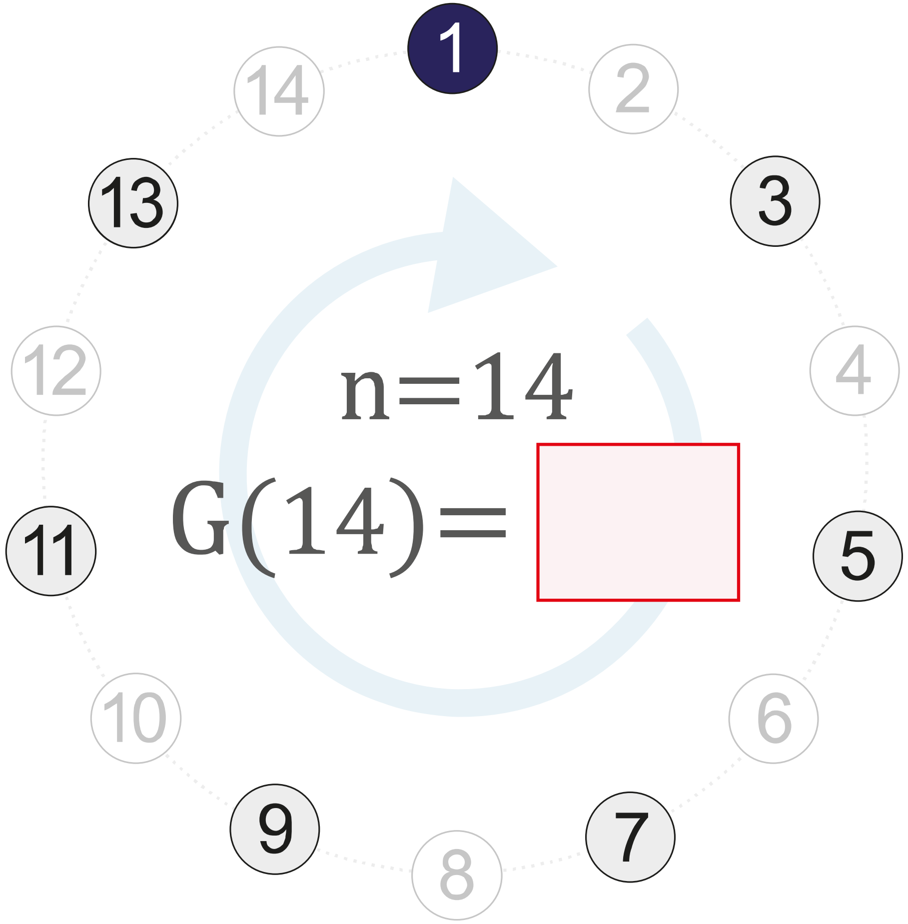
Continuiamo così, a finire il primo giro.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



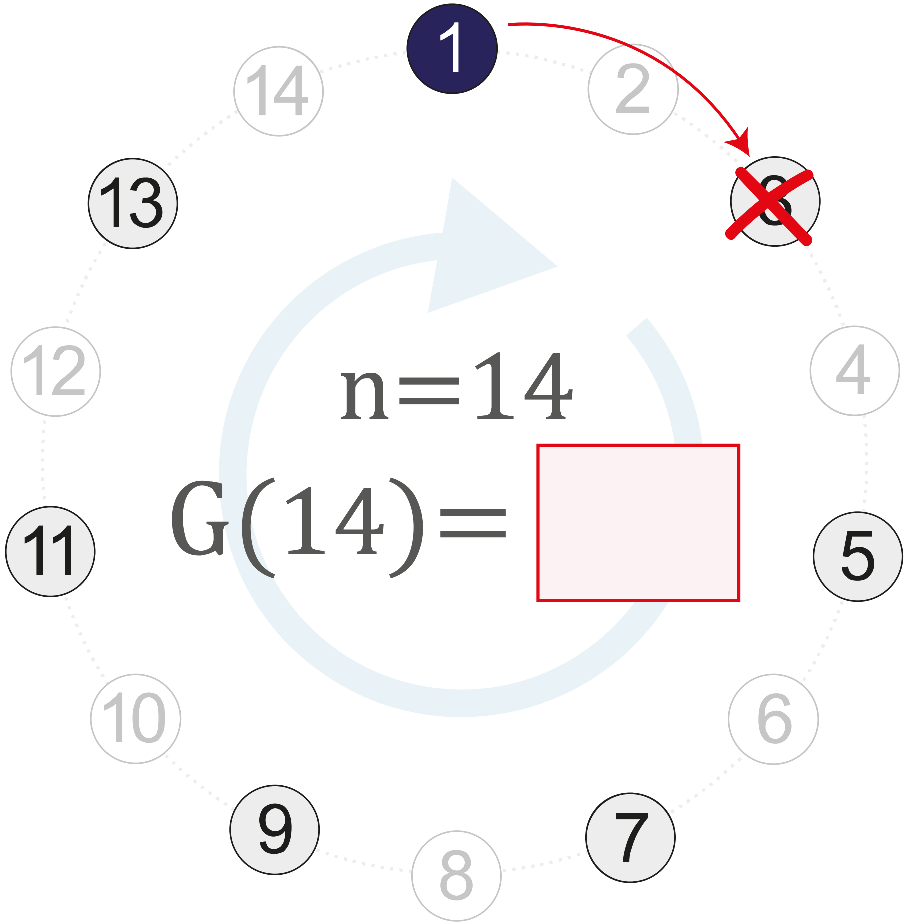
Continuiamo così, a finire il primo giro.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



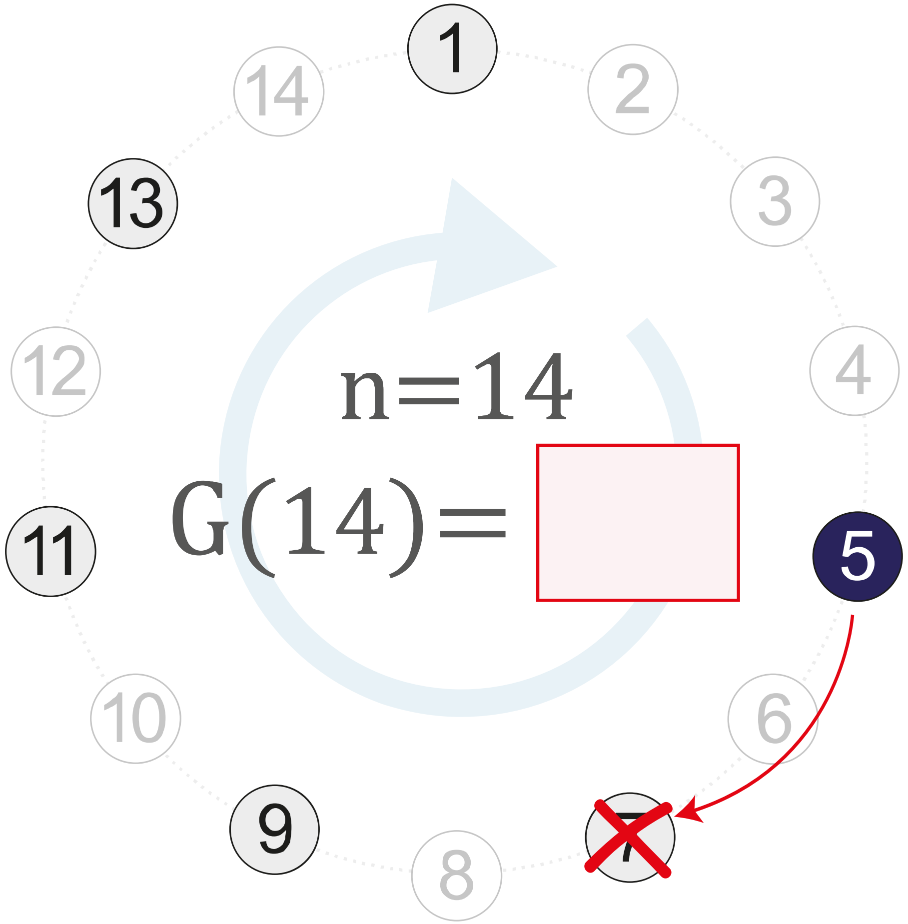
È nuovamente il turno del «soldato 1»

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



È nuovamente il turno del «soldato 1»: il primo sopravvissuto alla sua destra è il numero 3, che quindi viene eliminato.

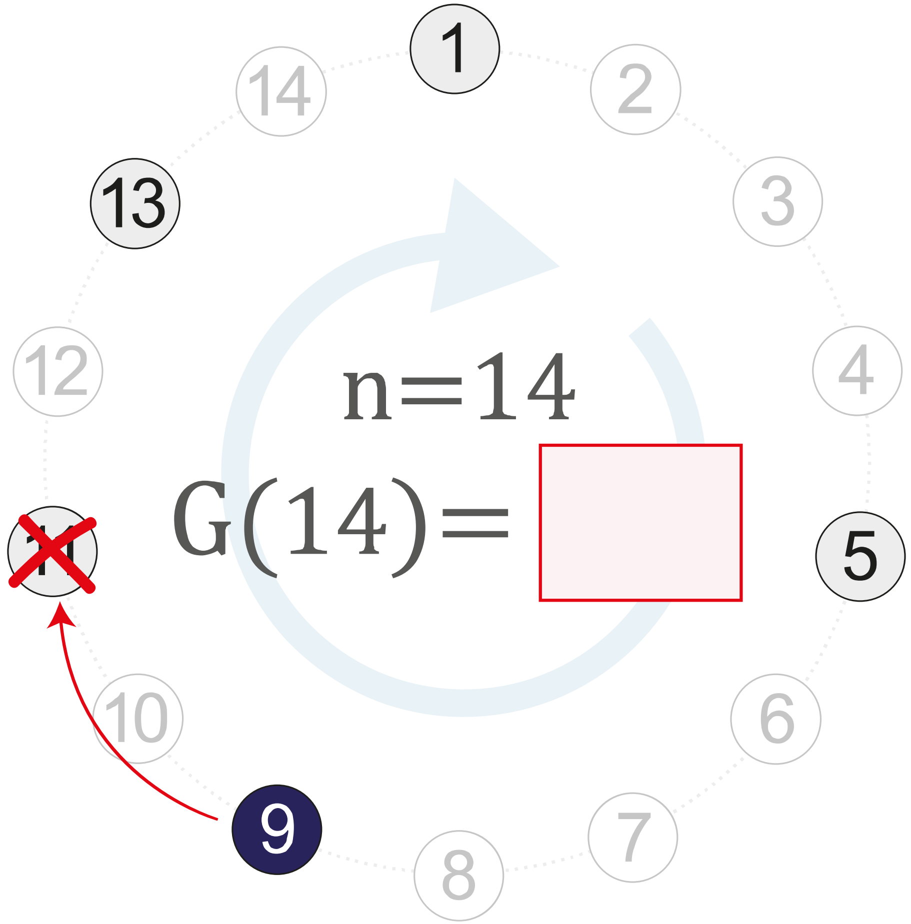
Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



È nuovamente il turno del «soldato 1»: il primo sopravvissuto alla sua destra è il numero 3, che quindi viene eliminato.

Il soldato 3 è morto, tocca quindi numero 5.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).

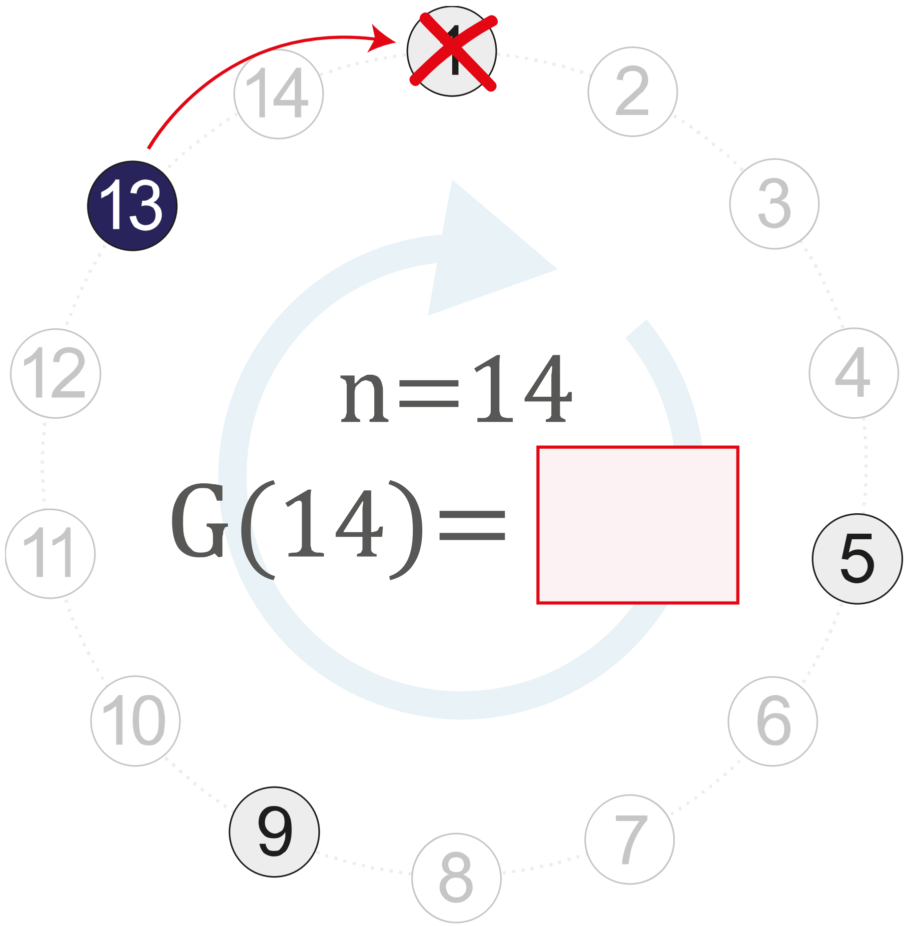


È nuovamente il turno del «soldato 1»: il primo sopravvissuto alla sua destra è il numero 3, che quindi viene eliminato.

Il soldato 3 è morto, tocca quindi numero 5.

Procediamo così fino alla fine.

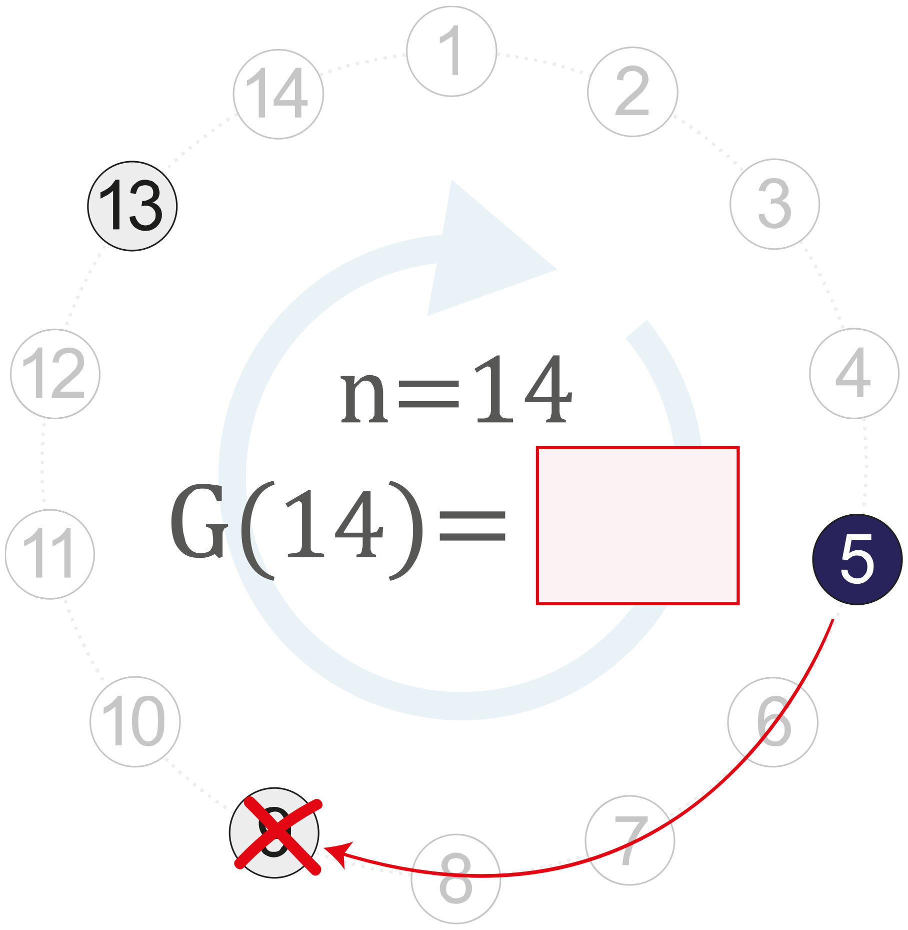
Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



Il soldato 3 è morto, tocca quindi numero 5.

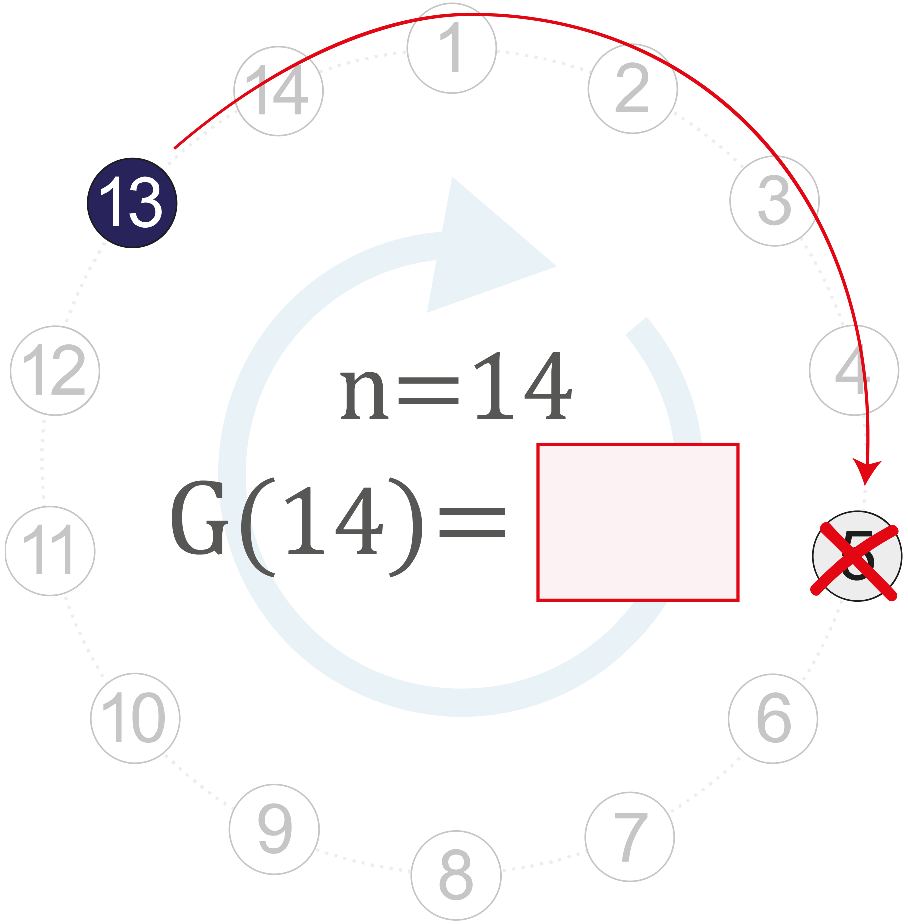
Procediamo così fino alla fine.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



Procediamo così fino alla fine.

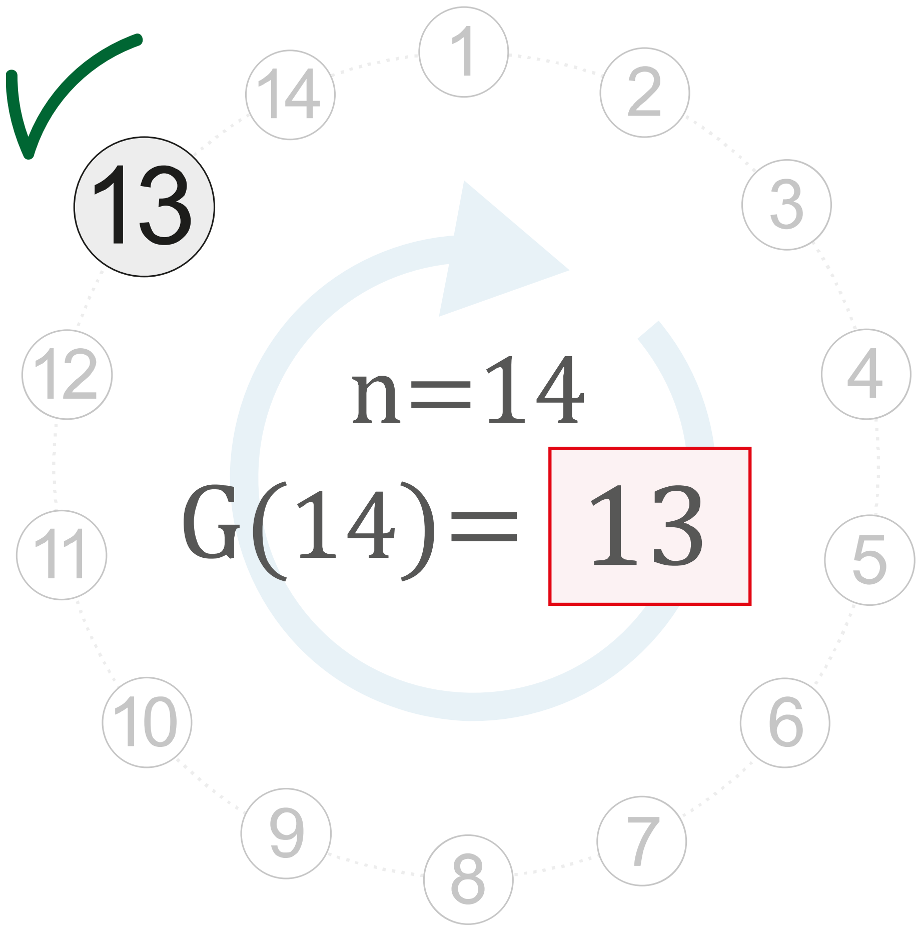
Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).



La persona nella posizione 13 uccide il numero 5 e resta sola.

Procediamo così fino alla fine.

Vediamo una «simulazione di conta», con Giuseppe accompagnato da 13 soldati, per un totale di $n = 14$ persone. Immaginiamo che la persona $\boxed{1}$ dia inizio alla strage e indichiamo con $G(n)$ la posizione che avrebbe dovuto occupare Giuseppe per salvarsi (immaginando che vi sia un unico sopravvissuto).

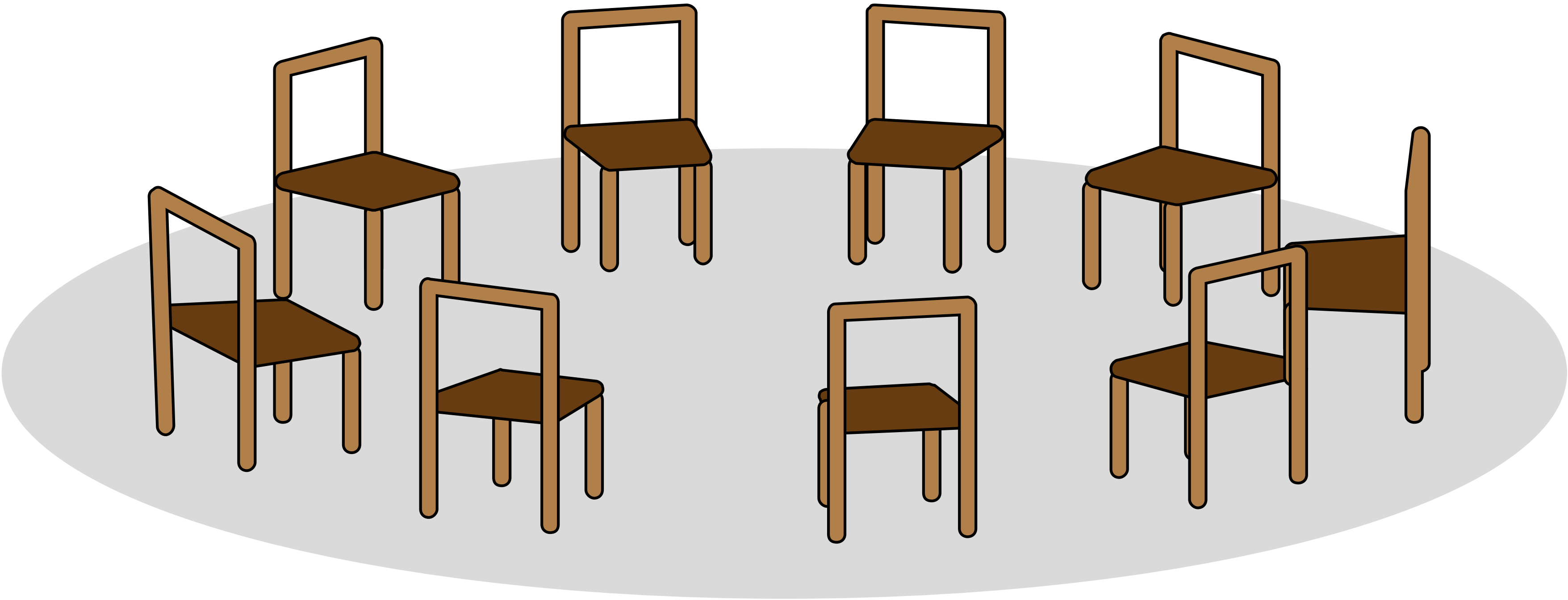


In un cerchio di 14 persone, Giuseppe avrebbe dovuto retrocedere di due posti rispetto al soldato incaricato di iniziare.

Possiamo immaginare che Giuseppe abbia eseguito il calcolo a mente, svolgendo il «gioco» con il numero di soldati presenti (una quarantina).

Attività da fare in classe dopo l'introduzione storica

Ci si mette in cerchio insieme all'insegnante. Questi conosce il meccanismo e sceglie chi deve iniziare, indicando anche il «verso» del giro. Alla fine sopravvivrà soltanto lui, che potrà rispondere alla domanda «A COSA SERVE LA MATEMATICA?» in modo definitivo (forse).

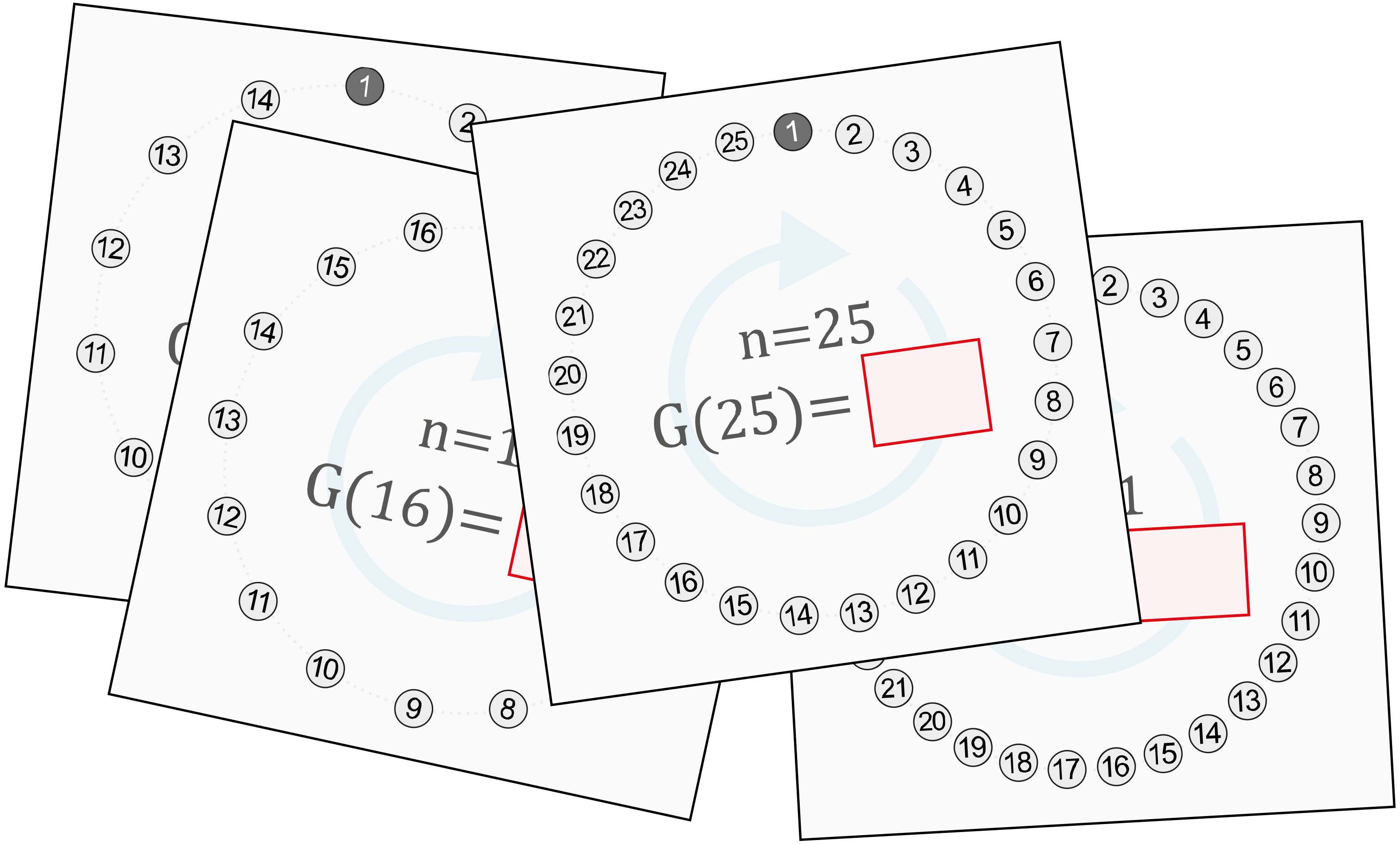


Eravamo rimasti qui: *«Possiamo immaginare che Giuseppe abbia eseguito il calcolo a mente, svolgendo il «gioco» con il numero di soldati presenti.»*

Il «problema di Giuseppe», in Matematica, ha invece (ovviamente) carattere generale:

In un gruppo composto da n persone disposte a cerchio, in quale posizione $G(n)$ bisogna mettersi per sopravvivere alla decimazione?

Dividetevi in gruppi, esercitatevi con valori n qualsiasi e poi cercate di fare «esperimenti mirati», al fine di produrre qualche congettura.



Come si calcola $G(n)$ a partire da n?

Le prime congetture e le prime proposizioni dimostrate sono probabilmente le seguenti:

$$G(n) \leq n$$

Le prime congetture e le prime proposizioni dimostrate sono probabilmente le seguenti:

$$G(n) \leq n$$

$G(n)$ assume solo valori dispari

Le prime congetture e le prime proposizioni dimostrate sono probabilmente le seguenti:

$G(n) \leq n$

$G(n)$ assume solo valori dispari

Se $n + 1 \neq 2^k$ allora $G(n + 1) = G(n) + 2$

Le prime congetture e le prime proposizioni dimostrate sono probabilmente le seguenti:

$$G(n) \leq n$$

$G(n)$ assume solo valori dispari

$$G(2^n - 1) = 2^n - 1$$

Se $n + 1 \neq 2^k$ allora $G(n+1) = G(n) + 2$

Le prime congetture e le prime proposizioni dimostrate sono probabilmente le seguenti:

$G(n) \leq n$

$G(n)$ assume solo valori dispari

$G(2^n - 1) = 2^n - 1$

$G(2^n) = 1$

Se $n + 1 \neq 2^k$ allora $G(n+1) = G(n) + 2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
G(n)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31

Può darsi che qualche gruppo abbia analizzato in modo ordinato abbastanza casi da aver formulato (in una qualche forma) l’espressione corretta:

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

r è la differenza tra n e la più grande potenza di 2 minore «che sta» in n.

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

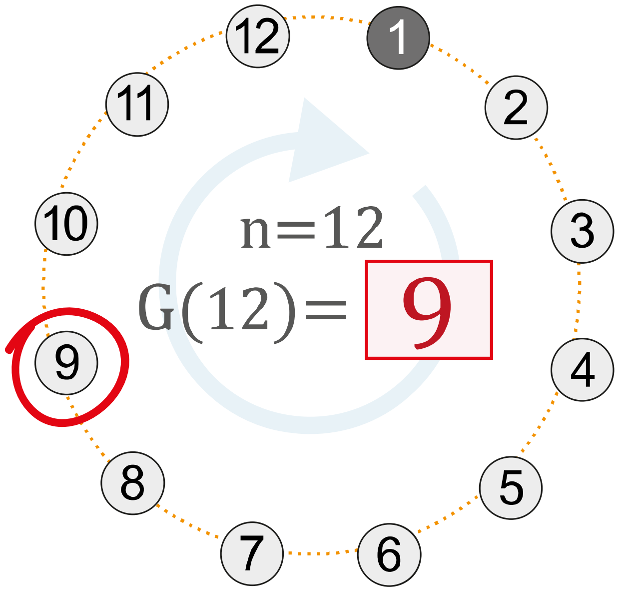
r è la differenza tra n e la più grande potenza di 2 «che sta» in n.

Per arrivare a dimostrare la formula incorniciata sopra (↑), osserviamo prima due relazioni ricorsive e cerchiamo di capire il loro significato:

$$G(2n) = 2G(n) - 1 \qquad G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

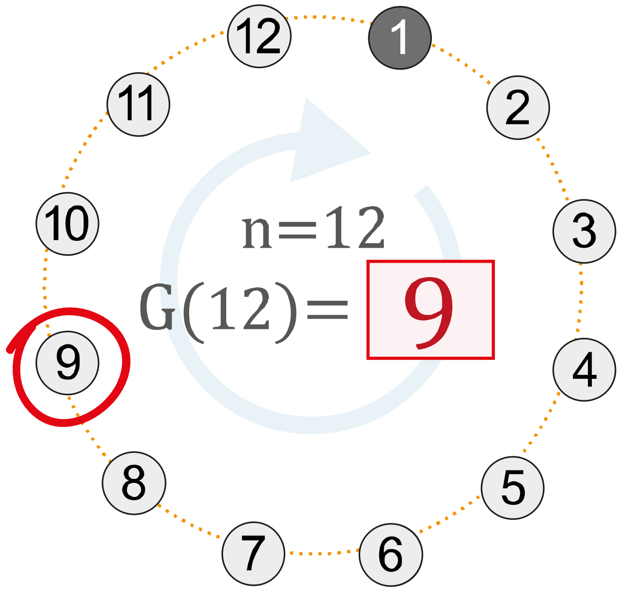
$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

Iniziamo con il caso $G(2n)$ e cerchiamo di capire quale fenomeno è alla base della legge ricorsiva.



$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

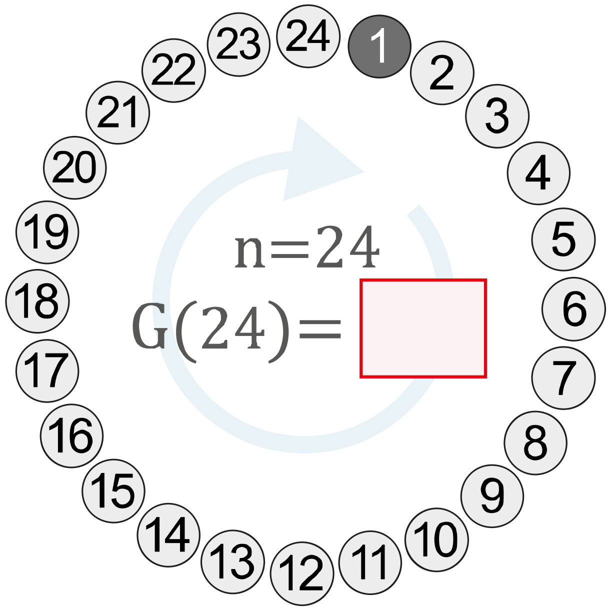
Consideriamo un caso qualsiasi (pari o dispari, non importa), per esempio $n = 12$ e facciamo «la conta». Si ottiene $G(12) = 9$ (fidatevi).

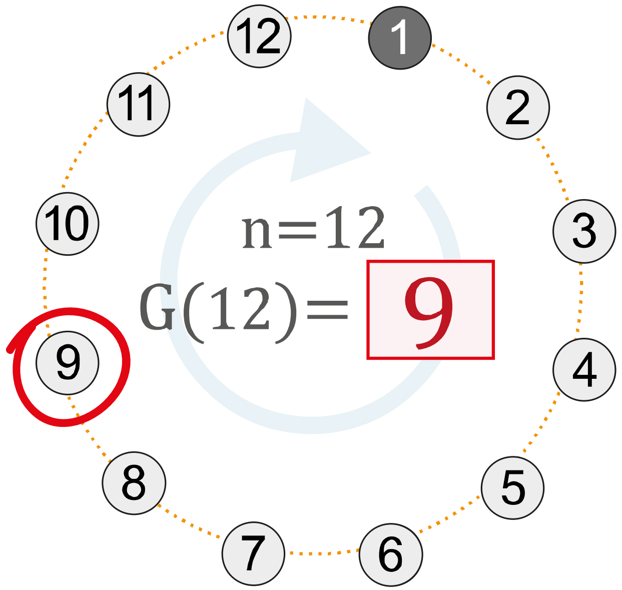


$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

Consideriamo un caso qualsiasi (pari o dispari, non importa), per esempio $n = 12$ e facciamo «la conta». Si ottiene $G(12) = 9$.

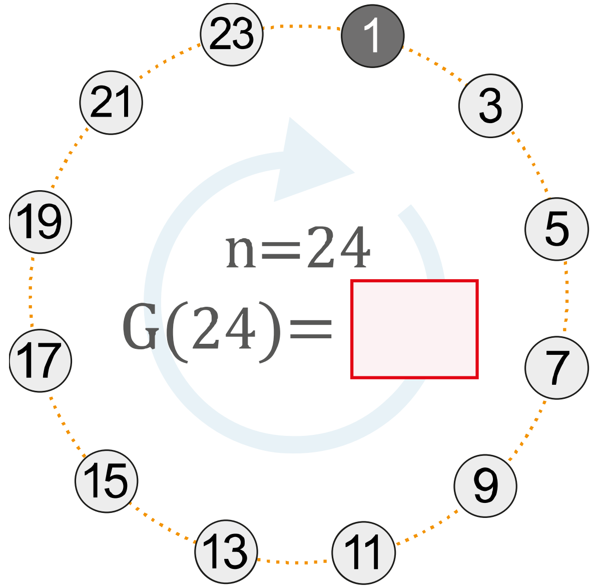
Passiamo ora al caso con il doppio degli elementi $2n = 24$.



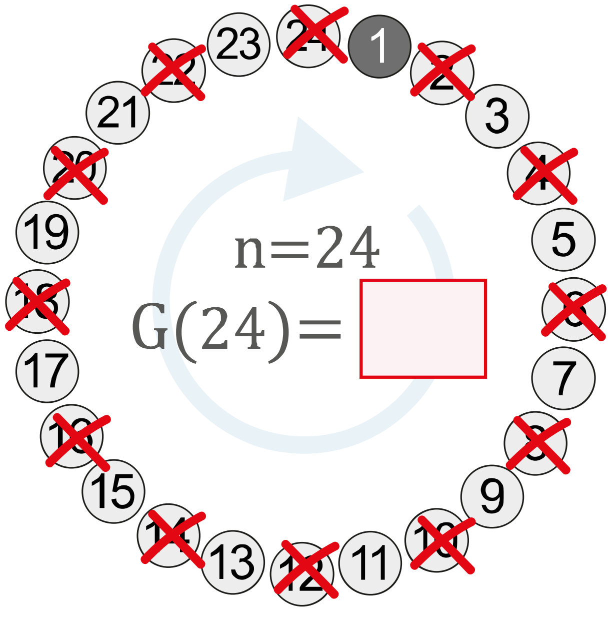


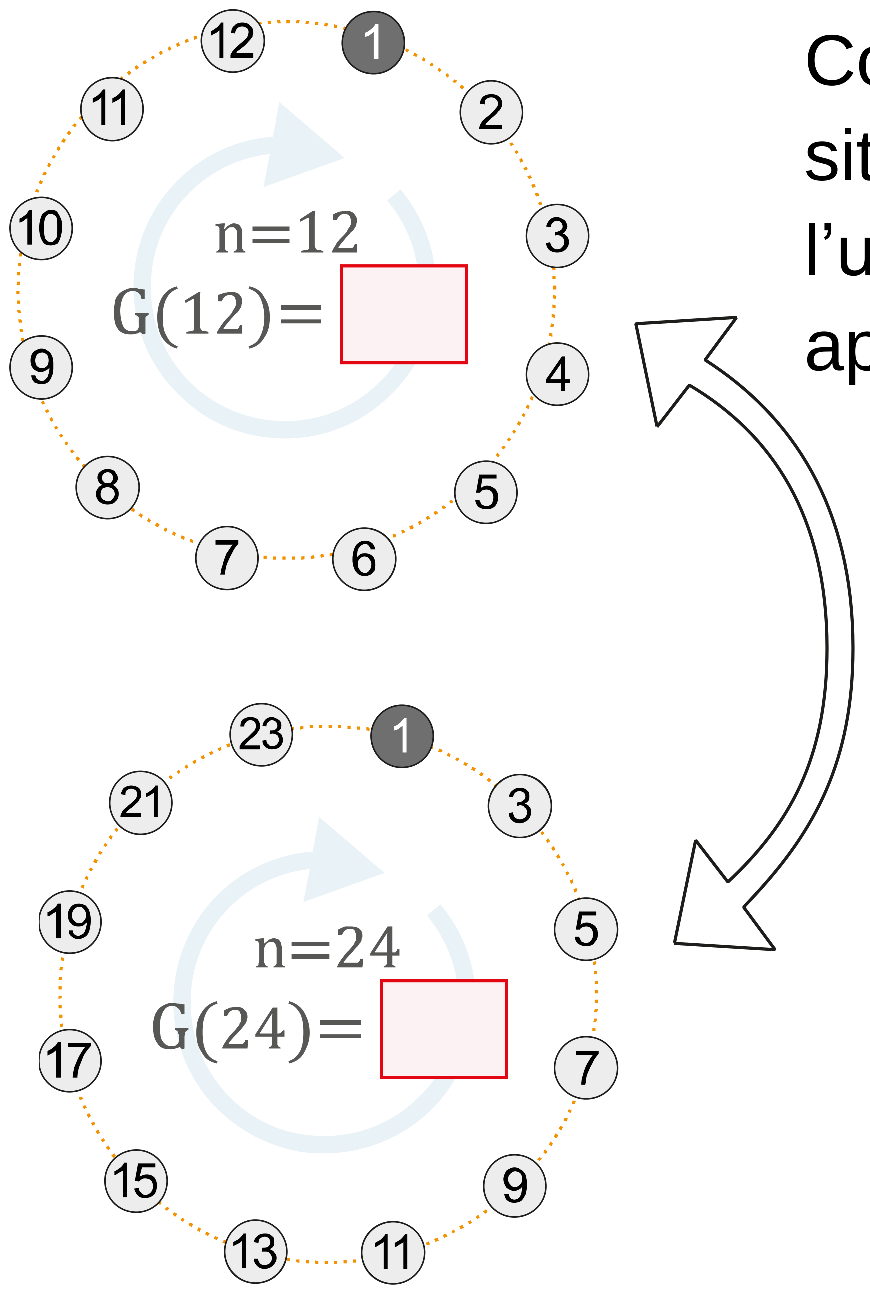
$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

Consideriamo un caso qualsiasi (pari o dispari, non importa), per esempio $n = 12$ e facciamo «la conta». Si ottiene $G(12) = 9$.

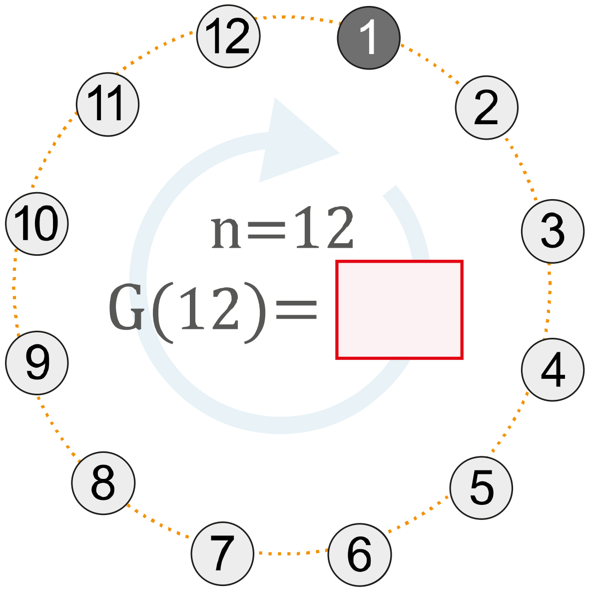


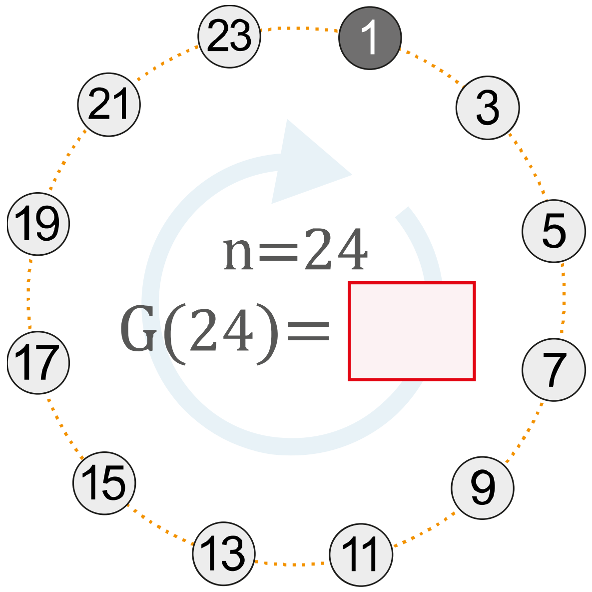
Passiamo ora al caso con il doppio degli elementi $2n = 24$. Come sappiamo, al «primo giro» vengono eliminati tutti i numeri pari e si giunge alla situazione mostrata a sinistra (←):



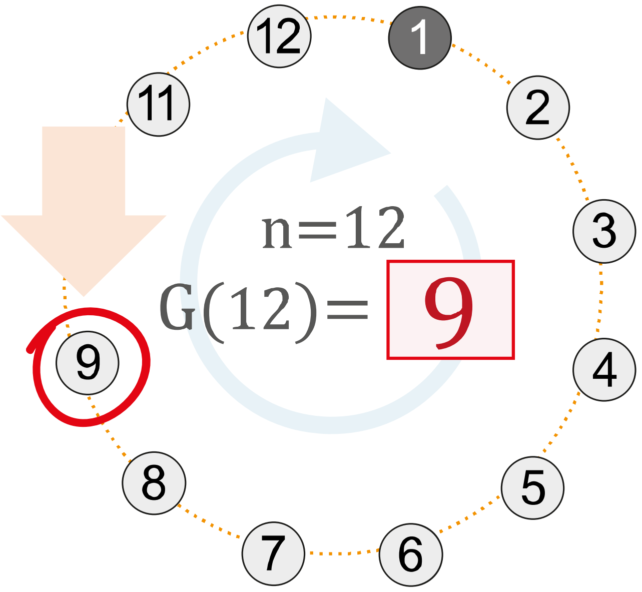


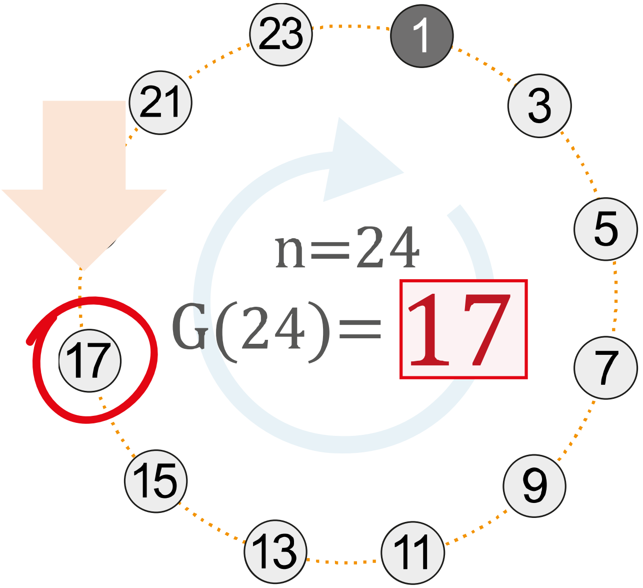
Confrontando i due casi, vediamo che la situazione è sostanzialmente identica e che l'unica differenza sono le «etichette» applicate.





Confrontando i due casi, vediamo che la situazione è sostanzialmente identica e che l'unica differenza sono le «etichette» applicate. Per la precisione, ad ogni etichetta k del caso in alto $(n = 12)$ corrisponde l'etichetta $2k - 1$ del caso in basso $(n = 24)$.





Confrontando i due casi, vediamo che la situazione è sostanzialmente identica e che l'unica differenza sono le «etichette» applicate. Per la precisione, ad ogni etichetta k del caso in alto $(n = 12)$ corrisponde l'etichetta $2k - 1$ del caso in basso $(n = 24)$.

Da $G(12) = 9$ arriviamo così a

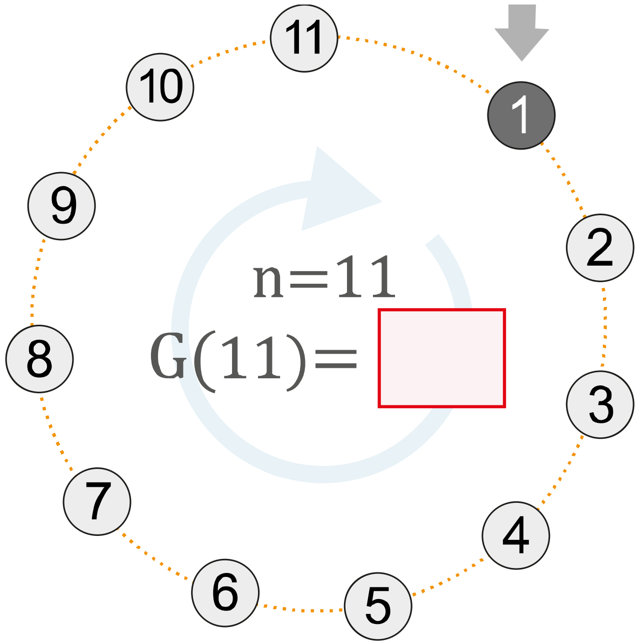
$G(24) = 2 \cdot 9 - 1 = 17$.

Quanto osservato ha validità generale e non dipende dai casi illustrati. Vale quindi

$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

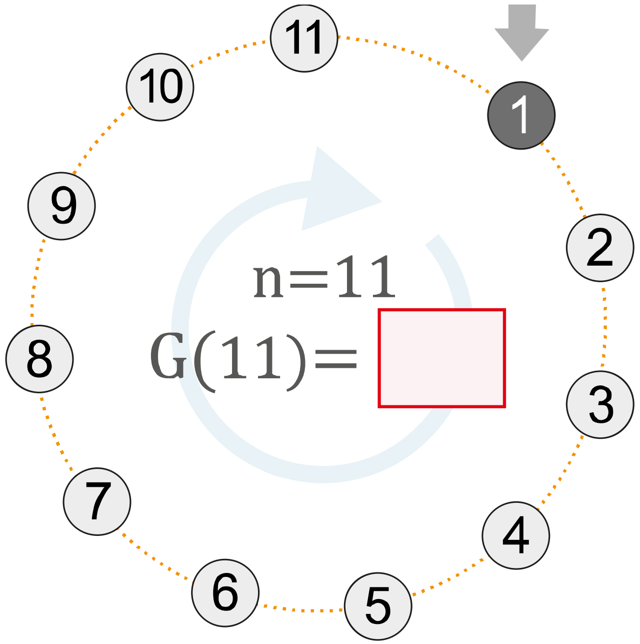
$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

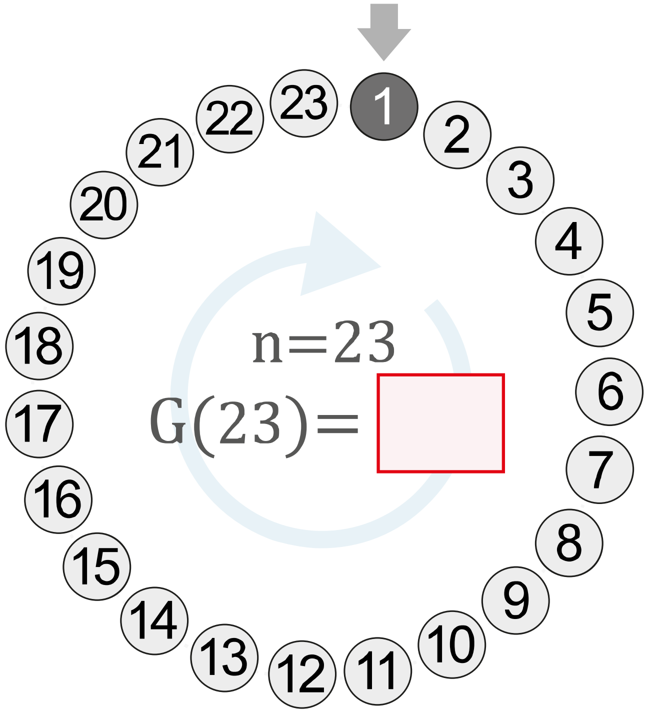
Usiamo la stessa strategia di prima: partiamo da un caso n qualsiasi



$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

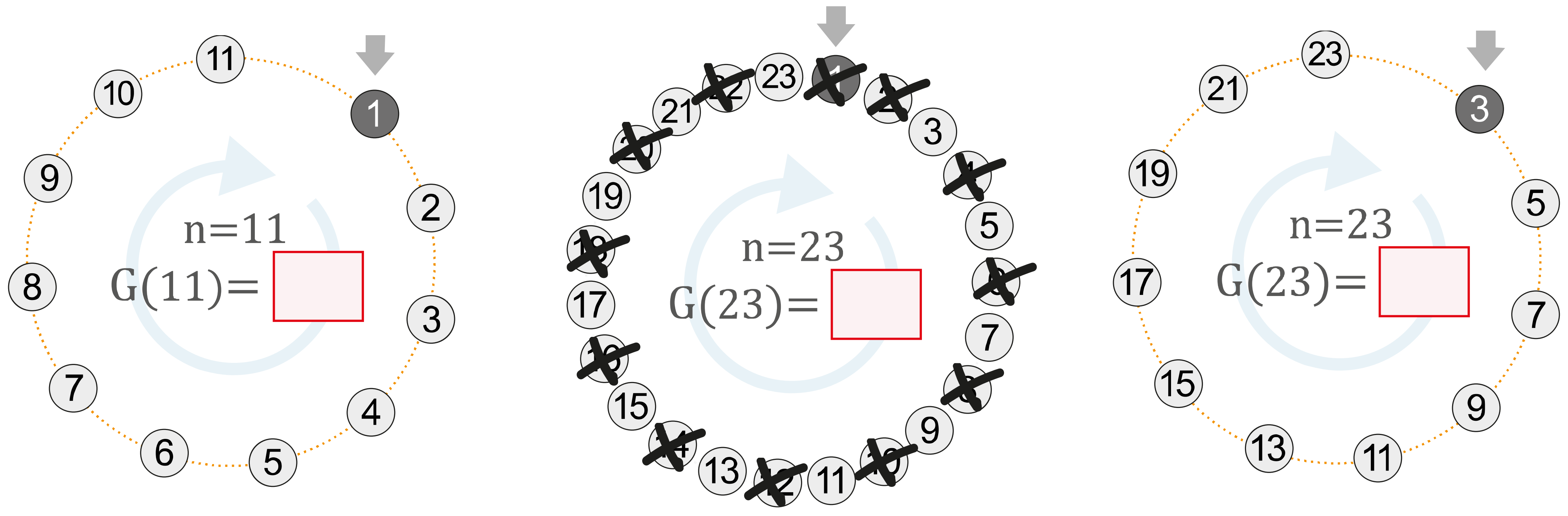
Usiamo la stessa strategia di prima: partiamo da un caso n qualsiasi e poi passiamo a $2n+1$:





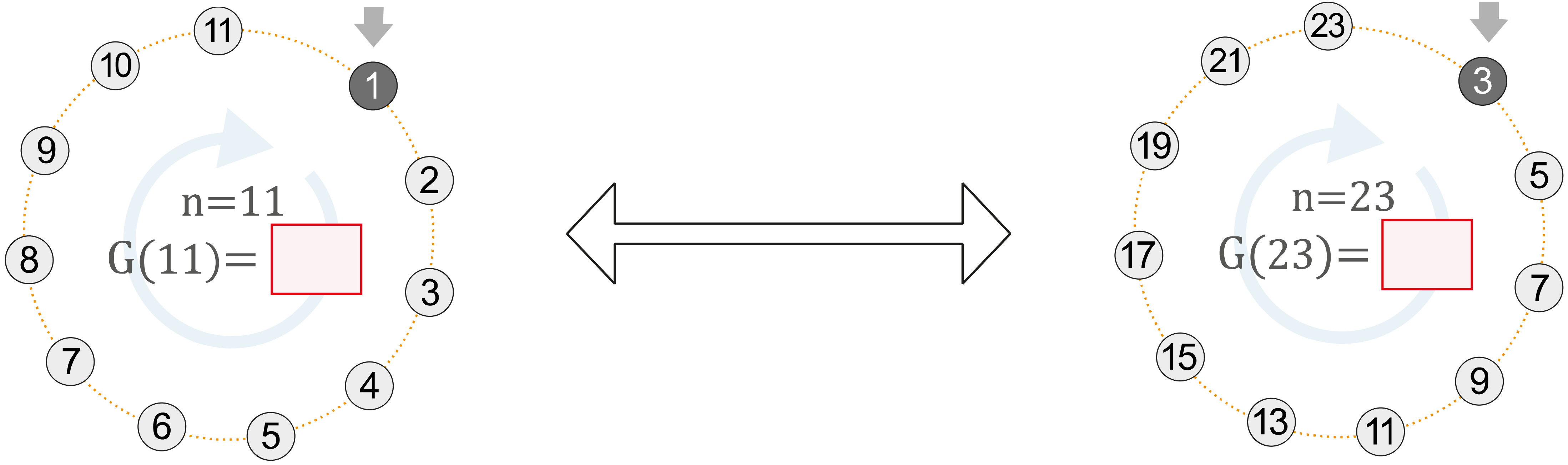
$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

Usiamo la stessa strategia di prima: partiamo da un caso n qualsiasi e poi passiamo a $2n+1$: dopo aver concluso il primo giro di decimazione e la successiva eliminazione dell'elemento $\boxed{1}$

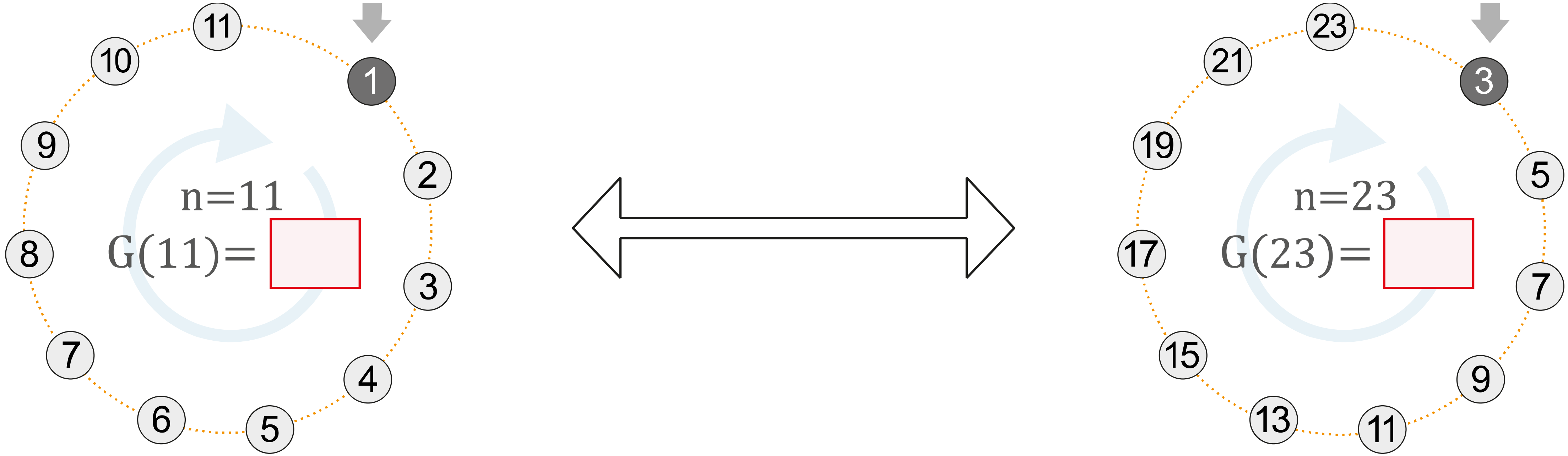


$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

Usiamo la stessa strategia di prima: partiamo da un caso n qualsiasi e poi passiamo a $2n+1$: dopo aver concluso il primo giro di decimazione e la successiva eliminazione dell'elemento $\boxed{1}$ (che per gruppi dispari è il primo elementi a sparire nel secondo giro), emergeranno le similitudini auspicate.

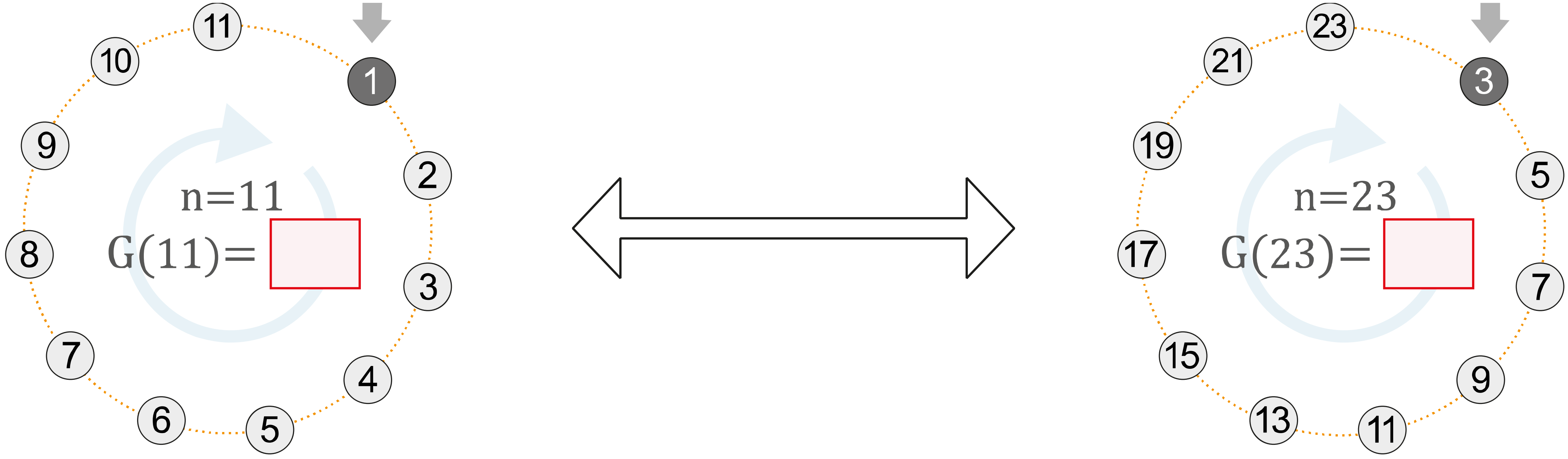


$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$



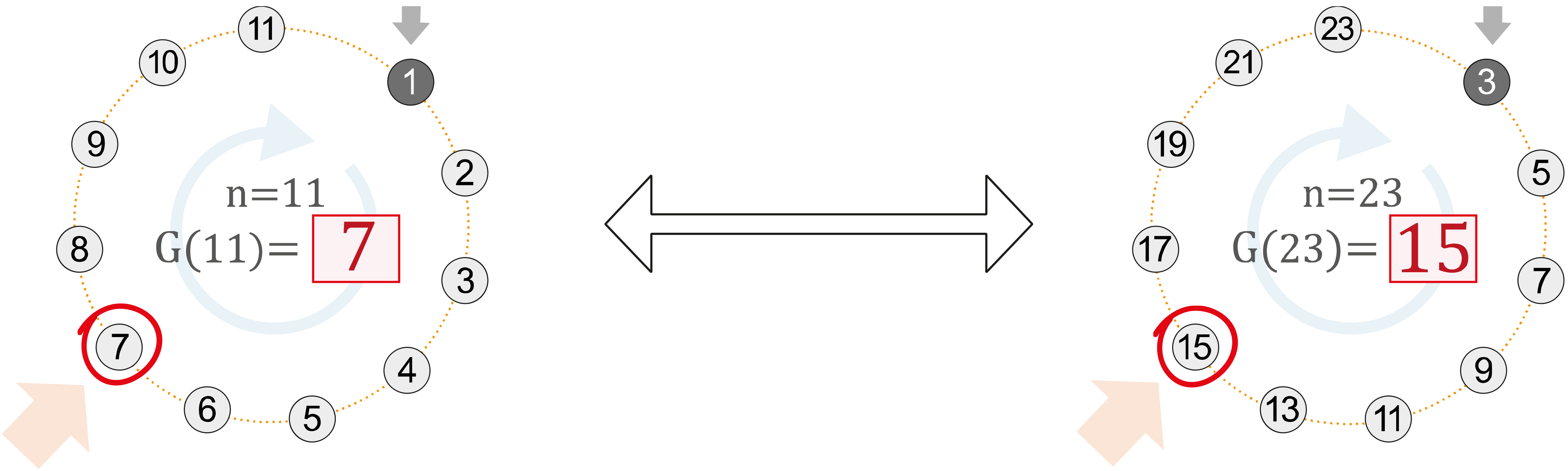
Le due configurazioni sono identiche, cambiano le etichette: ad ogni elemento k del primo cerchio è associato l'elemento $2k+1$ del secondo.

$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$



Le due configurazioni sono identiche, cambiano le etichette: ad ogni elemento k del primo cerchio è associato l'elemento $2k+1$ del secondo. Questo varrà anche per la soluzione, per cui si avrà appunto $G(2n+1) = 2G(n) + 1$

$$G(2n+1) = 2G(n)+1$$



Le due configurazioni sono identiche, cambiano le etichette: ad ogni elemento k del primo cerchio è associato l'elemento $2k+1$ del secondo. Questo varrà anche per la soluzione, per cui si avrà appunto $G(2n+1) = 2G(n)+1$ (nel caso specifico è il $\boxed{7}$ a sinistra e il $\boxed{15}$ a destra).

È spesso comodo riscrivere le due leggi

$$G(2n) = 2G(n) - 1$$

$$G(2n+1) = 2G(n) + 1$$

nella forma (equivalente)

$$G(n) = \begin{cases} 2G\left(\frac{n}{2}\right) - 1 \text{ se } n \text{ è pari} \\ 2G\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $\boxed{G(n) = 2r + 1}$

La dimostrazione della formula chiusa incorniciata in alto è un elegante esercizio di dimostrazione per induzione, che si può proporre agli studenti che abbiano dimestichezza con questa tecnica.

Si considera n nella forma $n = 2^q + r$ e si opera per induzione su q, distinguendo i casi n pari (quindi anche r pari) e n dispari (r dispari). È utile usare le leggi ricorsive nella versione presentata prima:

$$G(n) = \begin{cases} 2G\left(\frac{n}{2}\right) - 1 \text{ se } n \text{ è pari} \\ 2G\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Cosa c’entra il problema di Giuseppe con i «giochi binari», lo si capisce passando alla rappresentazione in base 2:

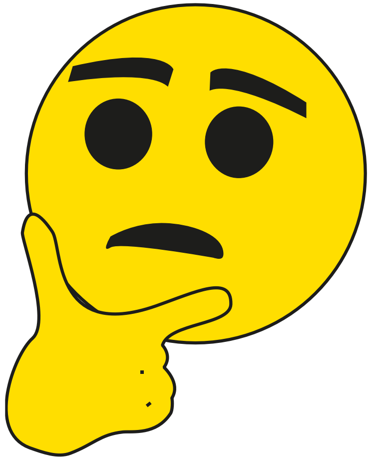
n	G(n)
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7

n	G(n)
8	1
9	3
10	5
11	7
12	9
13	11
14	13

Cosa c’entra il problema di Giuseppe con i «giochi binari», lo si capisce passando alla rappresentazione in base 2:

n_2	$G(n)_2$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	11
110	101
111	111

n_2	$G(n)_2$
1000	1
1001	11
1010	101
1011	111
1100	1001
1101	1011
1110	1101



Cosa c’entra il problema di Giuseppe con i «giochi binari», lo si capisce passando alla rappresentazione in base 2:

n_2	$G(n)_2$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	11
110	101
111	111

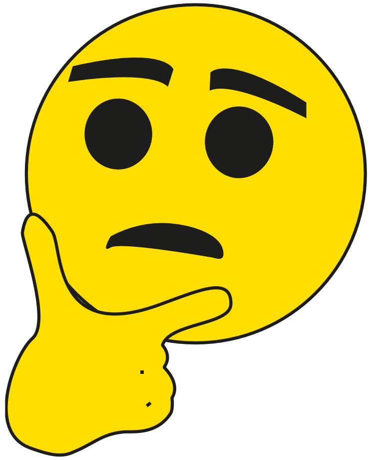
n_2	$G(n)_2$
1000	1
1001	11
1010	101
1011	111
1100	1001
1101	1011
1110	1101

Non sembra esserci alcun legame (evidente) fra le cifre della prima e della seconda colonna, tranne il numero di cifre $\boxed{1}$, che è sempre uguale!

Se però usiamo per $G(n)$ lo stesso numero di cifre usate per n (ricordo che vale $G(n) \le n$), uno strano fenomeno salta agli occhi.

n_2	$G(n)_2$
1	1
10	01
11	11
100	001
101	011
110	101
111	111

n_2	$G(n)_2$
1000	0001
1001	0011
1010	0101
1011	0111
1100	1001
1101	1011
1110	1101

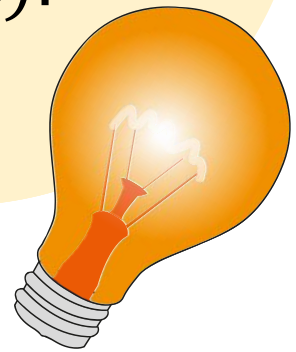


Se però usiamo per $G(n)$ lo stesso numero di cifre usate per n (ricordo che vale $G(n) \leq n$), uno strano fenomeno salta agli occhi.

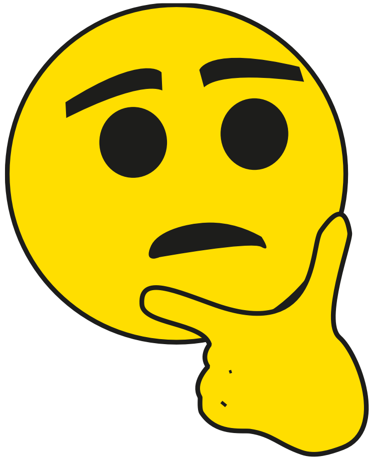
n_2	$G(n)_2$
1	1
10	01
11	11
100	001
101	011
110	101
111	111

n_2	$G(n)_2$
1000	0001
1001	0011
1010	0101
1011	0111
1100	1001
1101	1011
1110	1101

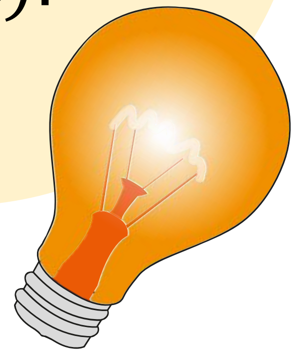
Trasportando la prima cifra di n (che ovviamente è sempre $\boxed{1}$) in ultima posizione, si ottiene sempre $G(n)$!



Perché?



Trasportando la prima cifra di n (che ovviamente è sempre $\boxed{1}$) in ultima posizione, si ottiene sempre $G(n)$!



Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Se i numeri vengono scritti in binario, i vari parametri della formula incorniciata acquisiscono un significato più immediato.

r è semplicemente n «amputato» della prima cifra (a lato un esempio numerico qualsiasi)

$$n = \boxed{1}\overbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\cdots\boxed{1}}^{r}$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Utilizzando i colori e ricordando che $G(n) = 2r + 1$, possiamo costruire la seguente catena di trasformazioni (valida per ogni intero):

$$\mathrm{n} = \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1} \cdots \boxed{1}$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Utilizzando i colori e ricordando che $G(n) = 2r + 1$, possiamo costruire la seguente catena di trasformazioni (valida per ogni intero):

$$\mathrm{n} = \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\cdots\,\boxed{1}$$

$$\mathrm{r} = \quad\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\cdots\,\boxed{1}$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Utilizzando i colori e ricordando che $G(n) = 2r + 1$, possiamo costruire la seguente catena di trasformazioni (valida per ogni intero):

$$\mathrm{n} = \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}$$

$$\mathrm{r} = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}$$

$$2\mathrm{r} = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}\,\boxed{0}$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Utilizzando i colori e ricordando che $G(n) = 2r + 1$, possiamo costruire la seguente catena di trasformazioni (valida per ogni intero):

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\mathrm{n} = & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & \\
\mathrm{r} = & & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & \\
2\mathrm{r} = & & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & \boxed{0} \\
2\mathrm{r}+1 = & & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1} & \boxed{1}
\end{array}
$$

Se $2^q < n \leq 2^{q+1}$ e $n = 2^q + r$ allora $G(n) = 2r + 1$

Utilizzando i colori e ricordando che $G(n) = 2r + 1$, possiamo costruire la seguente catena di trasformazioni (valida per ogni intero):

$$\mathrm{n} = \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}$$

$$\mathrm{r} = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}$$

$$2\mathrm{r} = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}\,\boxed{0}$$

$$\mathrm{G(n)} = 2\mathrm{r} + 1 = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\cdots\boxed{1}\,\boxed{1}$$

Non resta che fare esercizio….

$$G(1.000.000) =$$

4 GIOCO NUMERO 4 – **UNA SEQUENZA MISTERIOSA**

Sui vostri fogli trovate la seguente successione (illimitata) $\boldsymbol{M}$ di interi, chiamata **misteriosa**. Trovate i numeri da inserire nelle 4 caselle colorate:

0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3
4	1	2	2	3	2	3	3	4	2	3	3	4	3	
4	4	5					…							

4 GIOCO NUMERO 4 – **UNA SEQUENZA MISTERIOSA**

La **misteriosa** è talmente ricca di strane proprietà, che conviene affidarsi all’osservazione e scoprirne qualcuna da soli.

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2

3 2 3 3 4 1 2 2 3 2

3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5 …

4 GIOCO NUMERO 4 – **UNA SEQUENZA MISTERIOSA**

Vediamo qualche esempio

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2
3 2 3 3 4 1 2 2 3 2
3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5 …

0 ~~1~~ 1 ~~2~~ 1 ~~2~~ 2 ~~3~~ 1 ~~2~~ 2
~~3~~ 2 ~~3~~ 3 ~~4~~ 1 ~~2~~ 2 ~~3~~ 2
~~3~~ 3 ~~4~~ 2 ~~3~~ 3 ~~4~~ 3 ~~4~~ 4 ~~5~~ …

Eliminando un elemento no e uno sì, si torna alla successione di partenza.

0 1 1 2 1 2
2 3 1 2 2
3 2 3 3 4 …

4 GIOCO NUMERO 4 – **UNA SEQUENZA MISTERIOSA**

Vediamo qualche esempio

0	1	1	2	1	2

3	2	3

3	3

Iterando il procedimento si ha che: partendo dal primo elemento (0) e facendo «salti da 2», oppure facendo «salti da 4», oppure «salti da 8» e in generale facendo «salti da 2^k», si ottiene sempre la stessa sequenza.

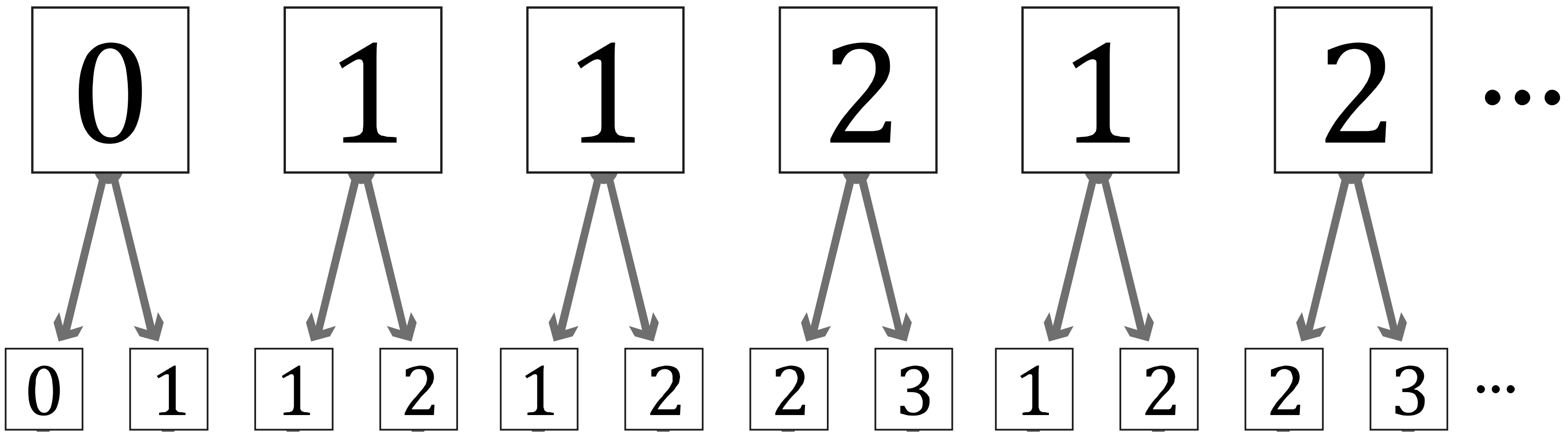
Eliminando un elem... e uno sì, si torna alla successione di partenza.

			1	2
2	3	1	2	2
3	2	3	3	4

…

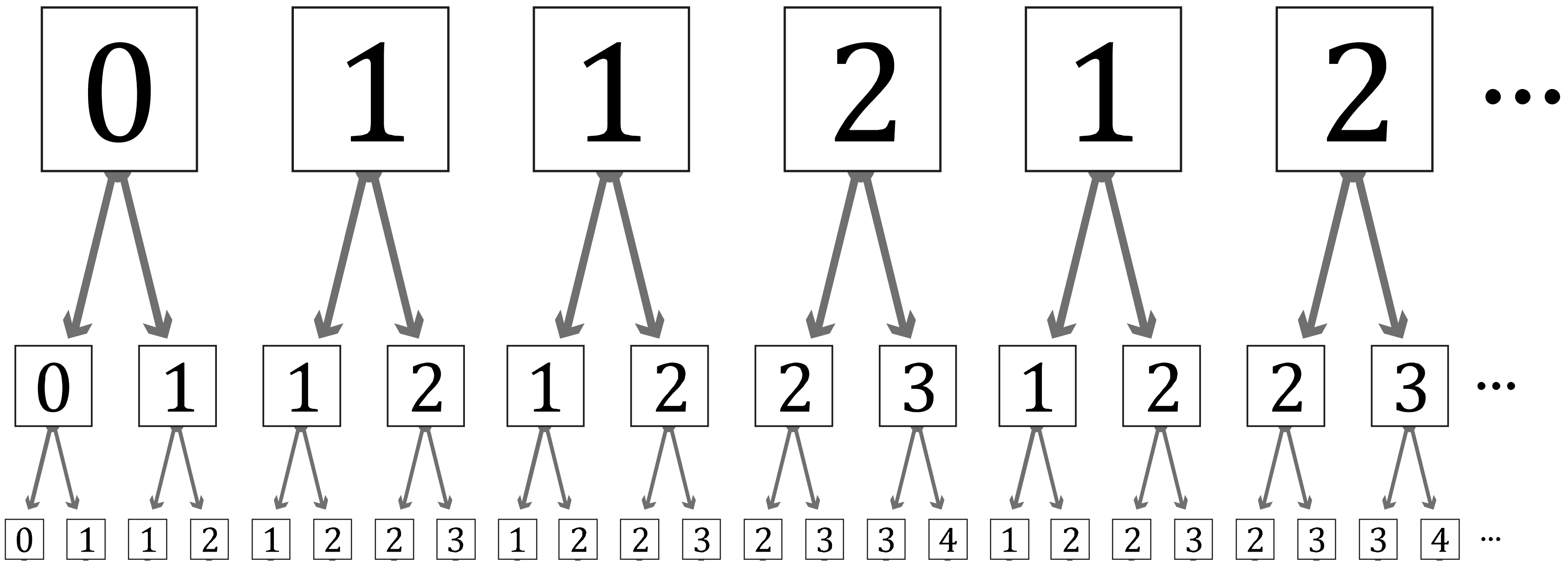
Vediamo qualche esempio

Sostituendo ogni numero $\boxed{n}$ della sequenza con la coppia $\boxed{n}$, $\boxed{n+1}$, la sequenza stessa resta uguale.



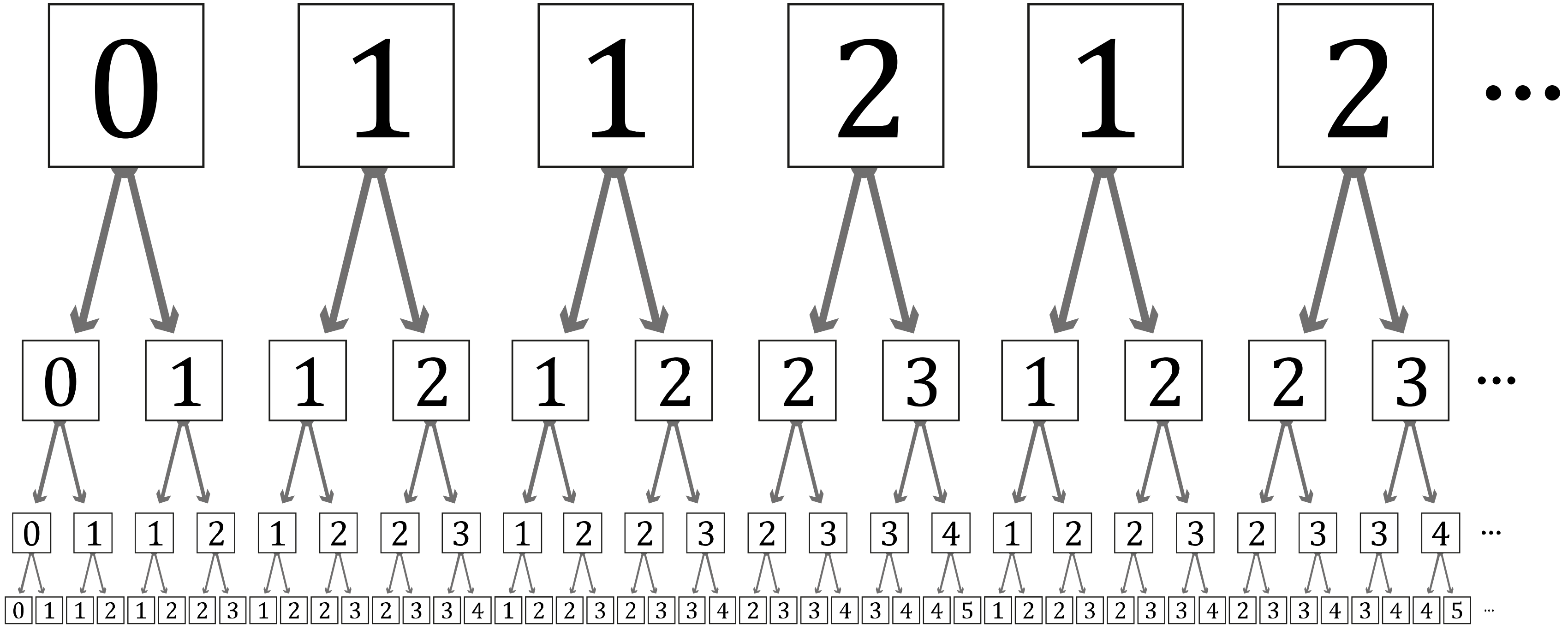
Vediamo qualche esempio

Sostituendo ogni numero $\boxed{n}$ della sequenza con la coppia $\boxed{n}$, $\boxed{n+1}$, la sequenza stessa resta uguale.



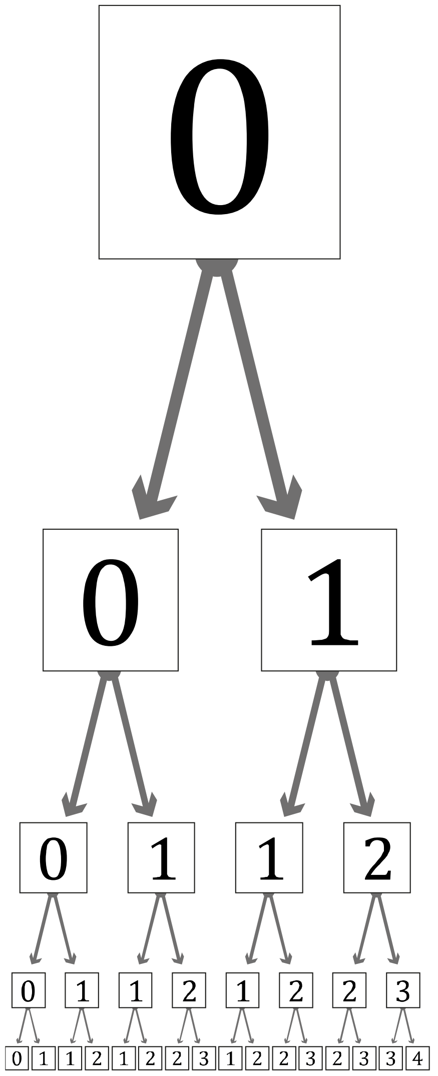
Vediamo qualche esempio

Sostituendo ogni numero $\boxed{n}$ della sequenza con la coppia $\boxed{n}$, $\boxed{n+1}$, la sequenza stessa resta uguale.



Sostituendo ogni numero $\boxed{n}$ della sequenza con la coppia $\boxed{n}$, $\boxed{n+1}$, la sequenza stessa resta uguale.

La sostituzione può essere usata per generare la sequenza a partire dal solo elemento $\boxed{0}$ e applicando infinite volte la «meiosi» descritta dalla proprietà.



Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).

Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

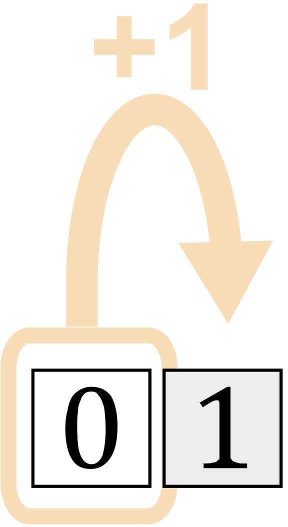
Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).

$\boxed{0}$

Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

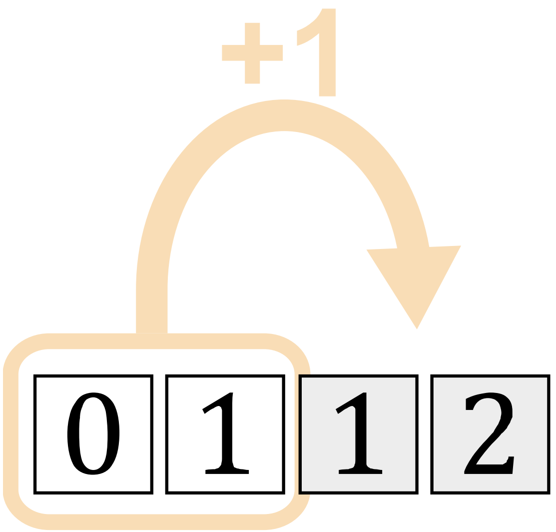
Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).



Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

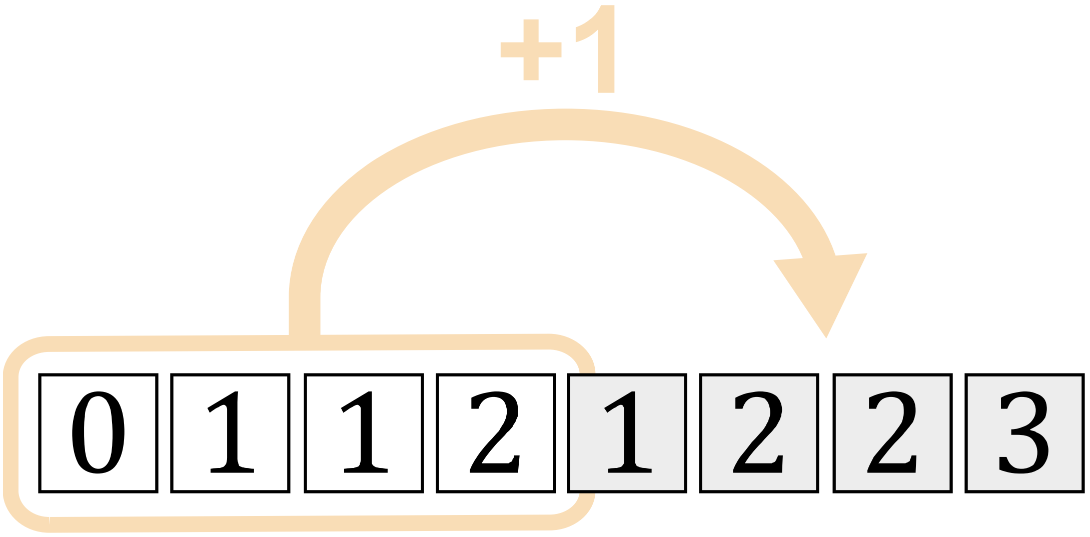
Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).



Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

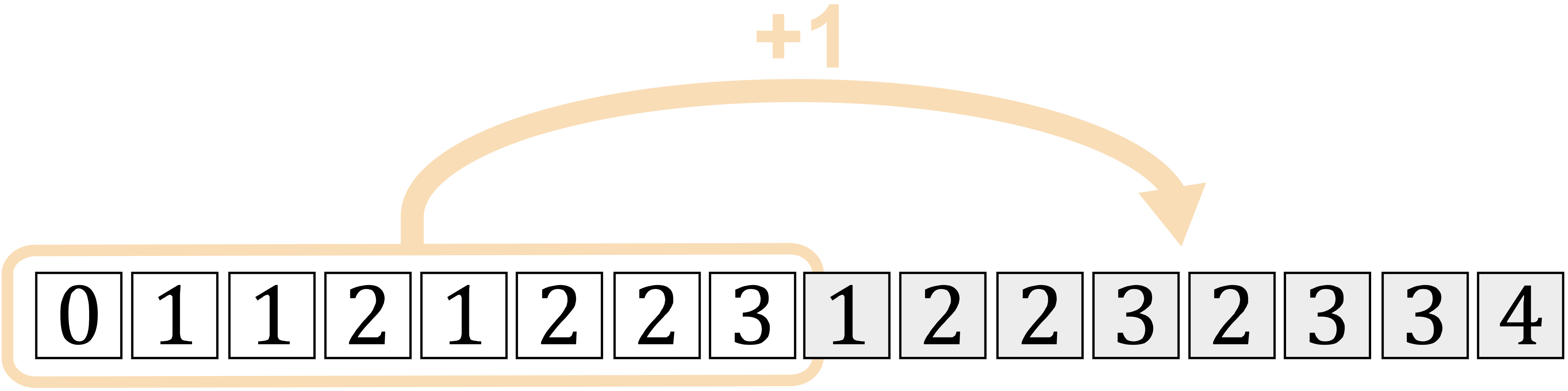
Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).



Vediamo un altro **meccanismo di generazione** della successione misteriosa

Si parte da una successione composta solo da $\boxed{0}$

Ag ogni «turno» si prende la vecchia successione e le si attacca la successione con gli elementi incrementati (di 1).



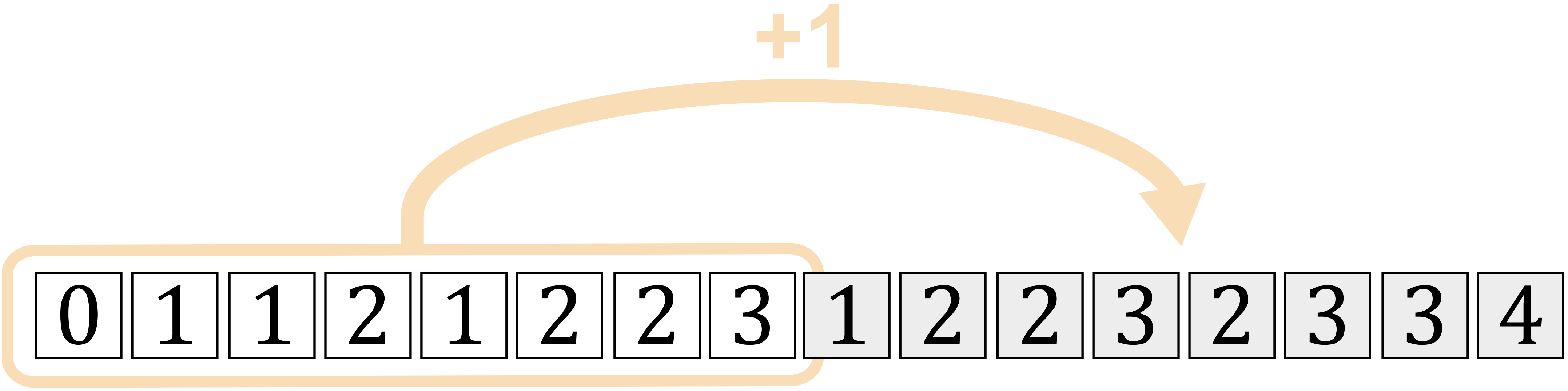
Vediamo qualche esempio

Vediamo un altro **meccanismo di generazio**... ...one misteriosa

Si parte da una successio...

Ag ogni «turno» si prende...
successione con gli element...

Chiamiamo questo meccanismo generativo «regola del raddoppio»



Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

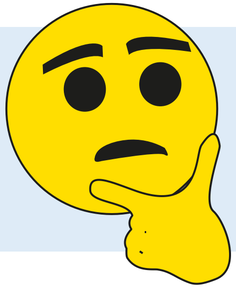
Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{4}$$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$$



In S_k, quante volte compaiono i numeri $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,… $\boxed{k-1}$?

Vediamo ora un’interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$$

In S_4 si ha… 1 volta $\boxed{0}$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{4}$$

In S_4 si ha…

1 volta $\boxed{0}$

4 volte $\boxed{1}$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$$

In S_4 si ha…

1 volta $\boxed{0}$

4 volte $\boxed{1}$

6 volte $\boxed{2}$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{4}$$

In S_4 si ha…

1 volta $\boxed{0}$

4 volte $\boxed{1}$

6 volte $\boxed{2}$

4 volte $\boxed{3}$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{2}\,\boxed{3}\,\boxed{3}\,\boxed{4}$$

In S_4 si ha…

1 volta $\boxed{0}$

4 volte $\boxed{1}$

6 volte $\boxed{2}$

4 volte $\boxed{3}$

1 volta $\boxed{4}$

Vediamo ora un'interessante proprietà legata alla «prima occorrenza» di un certo numero.

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso. A titolo di esempio, in basso è rappresentata S_4:

$$S_4 = \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$$

In S_4 si ha…

1 volta $\boxed{0}$

4 volte $\boxed{1}$

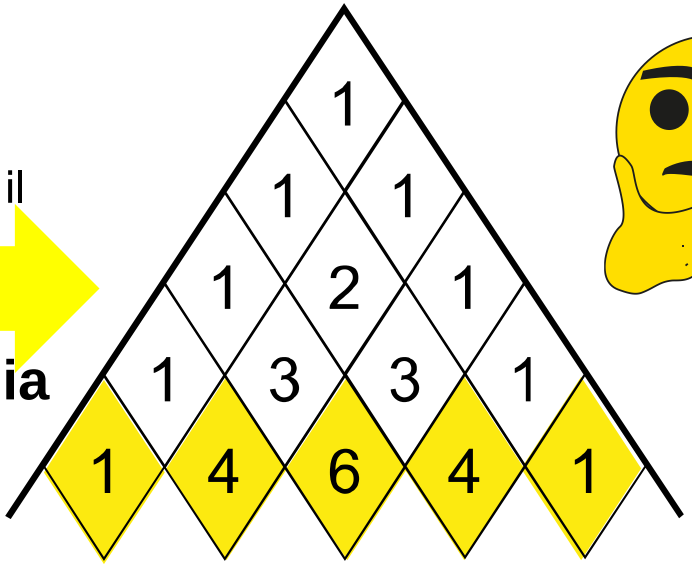
6 volte $\boxed{2}$

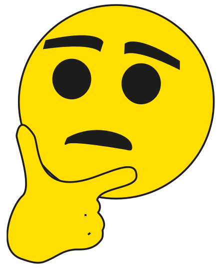
4 volte $\boxed{3}$

1 volta $\boxed{4}$

Pare che c'entri qualcosa il

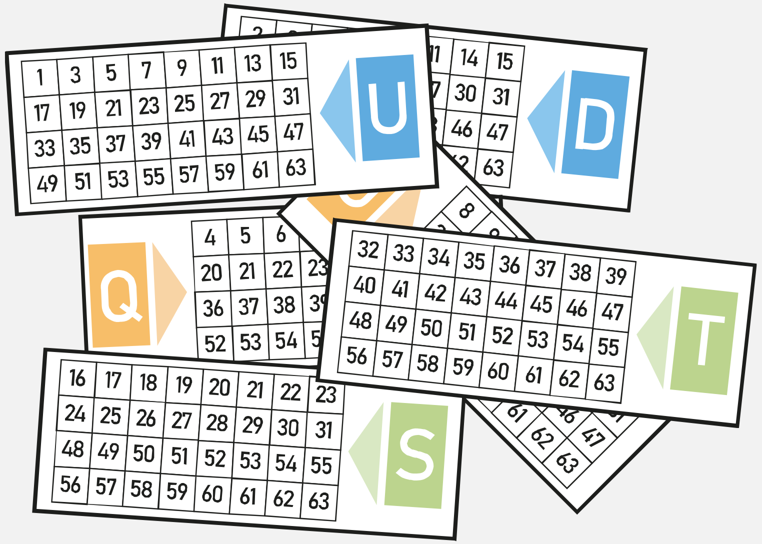
Triangolo di Tartaglia



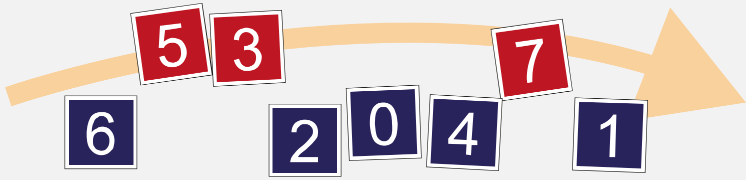


La successione *misteriosa* ha a che fare con tutti e tre i “giochi” visti in precedenza (e rappresentati in basso). Nei primi due casi risponde a una domanda che inizia con “**Quante volte…?**”. Sapresti indovinare le domande?

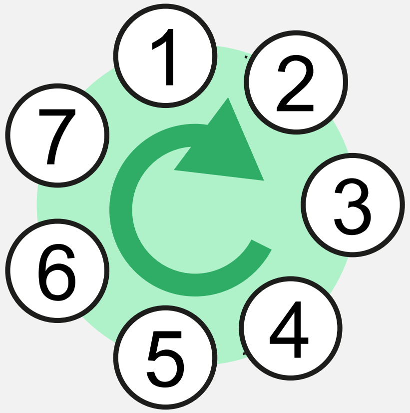
INDOVINA IL NUMERO



IN FONDO ALLA FILA!

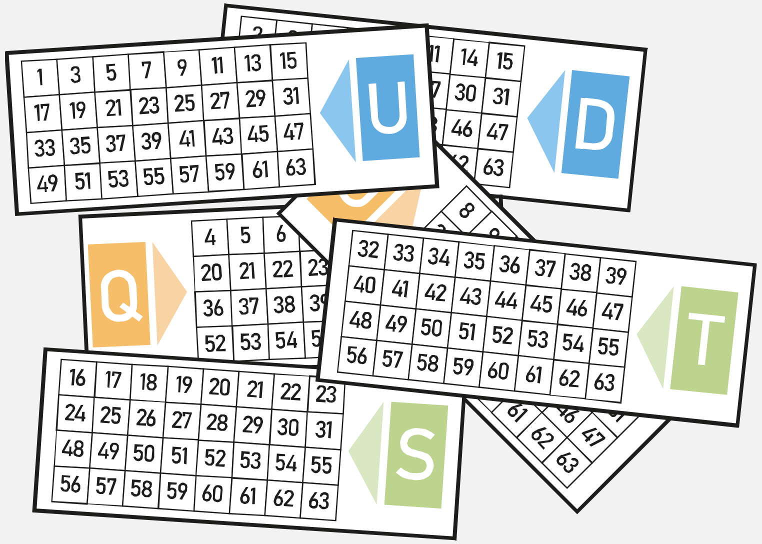


IL PROBLEMA DI GIUSEPPE

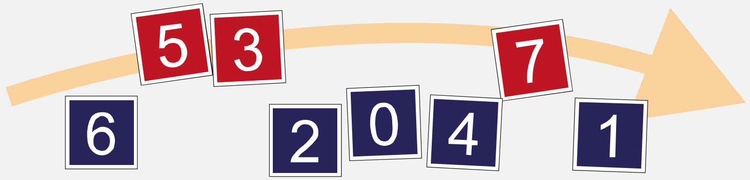


“Quante volte…?”… qualcosa…

INDOVINA IL NUMERO



IN FONDO ALLA FILA!



Quante volte nelle tabelle compare il numero 0 ?

1	3	5	7	9	11	13	15	U
17	19	21	23	25	27	29	31	
33	35	37	39	41	43	45	47	
49	51	53	55	57	59	61	63	

2	3	6	7	10	11	14	15	D
18	19	22	23	26	27	30	31	
34	35	38	39	42	43	46	47	
50	51	54	55	58	59	62	63	

Q	4	5	6	7	12	13	14	15
	20	21	22	23	28	29	30	31
	36	37	38	39	44	45	46	47
	52	53	54	55	60	61	62	63

O	8	9	10	11	12	13	14	15
	24	25	26	27	28	29	30	31
	40	41	42	43	44	45	46	47
	56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23	S
24	25	26	27	28	29	30	31	
48	49	50	51	52	53	54	55	
56	57	58	59	60	61	62	63	

32	33	34	35	36	37	38	39	T
40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	
56	57	58	59	60	61	62	63	

0

Quante volte nelle tabelle compare il numero 1 ?

1	3	5	7	9	11	13	15	U
17	19	21	23	25	27	29	31	
33	35	37	39	41	43	45	47	
49	51	53	55	57	59	61	63	

2	3	6	7	10	11	14	15	D
18	19	22	23	26	27	30	31	
34	35	38	39	42	43	46	47	
50	51	54	55	58	59	62	63	

Q	4	5	6	7	12	13	14	15
	20	21	22	23	28	29	30	31
	36	37	38	39	44	45	46	47
	52	53	54	55	60	61	62	63

O	8	9	10	11	12	13	14	15
	24	25	26	27	28	29	30	31
	40	41	42	43	44	45	46	47
	56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23	S
24	25	26	27	28	29	30	31	
48	49	50	51	52	53	54	55	
56	57	58	59	60	61	62	63	

32	33	34	35	36	37	38	39	T
40	41	42	43	44	45	46	47	
48	49	50	51	52	53	54	55	
56	57	58	59	60	61	62	63	

0 1

Quante volte nelle tabelle compare il numero 2 ?

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0	1	1

Quante volte nelle tabelle compare il numero 3 ?

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0	1	1	2

Quante volte nelle tabelle compare il numero 4 ?

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0 1 1 2 1

Quante volte nelle tabelle compare il numero 5 ?

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0	1	1	2	1	2

Quante volte nelle tabelle compare il numero 6 ?

U

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

D

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Q

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

O

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

S

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

T

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0	1	1	2	1	2	2

Quante volte nelle tabelle compare il numero $\boxed{k}$?

Ricordando la logica con la quale sono costruite le tabelle, **cosa misura $\boldsymbol{M(k)}$ relativamente a $\boldsymbol{k}$?** (*dove $M(k)$=M_k è l'elemento in posizione k della successione misteriosa)

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \ldots$

Quante volte nelle tabelle compare il numero $\boxed{k}$ **?**

Ricordando la logica con la quale sono costruite le tabelle, **cosa misura $\boldsymbol{M(k)}$ relativamente a $\boldsymbol{k}$?** (*dove $M(k)$=M_k è l'elemento in posizione k della successione misteriosa)

$$\boldsymbol{M(k)} = \mathit{numero\ di\ cifre}\ \boxed{1}\ \mathit{nella\ rappresentazione\ binaria\ di}\ k$$

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \cdots$

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2	$\boxed{1}\boxed{0}$	**1**
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2	$\boxed{1}\boxed{0}$	**1**
3	$\boxed{1}\boxed{1}$	**2**
4		
5		
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2	$\boxed{1}\boxed{0}$	**1**
3	$\boxed{1}\boxed{1}$	**2**
4	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$	**1**
5		
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2	$\boxed{1}\boxed{0}$	**1**
3	$\boxed{1}\boxed{1}$	**2**
4	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$	**1**
5	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$	**2**
6		
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	$\boxed{0}$	**0**
1	$\boxed{1}$	**1**
2	$\boxed{1}\boxed{0}$	**1**
3	$\boxed{1}\boxed{1}$	**2**
4	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$	**1**
5	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$	**2**
6	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}$	**2**
7		
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

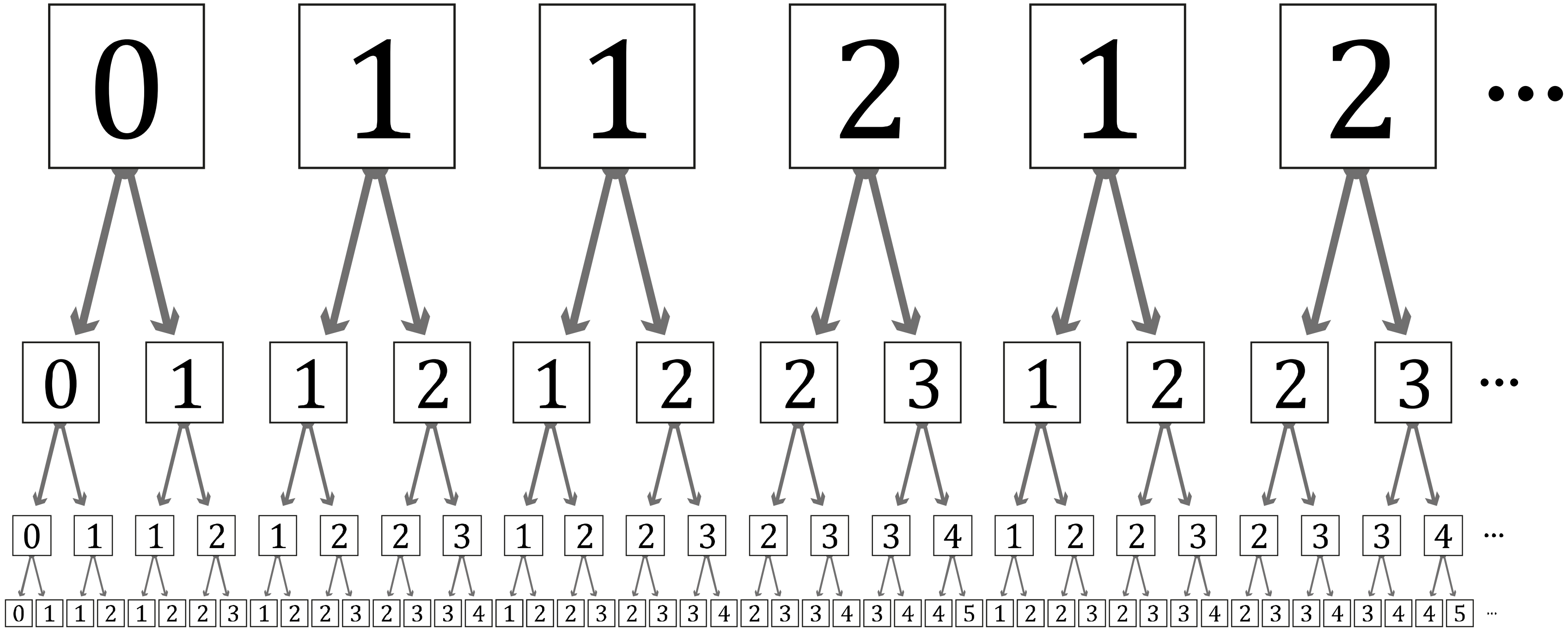
n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	0	**0**
1	1	**1**
2	1 0	**1**
3	1 1	**2**
4	1 0 0	**1**
5	1 0 1	**2**
6	1 1 0	**2**
7	1 1 1	**3**
8		

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

n	$(n)_2$	numero di $\boxed{1}$
0	0	**0**
1	1	**1**
2	10	**1**
3	11	**2**
4	100	**1**
5	101	**2**
6	110	**2**
7	111	**3**
8	1000	**1**

Notiamo che effettivamente il «numero di $\boxed{1}$» presenti nella rappresentazione binaria dei numeri naturali, genera i valori che abbiamo imparato a conoscere.

Vediamo se siamo in grado di ricavare le proprietà osservate nelle pagine precedenti:

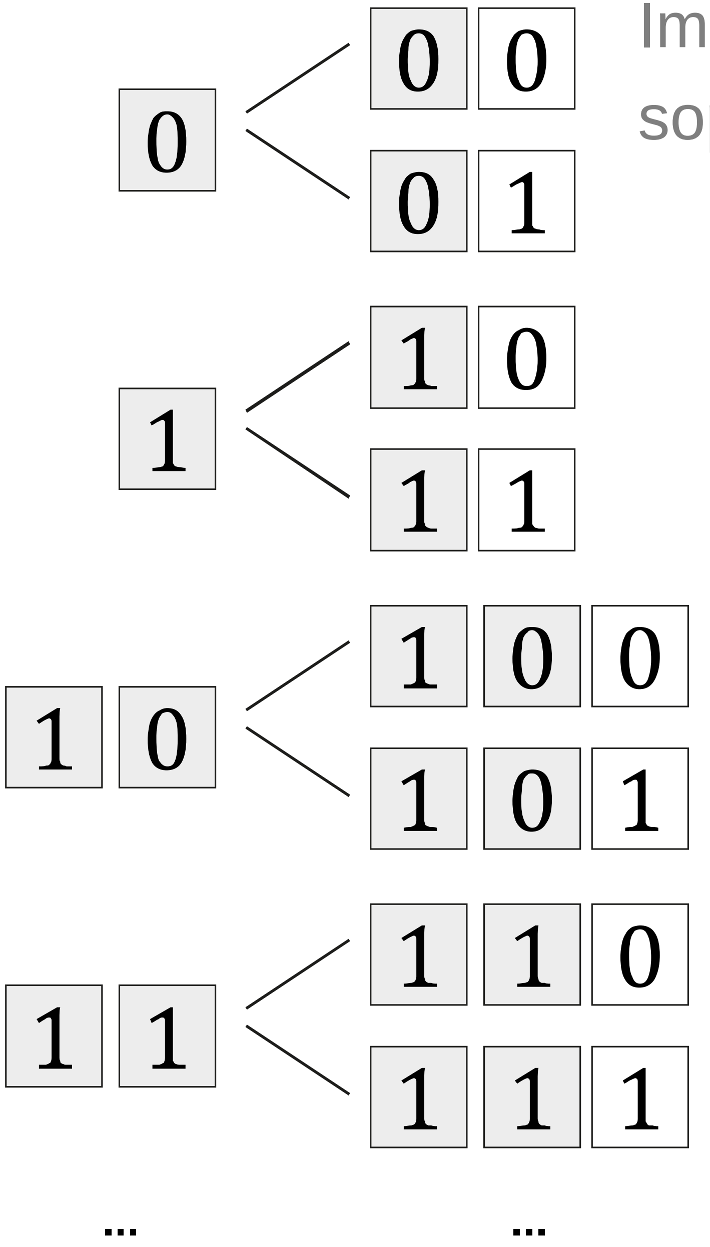


Dimostriamo innanzitutto che la *successione misteriosa* non cambia effettuando le sostituzioni $\boxed{n} \longmapsto \boxed{n}\,\boxed{n+1}$

Immaginiamo di scrivere in binario tutti i numeri naturali uno sopra l’altro, in ordine crescente

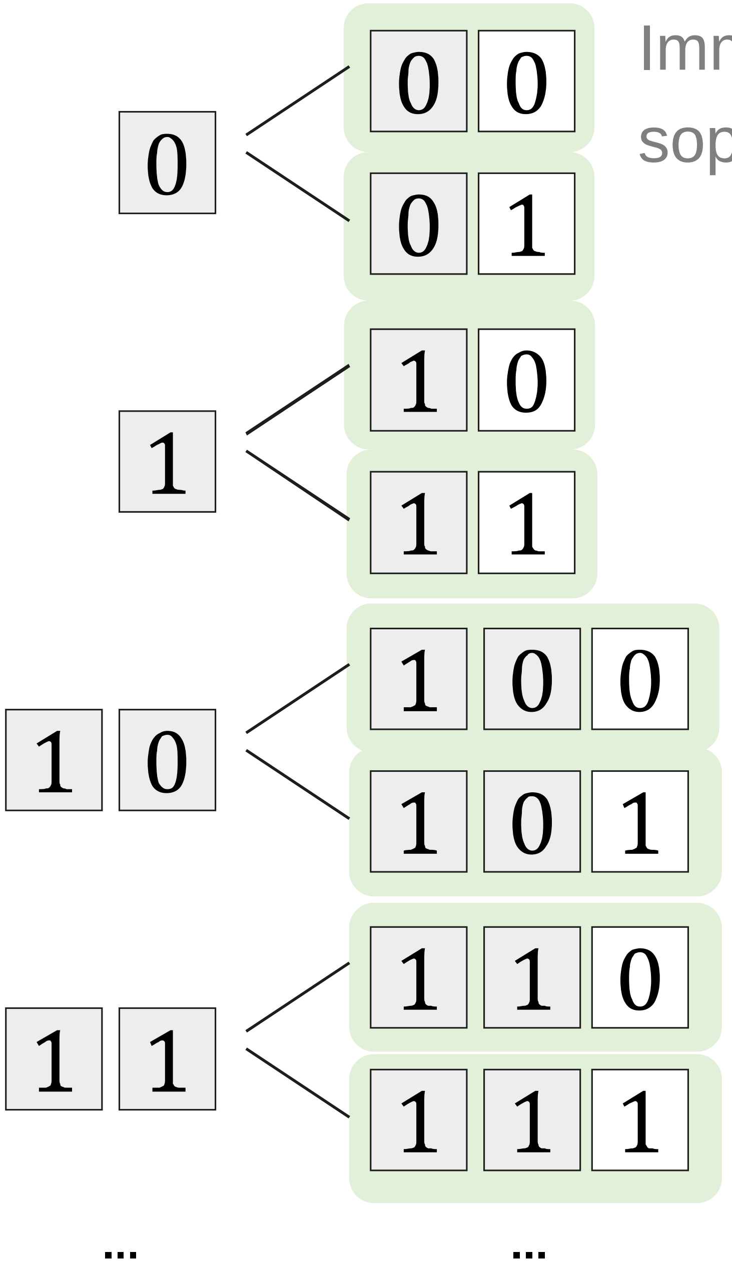
	0
	1
1	0
1	1

...



Immaginiamo di scrivere in binario tutti i numeri naturali uno sopra l'altro, in ordine crescente

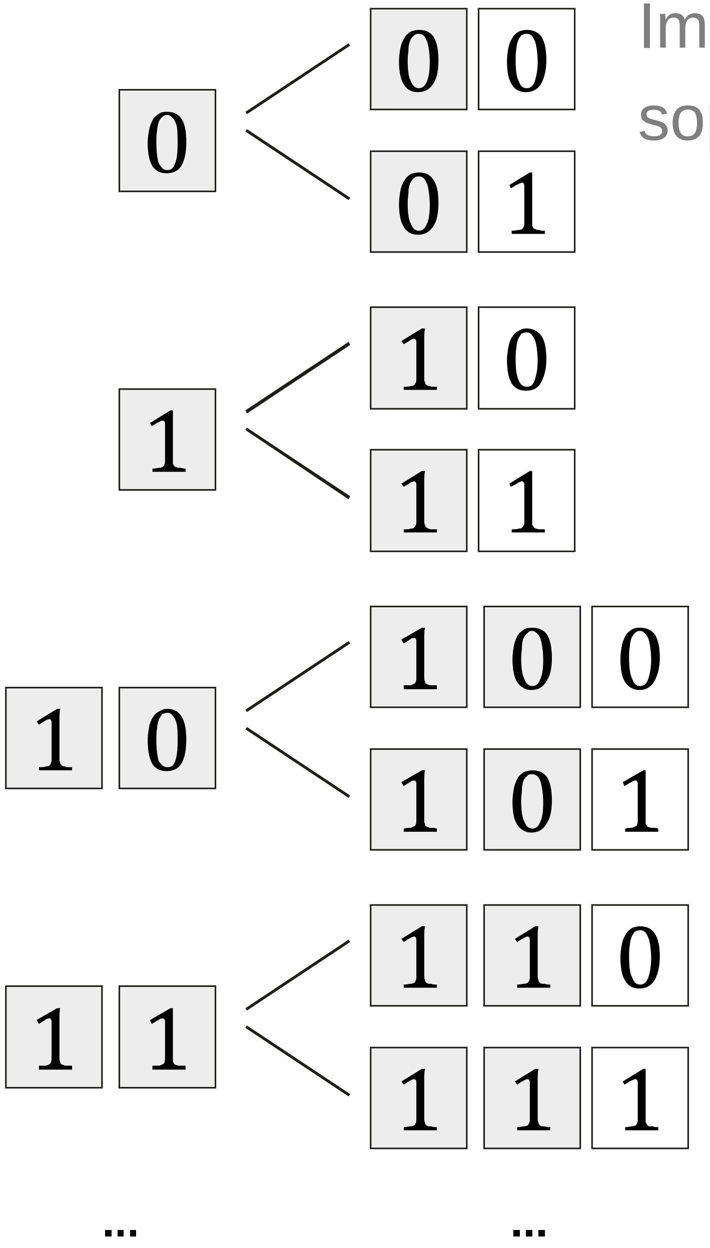
Aggiungiamo poi, «in coda ad ogni numero», le due possibili cifre, $\boxed{0}$ e $\boxed{1}$



Immaginiamo di scrivere in binario tutti i numeri naturali uno sopra l'altro, in ordine crescente

Aggiungiamo poi, «in coda ad ogni numero», le due possibili cifre, $\boxed{0}$ e $\boxed{1}$

L'elenco ottenuto a destra sarà di nuovo la sequenza crescente di tutti i numeri naturali.



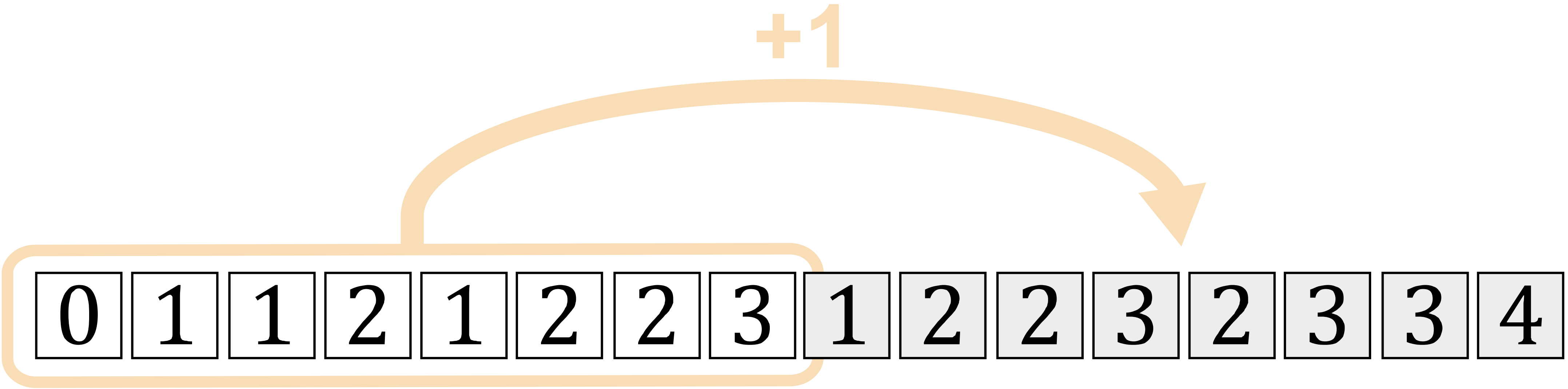
Immaginiamo di scrivere in binario tutti i numeri naturali uno sopra l’altro, in ordine crescente

Aggiungiamo poi, «in coda ad ogni numero», le due possibili cifre, $\boxed{0}$ e $\boxed{1}$

L’elenco ottenuto a destra sarà di nuovo la sequenza crescente di tutti i numeri naturali.

Nel contare il numero di cifre $\boxed{1}$ possiamo usare l’elenco di destra, che è generato «sdoppiando» ogni elemento dell’elenco di sinistra in due numeri, il primo dei quali ha lo stesso numero di $\boxed{1}$, e il secondo un $\boxed{1}$ in più. La sostituzione $\boxed{n} \longmapsto \boxed{n}\boxed{n+1}$ porta quindi $\boldsymbol{M}$ (conteggio di $\boxed{1}$ nella colonna di sinistra) in $\boldsymbol{M}$ (conteggio di $\boxed{1}$ nella colonna di destra).

Dimostriamo ora la «regola del raddoppio»



		0
		1
	1	0
	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

...

Scriviamo uno sopra l’altro (in ordine crescente) tutti i numeri che in binario hanno al più k cifre.

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

...

Scriviamo uno sopra l'altro (in ordine crescente) tutti i numeri che in binario hanno al più k cifre.

Senza influenzare il numero di $\boxed{1}$, possiamo anteporre degli zeri a pareggiare la lunghezza delle rappresentazioni.

	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

...

Scriviamo uno sopra l'altro (in ordine crescente) tutti i numeri che in binario hanno al più k cifre.

Senza influenzare il numero di $\boxed{1}$, possiamo anteporre degli zeri a pareggiare la lunghezza delle rappresentazioni.

Per allungare l'elenco ad una cifra in più, basterà «incollare» al vecchio elenco una sua copia con un $\boxed{1}$ davanti.

	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

...

Scriviamo uno sopra l'altro (in ordine crescente) tutti i numeri che in binario hanno al più k cifre.

Senza influenzare il numero di $\boxed{1}$, possiamo anteporre degli zeri a pareggiare la lunghezza delle rappresentazioni.

Per allungare l'elenco ad una cifra in più, basterà «incollare» al vecchio elenco una sua copia con un $\boxed{1}$ davanti.

Ogni elemento della prima metà ha ora, nella seconda metà, un compagno con un $\boxed{1}$ in più. Considerando il numero di $\boxed{1}$ dei numeri in elenco, abbiamo appena riprodotto la «regola del raddoppio» di $\boldsymbol{M}$.

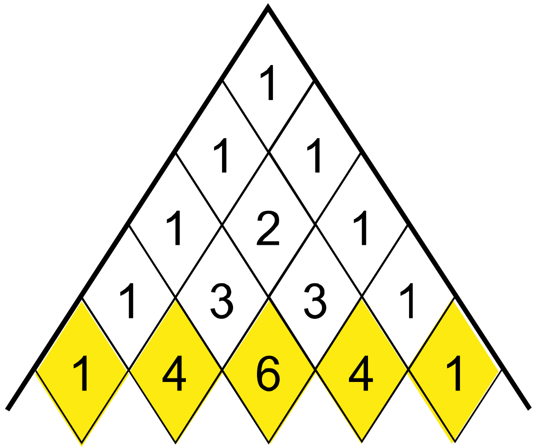
“**Quante volte…?**”… qualcosa…

Ci sono ancora delle questioni aperte…

Dovreste ora essere in grado (grazie a ragionamenti di Combinatoria) di derivare e dimostrare la regola generale per questo problema:

Indichiamo con S_k la parte della successione misteriosa che comprende tutti i numeri che precedono la prima occorrenza di $\boxed{k}$ e $\boxed{k}$ stesso.

In S_k, quante volte compaiono i numeri $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,… $\boxed{k-1}$?



Sempre con ragionamenti di Combinatoria, si può rispondere alla seguente questione:

In che posizione di $\boldsymbol{M}$ si trova la <u>seconda</u> occorrenza di $\boldsymbol{k}$?

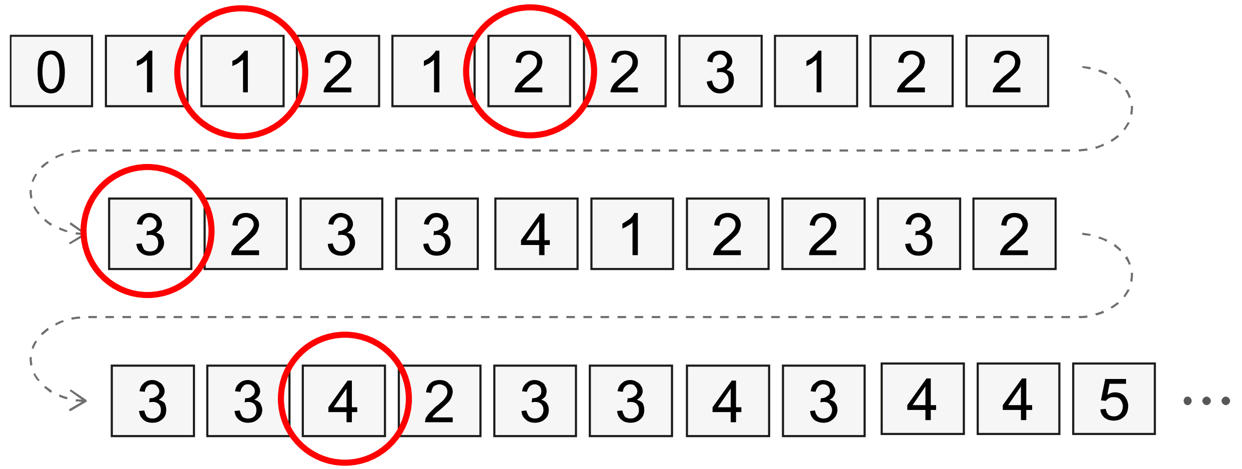
0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2

3 2 3 3 4 1 2 2 3 2

3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5 …

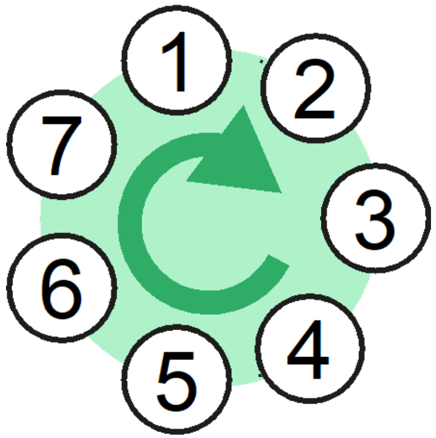
Sempre con ragionamenti di Combinatoria, si può rispondere alla seguente questione:

In che posizione di $\boldsymbol{M}$ si trova la <u>seconda</u> occorrenza di $\boldsymbol{k}$?



Piccolo aiuto: trovare la «prima» comparsa di un certo numero nella sequenza è molto semplice. A questo punto, cerca di capire il «salto» tra la prima e la seconda occorrenza (sempre ragionando in termini combinatori)

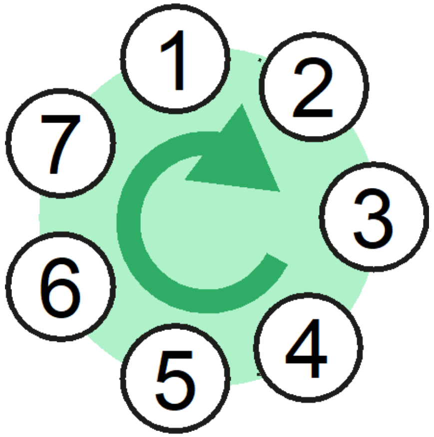
Che cosa c’entri il numero di $\boxed{1}$ con il problema di Giuseppe, lo si capisce iterando un numero sufficiente di volte $G(n)$.



Prendete un n qualsiasi e poi calcolate….

$$G(n)$$

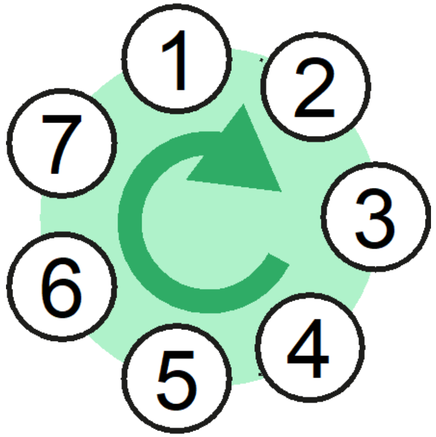
Che cosa c’entri il numero di $\boxed{1}$ con il problema di Giuseppe, lo si capisce iterando un numero sufficiente di volte $G(n)$.



Prendete un n qualsiasi e poi calcolate….

$$G\big(G(n)\big)$$

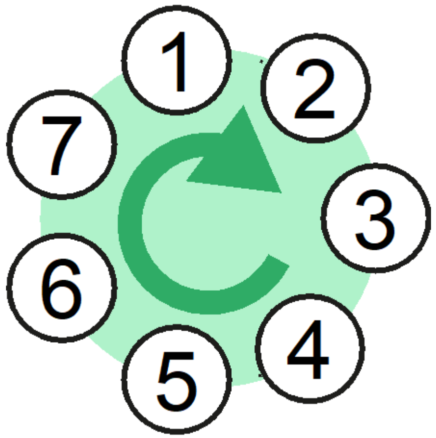
Che cosa c’entri il numero di $\boxed{1}$ con il problema di Giuseppe, lo si capisce iterando un numero sufficiente di volte $G(n)$.



Prendete un n qualsiasi e poi calcolate….

$$G\left(G\left(G\left(n\right)\right)\right)$$

Che cosa c’entri il numero di $\boxed{1}$ con il problema di Giuseppe, lo si capisce iterando un numero sufficiente di volte $G(n)$.



Prendete un n qualsiasi e poi calcolate….

$$e\ così\ via\ \ldots$$

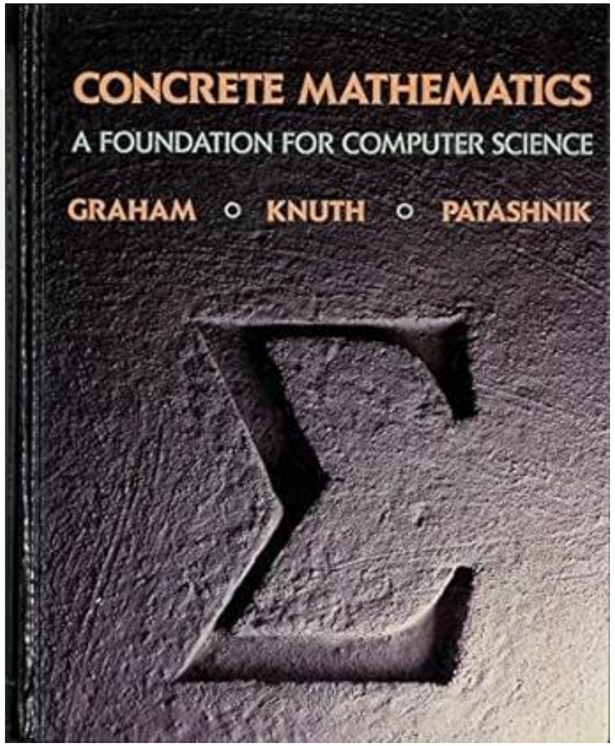
Su che valori si cristallizzano queste iterazioni?

0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3
	0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3
		0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2
			0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3
				0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2
					0	1	1	2	1	2	2	3	1	2
						0	1	1	2	1	2	2	3	1
							0	1	1	2	1	2	2	3
								0	1	1	2	1	2	2
									0	1	1	2	1	2
										0	1	1	2	2
											0	1	1	1
												0	1	1
													0	1
														0

Giocare con $\boldsymbol{M}$, osservando regolarità, congetturando proprietà e dimostrandole rigorosamente, è un ottima attività da «laboratorio matematico» (*a fianco una proprietà che gli studenti potrebbero osservare*)

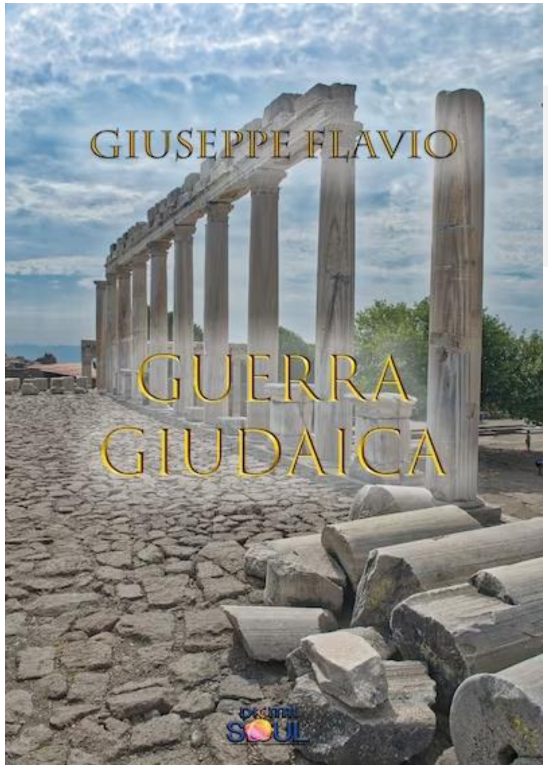
Bibliografia relativa al «problema di Giuseppe»

Parte matematica



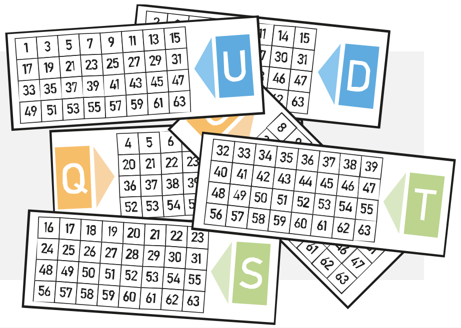
Graham, Knuth, Patashnik, CONCRETE MATHEMATICS, Addison Wesley, 2018 (XXXII ediz.)

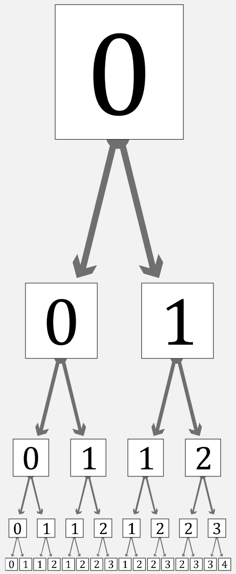
Parte storica



Giuseppe Flavio, GUERRA GIUDAICA (tradotto dal greco), S.E.A. 2018

«Indovina il numero» è stato più volte citato ai seminari dell'Università Sapienza ed è un gioco binario classico.

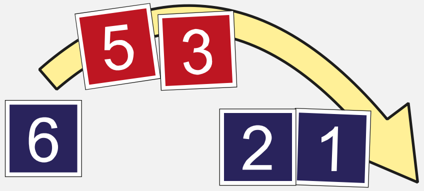




«La sequenza misteriosa» compare in testi dedicati alle **sequenze autosimili** e ai frattali. Più famosa (e facile da trovare in letteratura) è la «misteriosa» sottoposta a modulo 2, detta ***successione di Thue-Morse*** (↓)

0 1 1 0 1 0 0 1 …

Per quanto ne so, il gioco «In fondo alla fila!» è stato inventato soltanto da me, per cui non esistono testi che si possano consultare.



Vi ringrazio per l'attenzione

Alex Saltuari
Liceo Majorana, Roma