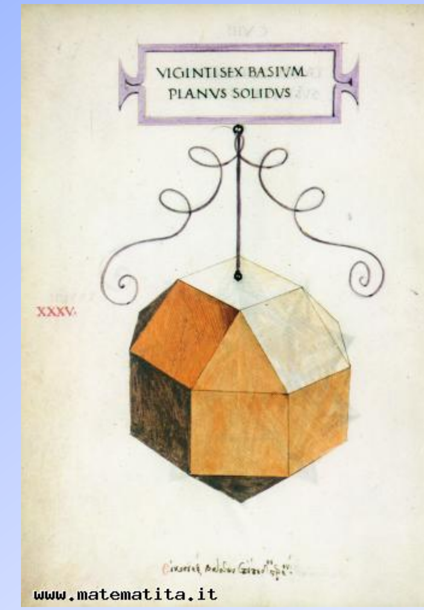
Insegnare la Geometria: qualche esempio

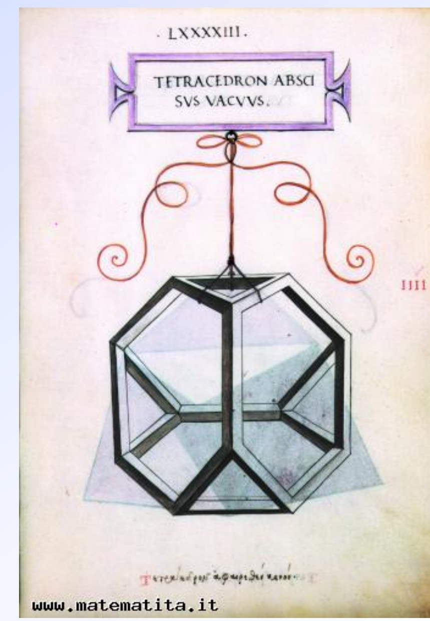
Convegno *Matematica in classe*
Centro *Pristem,* Genova, ottobre 2015
M. Dedò

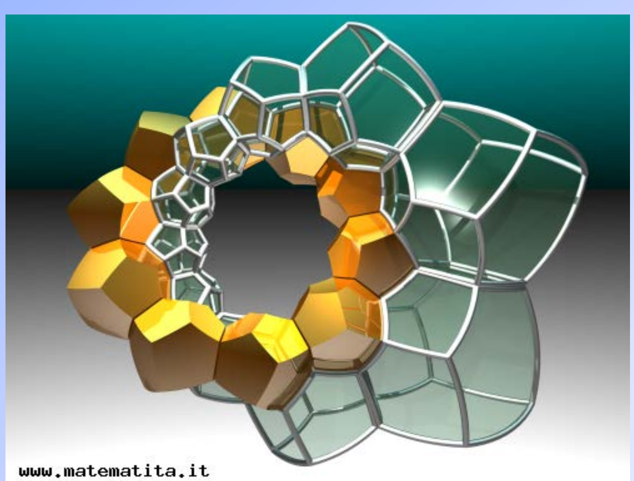
matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Domande

- che cos’è la geometria?
- quale geometria pensiamo per la scuola?
- quali cose sono irrinunciabili e di quali si può fare a meno?
- dimostrazioni: quali, come e perché?
- definizioni: quali, come e perché?
- geometria solida / geometria piana
- geometria analitica / geometria sintetica
- geometria delle trasformazioni
- geometria euclidea / non euclidea
- …





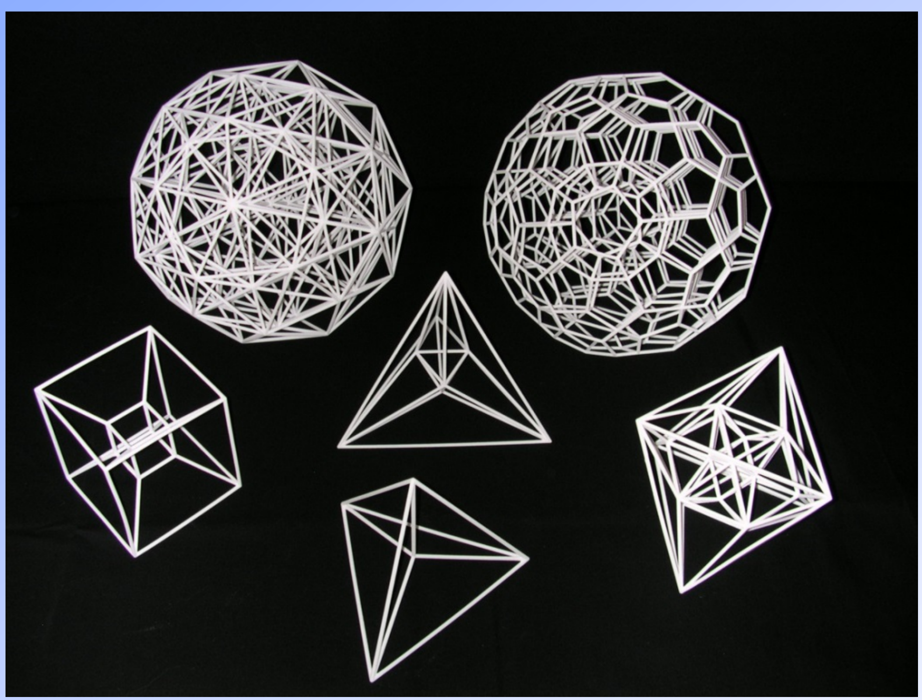


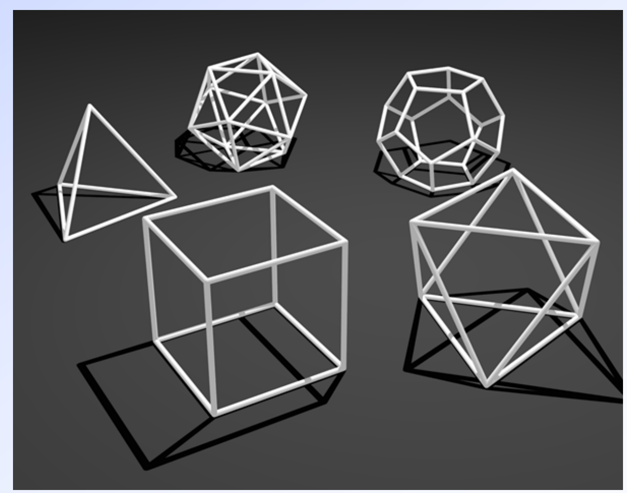
matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l’apprendimento informale
della matematica

Che cos’è la geometria?

Geometry is perhaps the most elementary of the sciences that enable man, by purely intellectual processes, to make predictions (based on observation) about ***physical world.*** *The power of geometry, in the sense of accuracy and utility of these deductions, is impressive, and has been a powerful motivation for the study of* ***logic in geometry****.*

H.S.M. Coxeter (1907-2003)





Quale geometria pensiamo per la scuola?

Arnold: lamenta una (deleteria!) ’’degeometrisation’’ nell’educazione matematica (riferendosi all’insegnamento universitario, in Francia). Un’aggiunta che vale anche per l’insegnamento pre-universitario: non si tratta solo di tagli, ma (soprattutto) di geometria che non viene trattata da geometria…

Un problema standard in una scuola americana: l’ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 10 cm e l’altezza relativa all’ipotenusa di 6 cm; trovare l’area del triangolo. Gli studenti hanno affrontato questo problema per più di un decennio (trovando 30 cm^2 come risposta). Ma gli studenti russi arrivati da Mosca non sono riusciti a risolverlo come i loro colleghi americani. Perché?

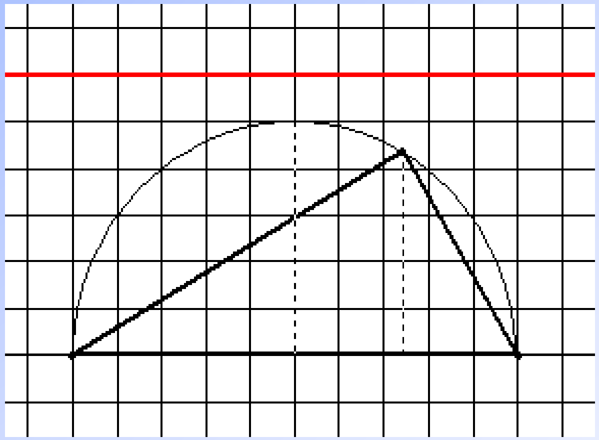
Da V.I. Arnold, *Problems for children from 5 to 15*
http://imaginary.org/

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Quale geometria pensiamo per la scuola?

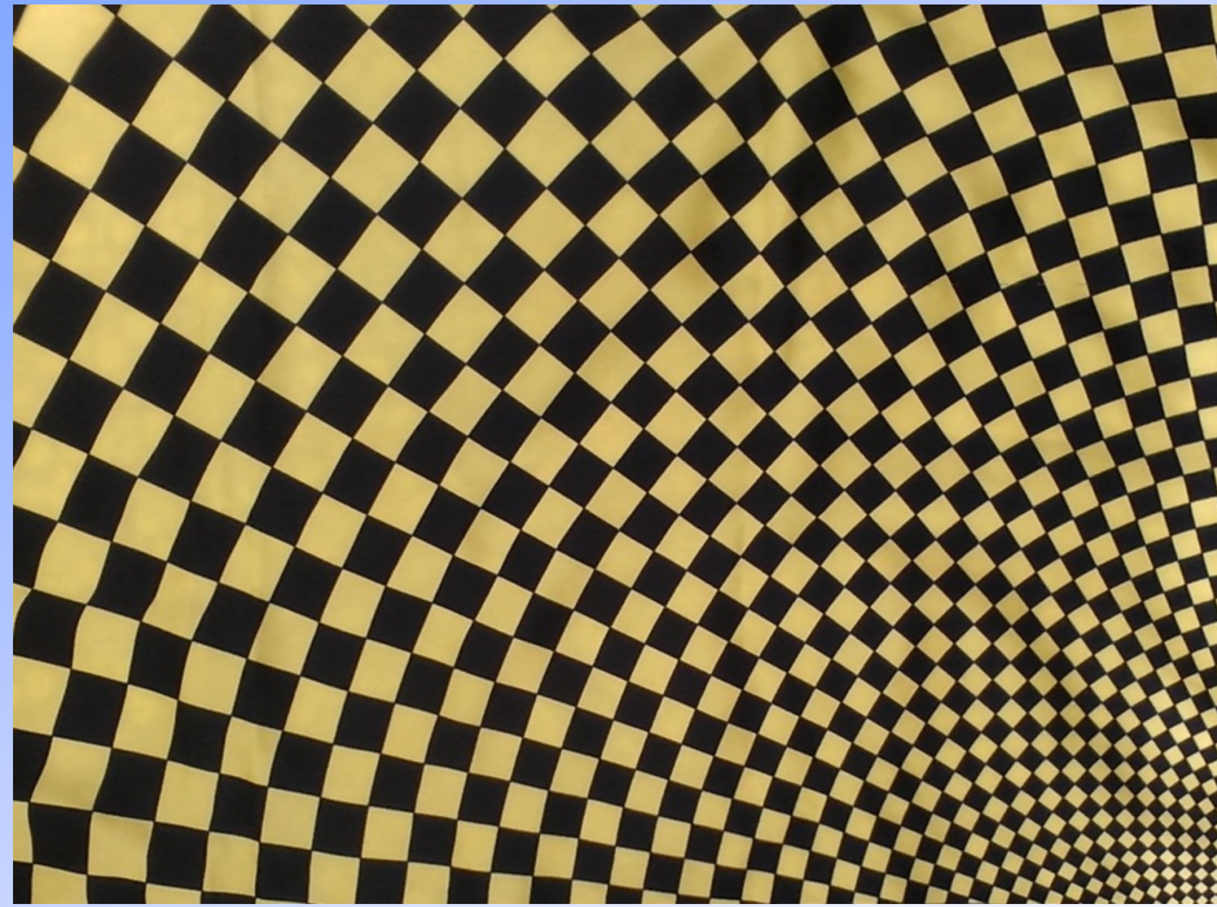
Arnold: lamenta una (deleteria!) ’’degeometrisation’’ nell’educazione matematica (riferendosi all’insegnamento universitario, in Francia). Un’aggiunta che vale anche per l’insegnamento pre-universitario: non si tratta solo di tagli, ma (soprattutto) di geometria che non viene trattata da geometria…

Un problema standard in una scuola americana: l’ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 10 cm e l’altezza relativa all’ipotenusa di 6 cm; trovare l’area del triangolo. Gli studenti hanno affrontato questo problema per più di un decennio (trovando 30 cm^2 come risposta). Ma gli studenti russi arrivati da Mosca non sono riusciti a risolverlo come i loro colleghi americani. Perché?



Da V.I. Arnold, *Problems for children from 5 to 15*
http://imaginary.org/

Quale geometria pensiamo per la scuola?



… noi pensiamo in termini geometrici e buona parte della matematica è espressa con linguaggio geometrico. L'intuizione geometrica guida i nostri pensieri e suggerisce nuovi risultati. …

*… **Noi usiamo la geometria soprattutto come modo di pensare.** Dipendiamo in modo determinante dal senso della vista e siamo capaci di trasformare spunti importanti in "diagrammi geometrici". Ci sono altri modi importanti di pensare: pensare per assiomi, per algoritmi, in termini combinatorici, in termini statistici.*

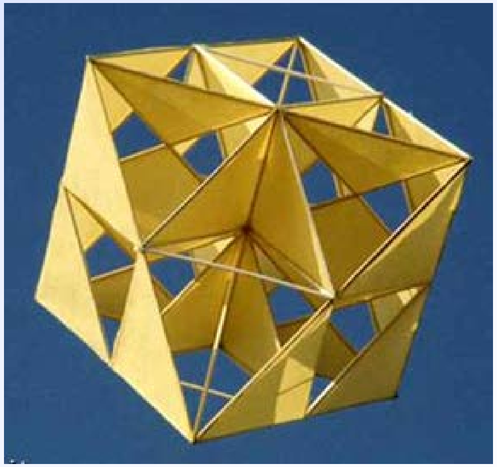
Engel (1861-1941)

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Pensare in termini geometrici significa:

- osservare
- misurare
- classificare
- rappresentare
- argomentare

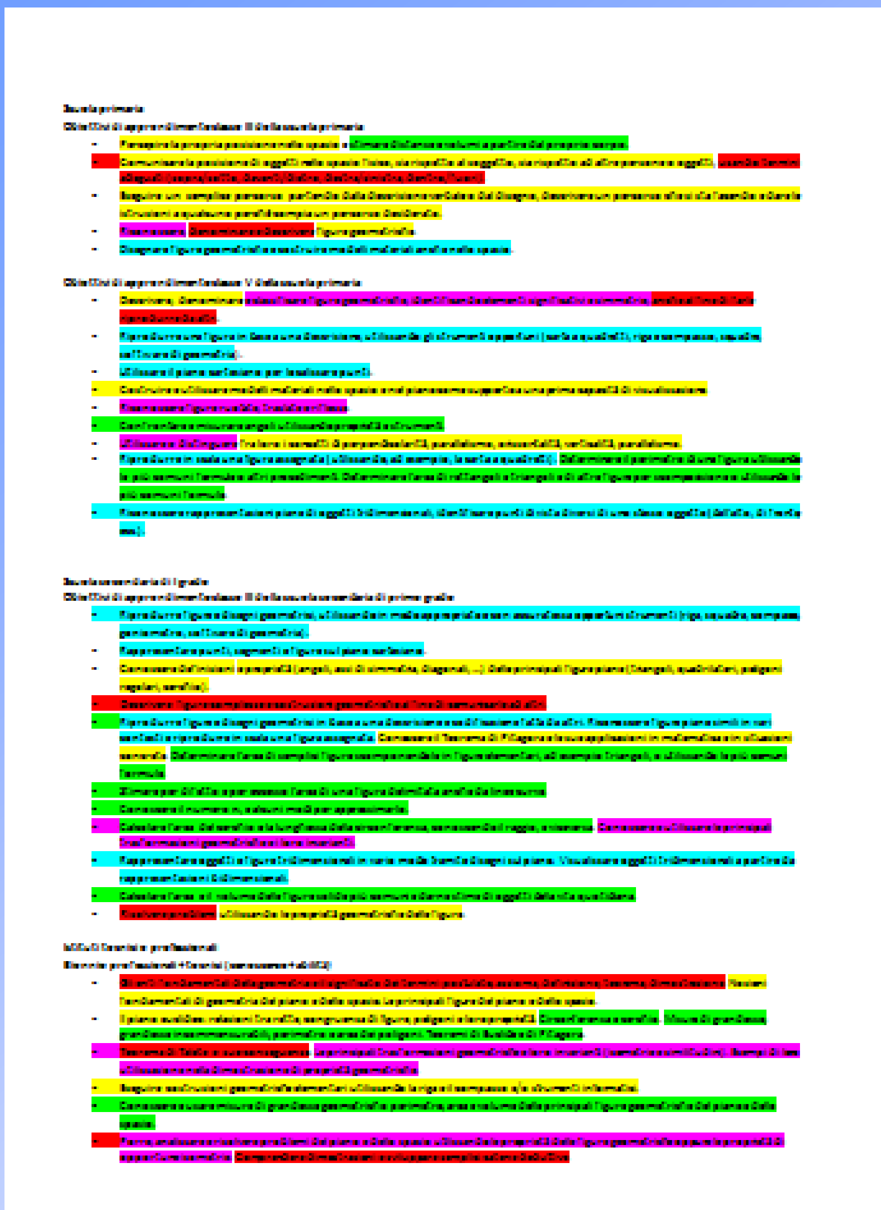
Sono operazioni che facciamo comunque, magari inconsapevolmente. Imparare la geometria significa (anche) acquisire strumenti per farle in maniera più consapevole.

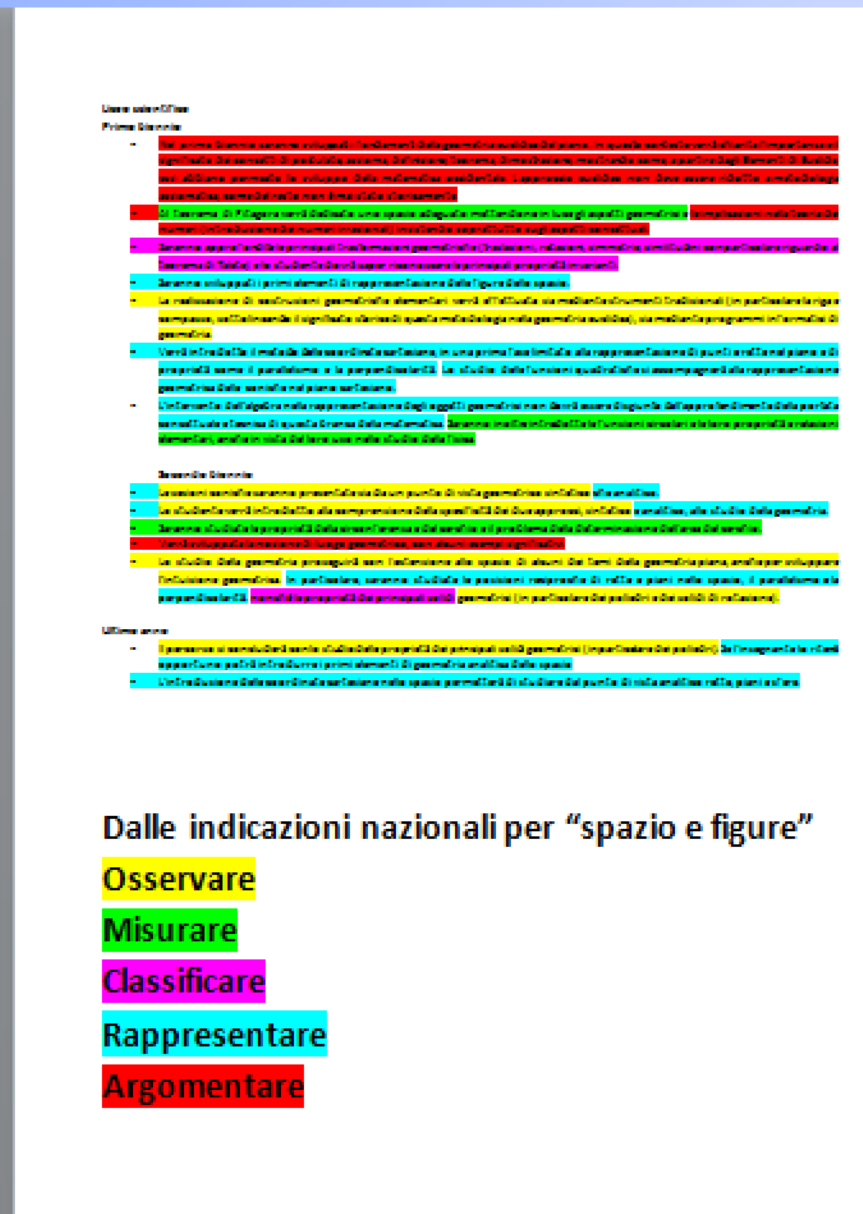


matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Dalle indicazioni nazionali (per la geometria)

Tutti i contenuti citati possono essere etichettati sotto (almeno) una delle 5 voci *Osservare Misurare Classificare Rappresentare Argomentare*





matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Nel seguito: alcuni esempi per rispondere alla domanda: quali cose sono irrinunciabili e di quali si può fare a meno? In che senso diciamo che sono irrinunciabili le **idee**.

Un esempio: geometria solida / geometria piana

Osservare fatti geometrici è cosa diversa dal costruire un impianto assiomatico!

La geometria solida negli ultimi anni è stata molto trascurata.
I risultati si vedono. Ed è un gran peccato…!

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

La geometria solida può essere un'occasione per

• osservazione della realtà

• individuazione della matematica nascosta nella vita quotidiana

• manipolazione e sperimentazione con oggetti concreti

• attività di laboratorio

• geometria combinatorica (contare… Eulero… topologia… grafi… modelli…)

• … e anche dimostrazioni: si devono dimostrare le cose difficili, non quelle facili!

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Dimostrazioni: quali, come e perché?

Un *assioma*:
Raccontare una dimostrazione, o chiedere che i ragazzi ripetano una dimostrazione, **non serve assolutamente a nulla**, se non si è prima creata una situazione per cui i ragazzi sentano **l'esigenza** che qualcosa **debba** essere dimostrato!
Devono essere loro a chiedersi ***Perché?***

Alcuni *corollar*i:
- non ha senso la costruzione assiomatica dell'intero edificio della geometria euclidea (*prima* che i ragazzi abbiano la maturità sufficiente per apprezzarlo);
- ha senso darne un'idea del significato (matematico e storico);
- ha senso chiedere sempre (a partire dalla scuola primaria!) una giustificazione: *perché?*
- ha senso proporre dimostrazioni ''locali''

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Meglio dimostrare cose **difficili** e soprattutto **inaspettate.**

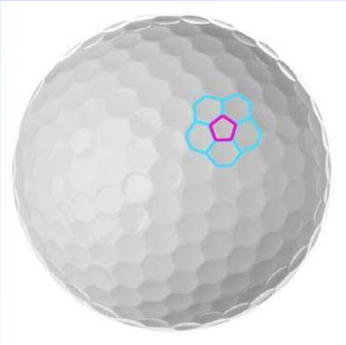
Un esempio: pallone da calcio

Piuttosto che:

Teorema *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.*

Meglio:

Teorema *In qualunque poliedro* ***come*** *il pallone da calcio (****cioè****: le facce sono solo pentagoni e esagoni e in ogni vertice ne arrivano esattamente tre) il numero dei pentagoni è sempre 12.*



matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

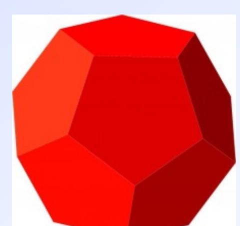
$F = P+E$

$3V = 2S$

$V-S+F = 2$

$5P+6E = 2S$

NB Per qualunque intero *k*, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e *k* esagoni.



$k = 0$

$k = 20$

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

$F = P+E$

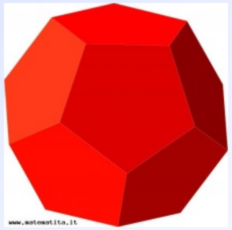
$3V = 2S$

$6P+6E = 6F$

$V-S+F = 2$

$5P+6E = 2S$

NB Per qualunque intero *k*, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e *k* esagoni.



$k = 0$

$k = 20$

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

$F = P+E$

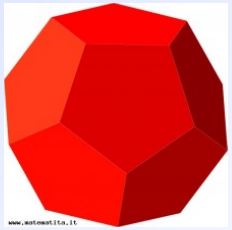
$3V = 2S$

$6P+6E = 6F = 6S-6V+12$

$V-S+F = 2$

$5P+6E = 2S$

NB Per qualunque intero *k*, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e *k* esagoni.



$k = 0$

$k = 20$

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

$F = P+E$

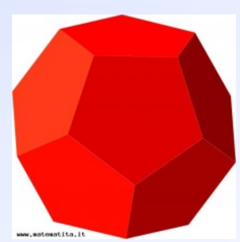
$3V = 2S$

$6P+6E = 6F = 6S-6V+12 = 2S+12$

$V-S+F = 2$

$5P+6E = 2S$

NB Per qualunque intero *k*, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e *k* esagoni.



$k = 0$

$k = 20$

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

$F = P + E$

$3V = 2S$

$6P+6E = 6F = 6S-6V+12 = 2S+12$

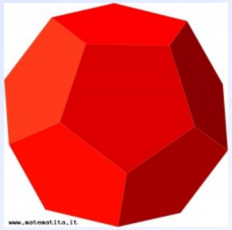
$V-S+F = 2$

$6P+6E = 2S+12$

$5P+6E = 2S$

$P = 12$

NB Per qualunque intero *k*, diverso da 1, esiste un poliedro di questo tipo con 12 pentagoni e *k* esagoni.



$k = 0$

$k = 20$

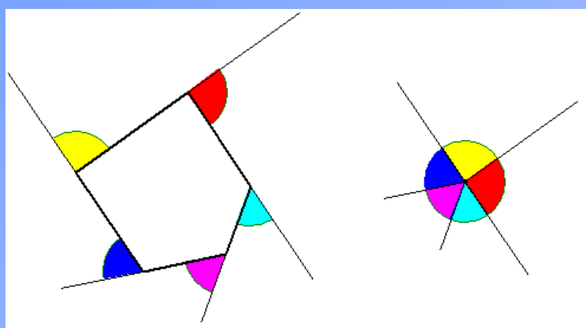
La somma degli angoli di un triangolo è scontata quasi come gli angoli alla base del triangolo isoscele, **PERÒ** è diverso se:

- si osserva che con un software di geometria dinamica si può anche trovare 179° o 181°…
- si scopre che su un triangolo sferico la somma degli angoli si comporta in maniera diversa…
- si lega la somma degli angoli **esterni** a una pista di bicicletta… e quindi alla curvatura… e quindi… Eulero… e quindi…

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Un esempio: il teorema degli angoli esterni

$\Delta(v)$ = angolo esterno in v =
= 180° - (angolo del poligono in v) =
= difetto angolare del poligono nel vertice v.



Teorema. *Se Δ è il difetto angolare totale del poligono (cioè la somma di tutti i difetti angolari in tutti i vertici), allora* Δ = 2Pi.

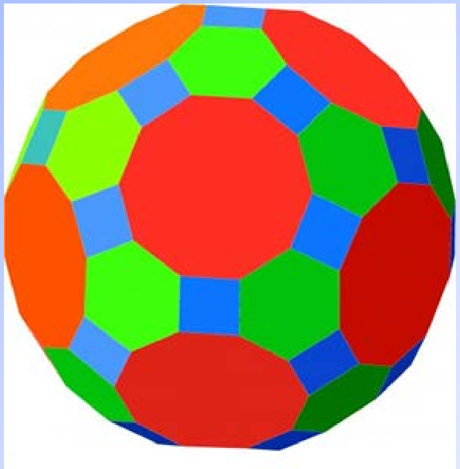
Dimostrazione. La pista di biciclette.

$\Delta(v)$ = difetto angolare di un poliedro in un vertice v =
= quanto è ’’appuntito’’ il poliedro nel vertice v =
= 360° - (somma degli angoli delle facce che arrivano in v).

Δ = difetto angolare totale del poliedro = somma dei Δ(v).

Teorema *Il difetto angolare totale di un poliedro è 2Pi per il suo numero di Eulero. In particolare, vale 4Pi per i poliedri semplicemente connessi.*

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

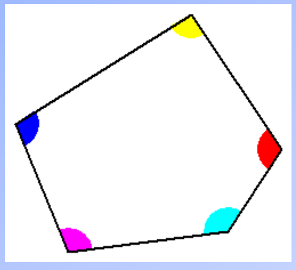


L'**idea** della dimostrazione è semplice.
Si attaccano delle etichette:
+ 2*Pi* a ogni faccia - 2*Pi* a ogni spigolo + 2*Pi* a ogni vertice.
La somma di tutte le etichette vale:

2*Pi* x (V-S+F).

Strategia: spostare le etichette, lasciandone invariata la somma, finché ''si vede'' che la somma rappresenta il difetto angolare del poliedro.

Passo 1 Si tolgono le etichette dagli spigoli, distribuendo un etichetta –*Pi* a ciascuna delle due facce adiacenti a quello spigolo.
Alla fine, l'etichetta di una faccia di *n* lati è diventata 2*Pi* - *Pi*… - □ = (2-*n*)*Pi*.



Passo 2 Si tolgono le etichette (2-*n*)*Pi* da ciascuna faccia e si distribuiscono sui vertici. (*n*-2)*Pi* è la somma degli angoli di quella faccia, quindi si attribuisce a ciascun vertice l'opposto della misura dell'angolo corrispondente.

La somma delle etichette non è cambiata. Spigoli e facce non hanno più etichette. Ogni vertice ha come etichetta il suo difetto angolare.

Un esempio: gli angoli.

Su molti libri (di scuola media) si trovano:

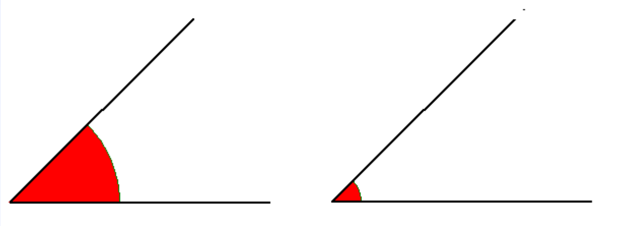
- pagine e pagine di calcoli con gradi primi secondi
- insistenza (ossessione?) per la terminologia (complementari, esplementari, coniugati interni, alterni esterni,…).

Ma queste non sono le idee!

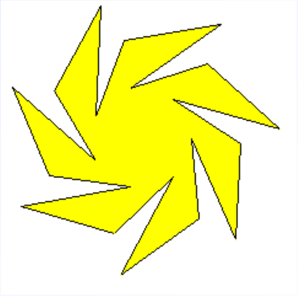
Che cos'è un angolo? Come si misura un angolo?

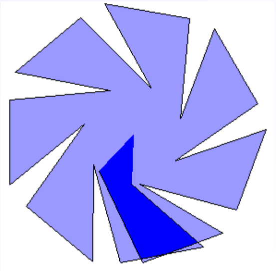
È un concetto profondo, e non facile.

Ed è in contrasto con l'uso della parola nella vita quotidiana.

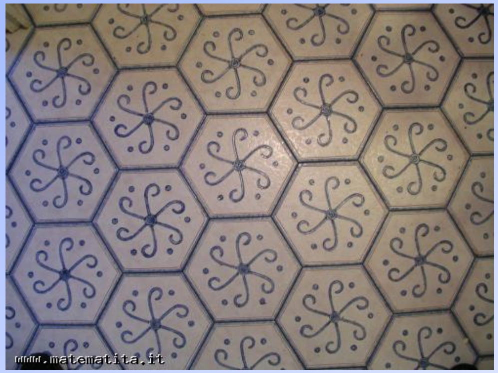


- Cosa vuol dire ''essere in un angolo''?
- Angoli grossi e angoli piccoli.
- Sommare due angoli.
- 3 giri e mezzo è la stessa cosa di mezzo giro?
- Angoli ''belli'' e angoli ''brutti'': 51,428571428571…° = 360°/7 è molto ''bello''!





Sono irrinunciabili le idee!

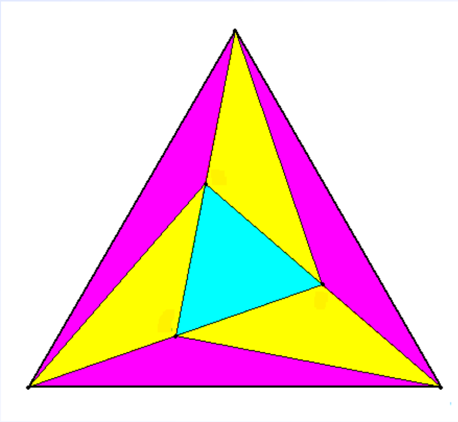


Misura non vuol dire solo equivalenze o formule (magari distinguendo dirette e inverse).

Si può ragionare su **che cosa vuol dire misurare**.
E i pavimenti delle cucine (nei libri di scuola) non possono avere sempre un numero intero di piastrelle, nemmeno alla scuola primaria!

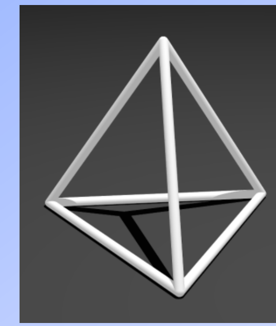
Si possono imparare a ’’leggere’’ le formule.
Si possono costruire problemi su volume area e perimetro **senza** formule.

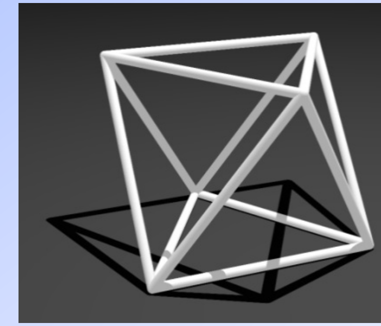
La **simmetria**: una maniera di interpretazione della realtà, e una ’’scorciatoia’’ che mette in ordine il ragionamento e semplifica tante giustificazioni.



Non solo formule

Un esempio *Trovare il rapporto fra i volumi di un ottaedro e di un tetraedro regolari di uguale spigolo.*





Facendo i conti:

L'ottaedro è una doppia piramide a base quadrata di lato *s*, e altezza $h = s\sqrt{2}/2$

$$Vol(O) = (2s^3\sqrt{2}/2)/3 = s^3\sqrt{2}/3$$

Il tetraedro è una piramide che ha per base un triangolo equilatero di lato *s*, e altezza $h = s\sqrt{6}/3$

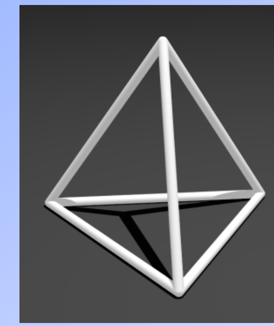
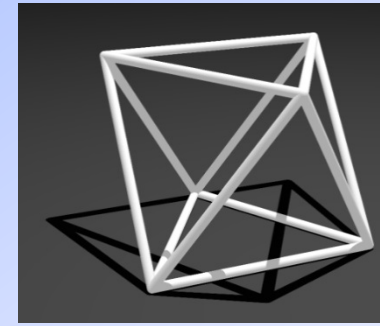
$$Vol(T) = s^3(\sqrt{3}/4)(\sqrt{6}/9) = s^3\sqrt{2}/12$$

$$\frac{Vol(O)}{Vol(T)} = 4$$

matematita

Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Non solo formule

Un esempio *Trovare il rapporto fra i volumi di un ottaedro e di un tetraedro regolari di uguale spigolo.*

Facendo i conti:
L’ottaedro è una doppia piramide a base quadrata di lato *s*,
e altezza $h = s\sqrt{2}/2$

$$Vol(O) = (2s^3\sqrt{2}/2)/3 = s^3\sqrt{2}/3 \sim 0{,}471\, s^3$$

Il tetraedro è una piramide che ha per base
un triangolo equilatero di lato *s*, e altezza $h = s\sqrt{6}/3$

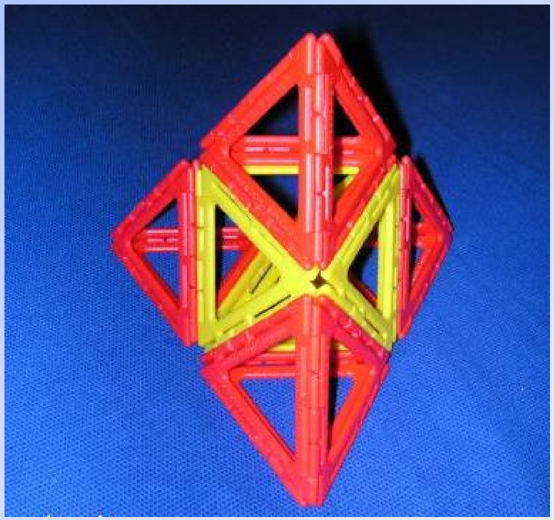
$$Vol(T) = s^3(\sqrt{3}/4)(\sqrt{6}/9) = s^3\sqrt{2}/12 \quad \sim 0{,}117 s^3$$

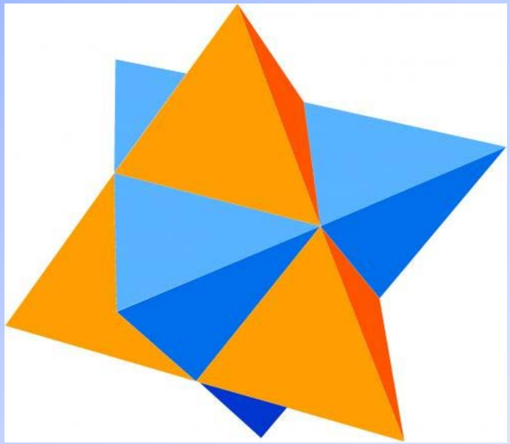
$$\frac{Vol(O)}{Vol(T)} = 4 \qquad \text{oppure} \quad \frac{Vol(O)}{Vol(T)} = 4{,}025$$

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l’apprendimento informale
della matematica

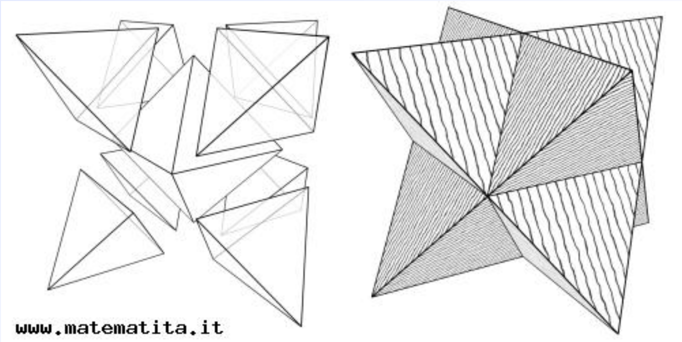
Se si *guarda* (con occhi geometrici…) non c'è bisogno di conti!

- I punti medi degli spigoli di un tetraedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare (*perché?* **Simmetria!**).
- Si può decomporre un tetraedro *T'* di lato 2*s* in un ottaedro *O* di lato *s* e quattro tetraedri *T* di lato *s*.

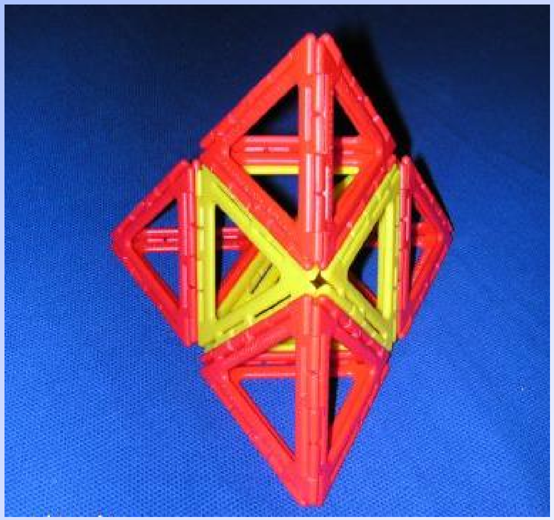




E poi se ne può mettere insieme due…



Se si *guarda* (con occhi geometrici…) non c'è bisogno di conti!



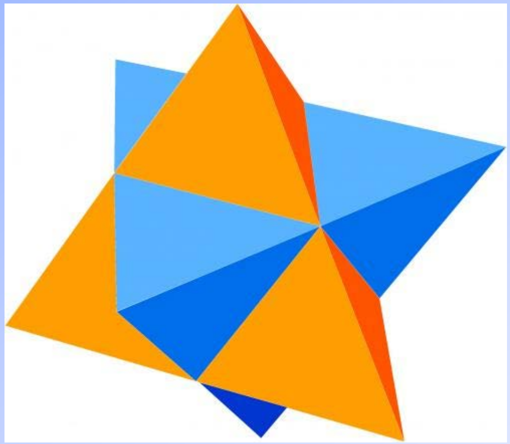
- I punti medi degli spigoli di un tetraedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare (*perché?* **Simmetria!**).
- Si può decomporre un tetraedro T' di lato $2s$ in un ottaedro O di lato s e quattro tetraedri T di lato s.

$$\mathrm{Vol}(T') = 4\mathrm{Vol}(T)+\mathrm{Vol}(O)$$

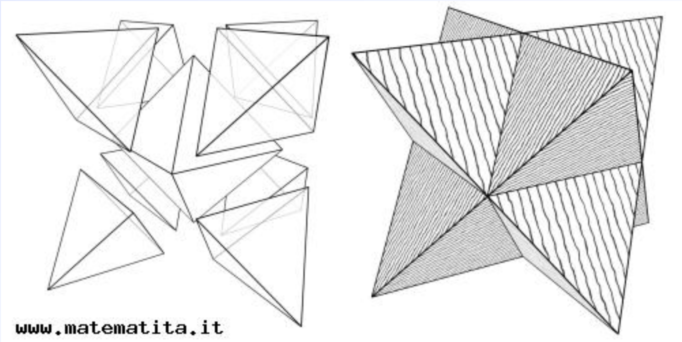
$$8\mathrm{Vol}(T) = 4\mathrm{Vol}(T)+\mathrm{Vol}(O)$$

$$\mathrm{Vol}(O) = 4\mathrm{Vol}(T)$$

E si trova il valore esatto 4, non il valore approssimato 4,025…



E poi se ne può mettere insieme due…



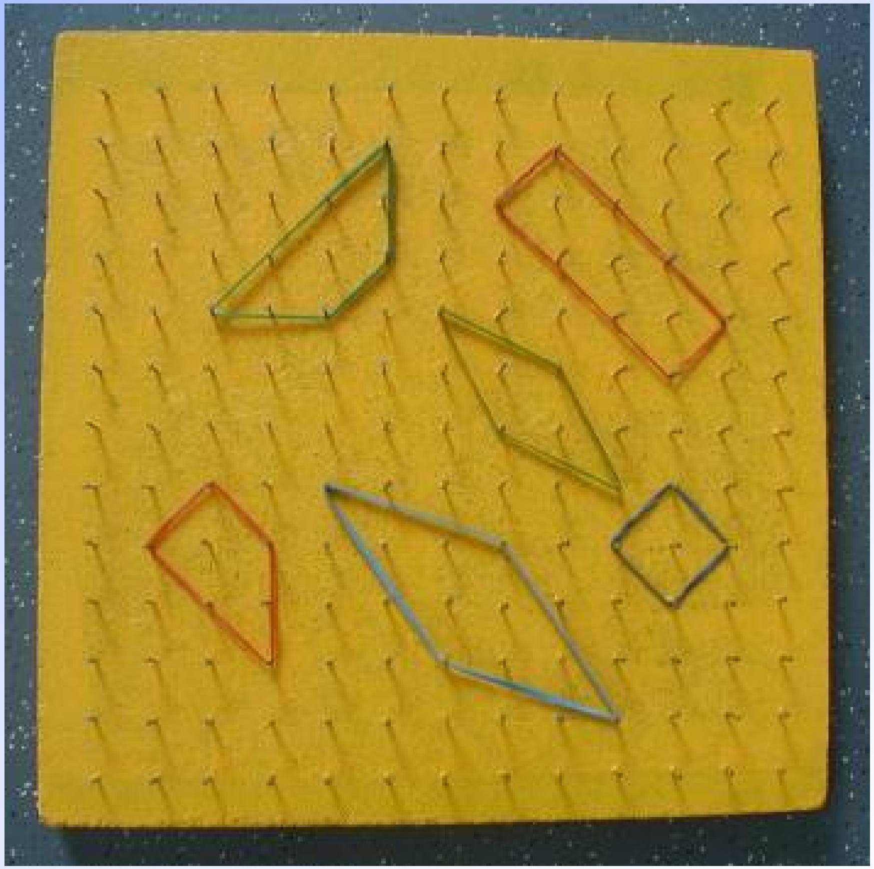
matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Geometria analitica o geometria sintetica?

La geometria analitica è una bellissima idea, e ci mette a disposizione uno strumento con cui fare delle cose che prima non si era in grado di fare.

Però:
la geometria analitica **non ha senso** se la si riduce a tecnica di esercizi ripetitivi

- di cui non si vede il significato;
- che magari si sapevano fare (forse meglio!) senza questo strumento;
- che incoraggiano un automatismo pericoloso.

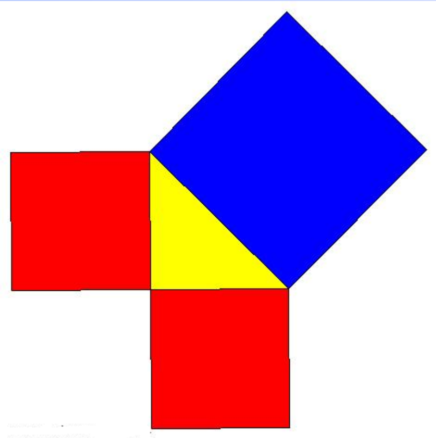


matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

Geometria analitica o geometria sintetica?

Le rotazioni hanno **SEMPRE** centro nell'origine.
I vertici dei poligoni hanno **SEMPRE** coordinate intere.
Le riflessioni sono **SEMPRE** rispetto agli assi.

NO!!



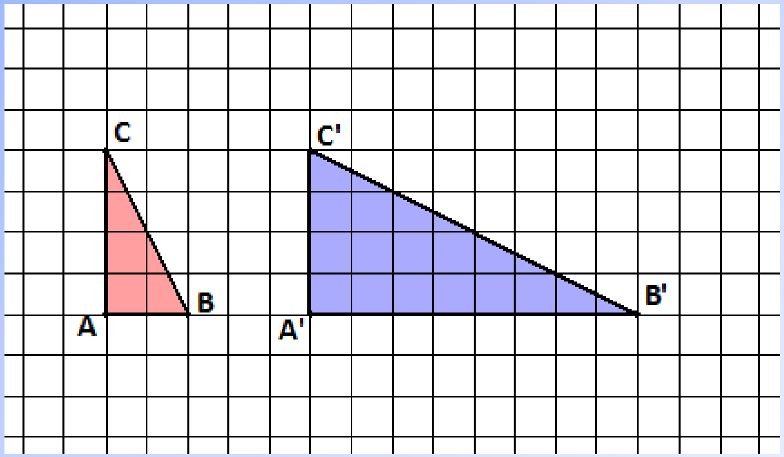
Un punto è un punto, e non **è** una coppia (o una terna) di numeri reali.
Dimostrare un isomorfismo tra la retta (il piano, lo spazio…) e i numeri reali (le coppie, le terne…), significa riconoscere in due situazioni **diverse** la stessa struttura.
Saltare questo passaggio non significa semplificare l'apprendimento, ma solo rinunciare a priori al ''pensare in termini geometrici''.

Definizioni: quali, come e perché?

Non ha senso impuntarsi sulla ripetizione pedissequa di una frase, prima che i ragazzi abbiano chiari i motivi per cui la frase deve contenere certe precisazioni.

Ha senso la continua attenzione al linguaggio, alla costruzione di un linguaggio rigoroso e alla costruzione di situazioni che possano portare i ragazzi a percepirne l'esigenza.

Un esempio: che cos'è la similitudine?



La similitudine non sono solo i triangoli simili e una definizione ''recitata'' della quale non si ha il controllo.

Due triangoli sono simili se hanno gli angoli ***corrispondenti*** *uguali.*

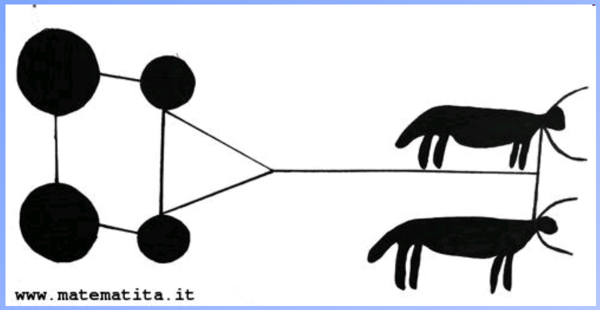
Che cosa significa ''corrispondenti''?

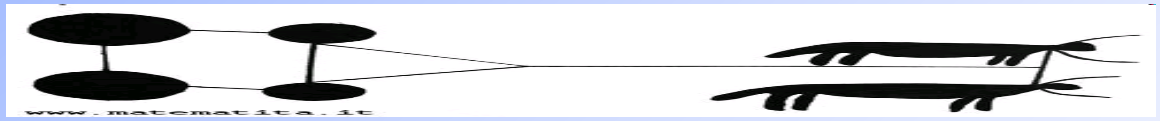
matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica

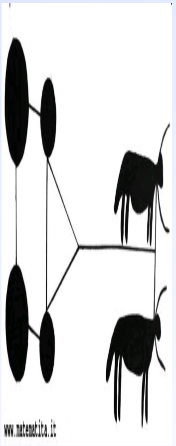
Un esempio: che cos'è la "forma"?

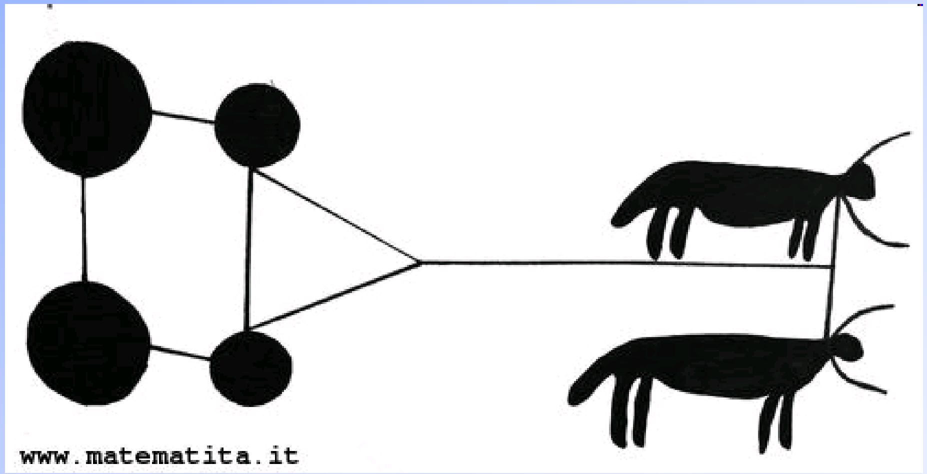
i ragazzi sembrano non collegare la nozione di similitudine al fatto di "avere la stessa forma".

C'è una cesura tra formale e informale!

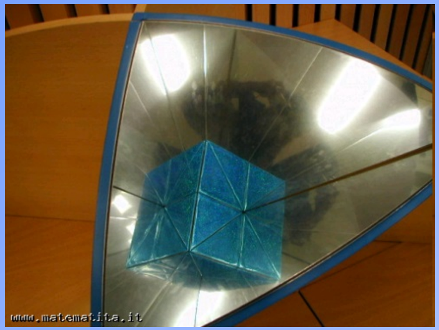






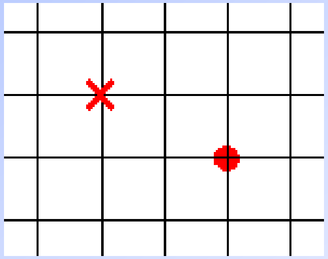
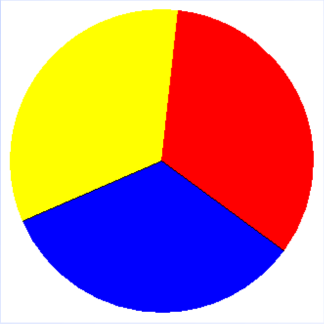
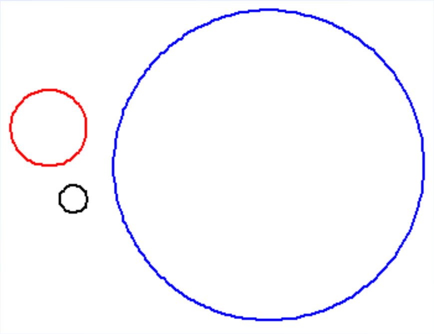
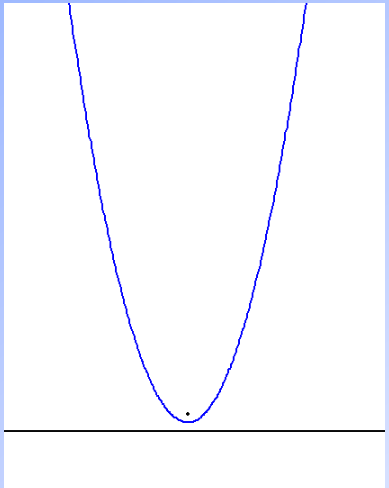
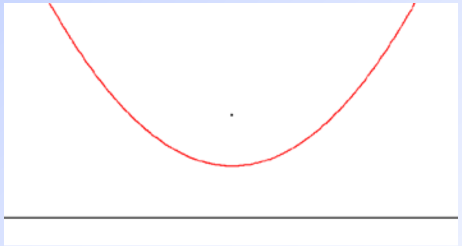
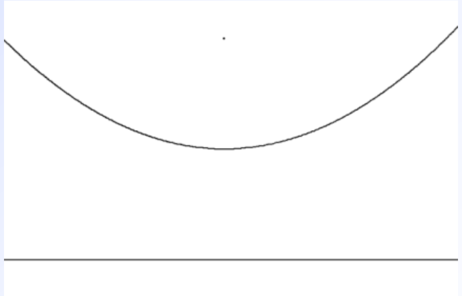


Cercare legami con la "realtà" significa anche recuperare e sfruttare le cose che i ragazzi **già sanno fare** (magari anche meglio di noi!).

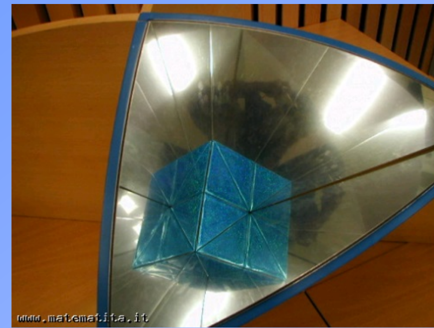




Ci sono anche le idee (e sono irrinunciabili!)

- aree e volumi
- il punto
- parabole e circonferenze
- ...

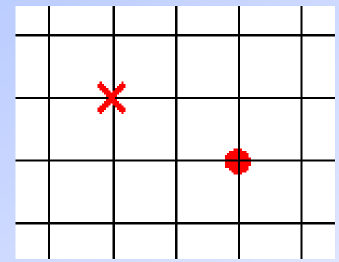







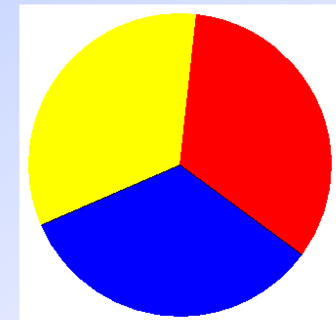
matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

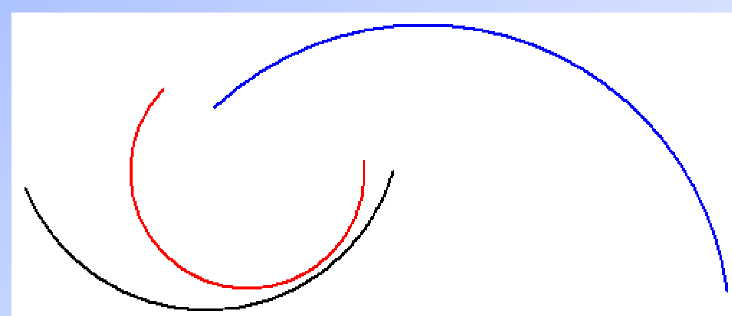


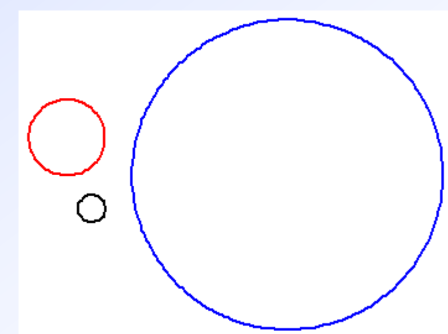
Ci sono anche le idee (e sono irrinunciabili!)

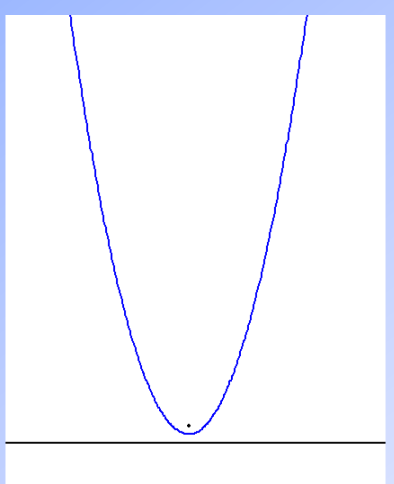
- aree e volumi
- il punto
- parabole e circonferenze
- ...

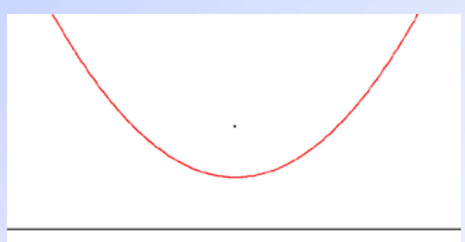


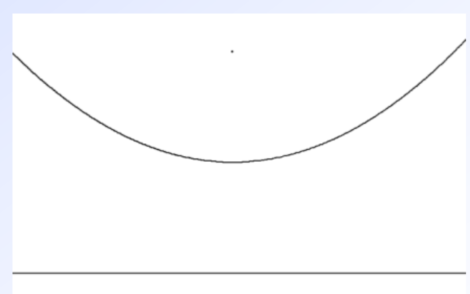












matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Come?

La Matematica presentata in forma ***rifinita*** *sembra puramente dimostrativa, fatta solo da dimostrazioni. Eppure la matematica* ***nel suo farsi*** *assomiglia ad ogni altra attività umana. Si deve indovinare il teorema prima di poterlo dimostrare, si deve avere un'idea della dimostrazione prima di poterla sviluppare nei dettagli. Si devono combinare osservazioni e seguire analogie: e provare e riprovare.*

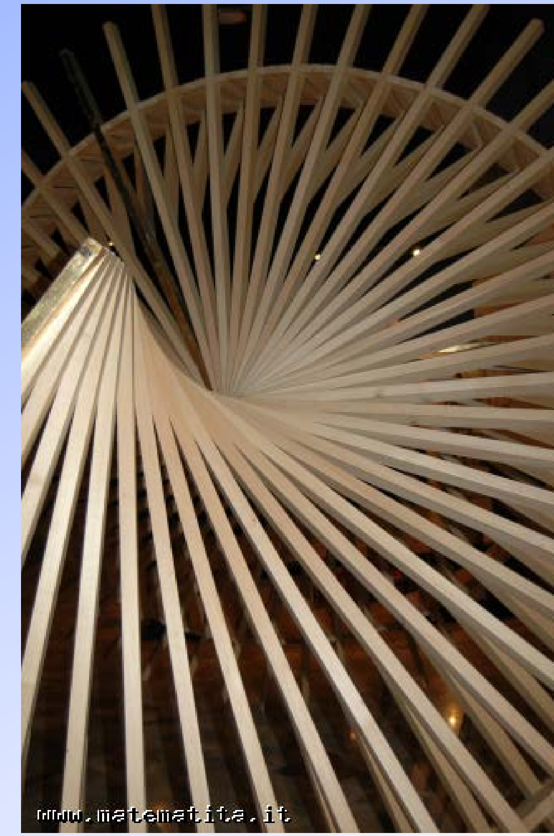
(G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*)

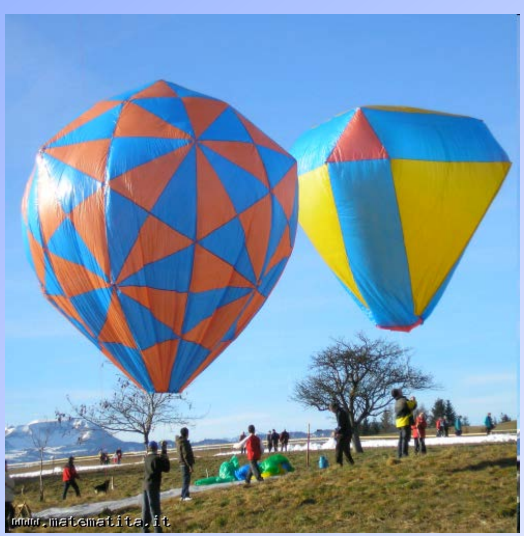
matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

Come?

La Matematica presentata in forma ***rifinita*** *sembra puramente dimostrativa, fatta solo da dimostrazioni. Eppure la matematica* ***nel suo farsi*** *assomiglia ad ogni altra attività umana. Si deve indovinare il teorema prima di poterlo dimostrare, si deve avere un'idea della dimostrazione prima di poterla sviluppare nei dettagli. Si devono combinare osservazioni e seguire analogie: e provare e riprovare.*

(G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*)





Grazie dell'attenzione!

matematita
Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica