TEORIA DEI GIOCHI
Parte 4

Matematica nella realtà – Università Bocconi

Roberto Lucchetti - Politecnico di Milano

11 Febbraio 2011

Giochi cooperativi

Esempio 1

Emanuele suona la chitarra il sabato sera in un bar del paese e viene pagato 75 Euro. Martina canta in un piano-bar vicino per un compenso di 100 Euro a sera. Alberto suona il piano in una birreria, e viene pagato 50 Euro a sera. Un nuovo locale propone a Martina ed Alberto di esibirsi assieme per 200 Euro. Martina fa una controproposta, per coinvolgere Emanuele. Il proprietario accetta proponendo un compenso complessivo di 300 Euro. Che faranno i ragazzi, e come suddivideranno i guadagni?

Esempio 2.

Un antiquario possiede un quadro, due collezionisti vogliono acquistarlo. Uno è disposto a pagare di più per il quadro, ma anche l’altro è in grado di fare un'offerta interessante. Il quadro è venduto? A chi? E per quanto?

Esempio 3

Roberto, un papà piuttosto maligno, propone ai suoi tre figli un premio di 1000 Euro a quello dei tre che verrà designato a maggioranza come beneficiario dell'assegno. I figli possono, in caso di accordo, suddividere il premio tra loro. Che faranno i figli?

Esempio 4

Quattro persone si ritrovano con dei guanti spaiati, e devono cercare di farne delle coppie, perché una mano calda ed una fredda non interessa nessuno. Il signor A possiede **1** guanto destro, il signor B **2** guanti destri, i signori C e D **1** guanto sinistro **ciascuno**. Come suddividersi i guanti?

Esempio 5

Il consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da 15 membri: 5 sono permanenti, ed hanno diritto di veto, gli altri 10 sono a rotazione. Per prendere una decisione sono necessari almeno 9 vo favorevoli, tra cui devono ovviamente esserci i 5 con diritto di veto. Quanto peso effettivo hanno i vari membri al momento di prendere delle decisioni?

Esempio 6

La società Casin.com ha tre creditori ed è dichiarata in bancarotta, in quanto il capitale che ha a disposizione non è in grado di sanare tutti i debiti contratti. Il capitale infatti ammonta a 100, mentre i debiti sono di 70, 50, e 40 rispettivamente. Come suddividere in modo equo i 100 tra i tre creditori?

Esempio 7

Due venditori, Alf e Fia, che hanno lo stesso modello di auto in vendita, devono cercare di convincere il potenziale cliente Andrea a comperare l'auto presso di loro. Chi ci guadagnerà in questa situazione?

Esempio 8

Due persone, il signor Paperone ed il signor Paperino, devono suddividersi una vincita alla lotteria di 1.000.000 di Euro. Paperone è ricco, e si può ipotizzare che, se gli si assegna una cifra x, il suo grado di soddisfazione sia $u(x)=x$. Paperino invece è molto meno ricco, e la sua utilità è $v(x)=\ln(1+x)$. Siamo sicuri che dividere la vincita in parti uguali sia la cosa più giusta da fare?

Esempio 9

L'aeroporto di Erehwon deve costruire una nuova pista di atterraggio perché le compagnie aeree A,B,C hanno deciso di fare scalo, con un aereo ciascuna, in città. A ha bisogno di una pista lunga 1 km, il cui costo è c_1, B ha bisogno di una pista lunga 2 km, il cui costo è c_2, infine C ha bisogno di una pista lunga 3 km, il cui costo è c_3.

Ovviamente $c_1 < c_2 < c_3$. ma anche, ad esempio $c_3 < 3\, c_1$

Come ripartire i costi di costruzione della pista sulle tre compagnie?

Gioco cooperativo

•Un gioco cooperativo a utilità trasferibile è una funzione

$$v : 2^N \rightarrow R$$

tale che $v(\Phi)=0$.

2^N è l'insieme dei sottoinsiemi di N, che rappresenta l'insieme dei giocatori.

Esempio $N=\{1,2,3\}$

$\{\Phi\}\{1\}\{2\}\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{N\}$

N.B. L'esempio 8, pur rappresentando una situazione cooperativa, non rientra nello schema precedente (utilità non trasferibili). Nel caso a due persone si può applicare il modello di contrattazione di Nash

Esempio 1

Emanuele suona la chitarra il sabato sera in un bar del paese e viene pagato 75 Euro. Martina canta in un piano-bar vicino per un compenso di 100 Euro a sera. Alberto suona il piano in una birreria, e viene pagato 50 Euro a sera. Un nuovo locale propone a Martina ed Alberto di esibirsi assieme per 200 Euro. Martina fa una controproposta, per coinvolgere Emanuele. Il proprietario accetta proponendo un compenso complessivo di 300 Euro. Che faranno i ragazzi, e come suddivideranno i guadagni?

$$v(\{E\}) = 75, v(\{M\}) = 100, v(\{A\}) = 50,$$

$$v(\{E, M\}) = 0, v(\{E, A\}) = 0, v(\{M, A\}) = 200, v(\{E, M, A\}) = 300$$

Esempio 2.

Un antiquario (G) possiede un quadro, due collezionisti (B,R) vogliono acquistarlo. Uno è disposto a pagare di più per il quadro, ma anche l’altro è in grado di fare un'offerta interessante. Il quadro è venduto? A chi? E per quanto?

$$v(\{G\}) = a, v(\{B\}) = v(\{R\}) = v(\{B, R\}) = 0$$

$$v(\{G, R\}) = b, v(\{G, B\}) = v(\{G, B, R\}) = c.$$

Esempio 3

Roberto, un papà piuttosto maligno, propone ai suoi tre figli un premio di 1000 Euro a quello dei tre che verrà designato a maggioranza come beneficiario dell'assegno. I figli possono, in caso di accordo, suddividere il premio tra loro. Che faranno i figli?

$$v(A) = 0 \; se|A| \leq 1, v(A) = 1 \; se|A| \geq 2$$

$|A|$ indica il numero di elementi dell'insieme A

Esempio 9

L'aeroporto di Erehwon deve costruire una nuova pista di atterraggio perché le compagnie aeree A,B,C hanno deciso di fare scalo, con un aereo ciascuna, in città. A ha bisogno di una pista lunga 1 km, il cui costo è c_1, B ha bisogno di una pista lunga 2 km, il cui costo è c_2, infine C ha bisogno di una pista lunga 3 km, il cui costo è c_3.

Come ripartire i costi di costruzione della pista sulle tre compagnie?

$$v(\{1\}) = c_1, v(\{2\}) = c_2, v(\{3\}) = c_3, v(\{1,2\}) = c_2,$$

$$v(\{1,3\}) = c_3, v(\{2,3\}) = c_3, v(\{N\}) = c_3.$$

Che cosa significa trovare una soluzione di un gioco?

Assegnare una quantità a ogni giocatore, che significa l'utilità (o il costo) che riceve nel gioco:

se i giocatori sono 1,2,…,*n*, si ha un vettore

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Imputazioni

Proprietà minimale per una soluzione:

1. $x_i \geq v(\{i\})$ per ogni i;

2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

1. *x* deve dare a ognuno almeno quanto è in grado di ottenere da solo;
2. *x* deve essere possibile e efficiente

Come è fatto l'insieme delle imputazioni di un gioco?

Caso (poco interessante) N={1,2}

$$v(1) = a, v(2) = b, v(N) = c$$

$$x = (x_1, x_2) : x_1 \geq a, x_2 \geq b, x_1 + x_2 = c$$

Si tratta di una retta, "ristretta" da due condizioni, quindi un segmento

•Come è fatto l'insieme delle imputazioni di un gioco?

•Caso *N*={1,2,3}

$$v(1) = a, v(2) = b, v(3) \geq c, \ldots v(N) = d$$

$$x = \left(x_1, x_2, x_3\right) : x_1 \geq a, x_2 \geq b, x_3 \geq c, x_1 + x_2 + x_3 = d$$

•Si tratta di un piano, "ristretto" da tre condizioni, quindi triangolo

Che imputazioni conviene considerare?

Richiesta ragionevole:

Nessuna coalizione deve essere insoddisfatta: per ogni coalizione *A*:

$$\sum_{i \in A} x_i \geq v(A)$$

Cioè: quanto dato globalmente ($\sum_{i \in A} x_i$)

alla coalizione non deve essere meno di quel che è in grado di procurarsi da sola ($v(A)$).

Nucleo

Si chiama nucleo del gioco *v* l'insieme:

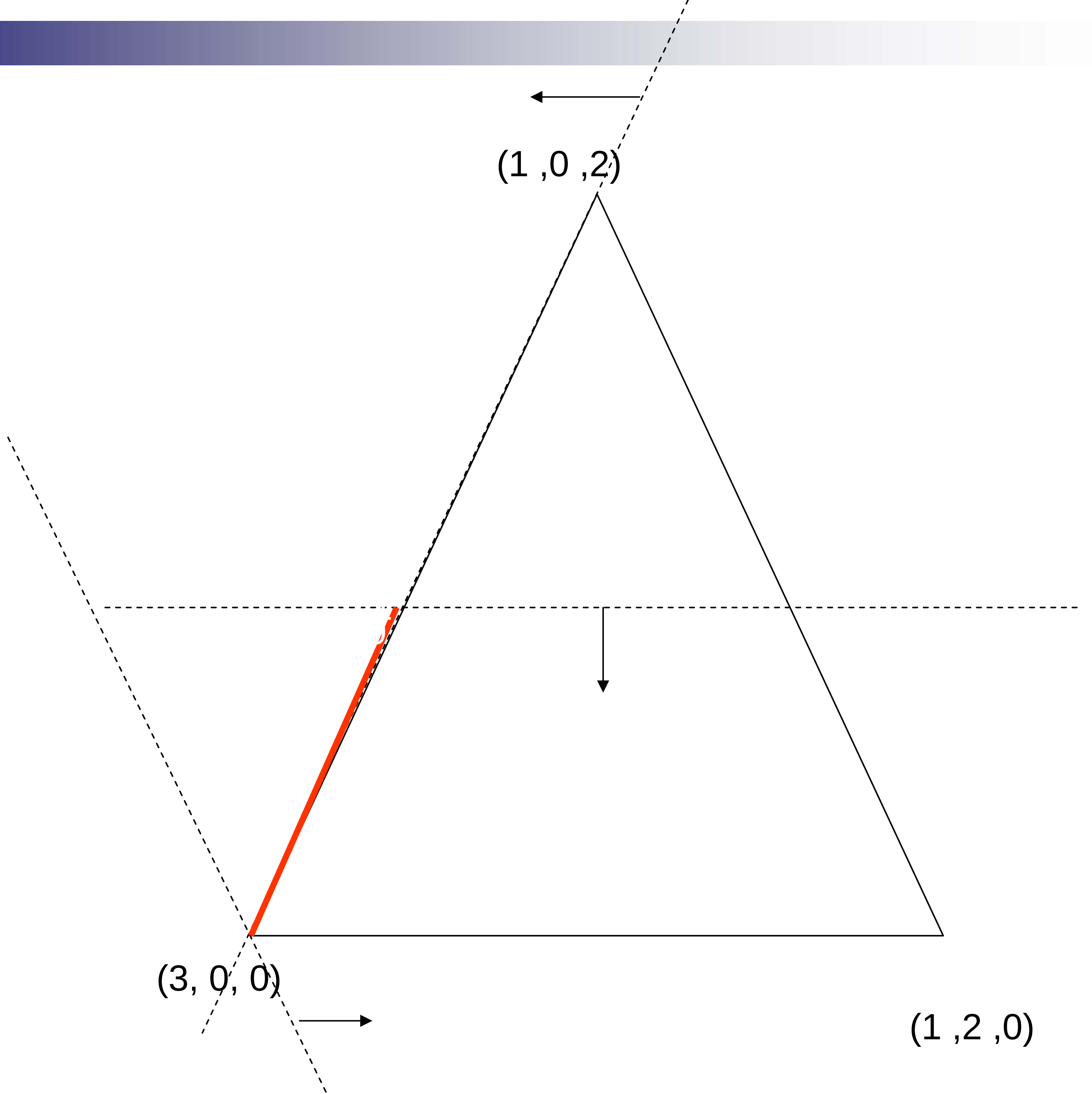
$$C(v) = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \quad \wedge \quad \sum_{i \in A} x_i \geq v(A) \quad A \subseteq N \right\}.$$

Ogni coalizione ottiene almeno quanto è in grado di ottenere da sola.

Gioco dell'antiquario

$$\begin{cases} x \geq a \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y \geq b \\ x + z \geq c \\ y + z \geq 0 \\ x + y + z = c \end{cases} .$$

$C(v)=\{(x,0,c-x):x\geq b\}$ x ha il significato del prezzo di vendita


(1 ,0 ,2)
(3, 0, 0)
(1 ,2 ,0)

Esempio 3 (papà maligno)

$$v(A) = 0 \; se|A| \leq 1, v(A) = 1 \; se|A| \geq 2$$

Supponiamo (*x*,*y*,*z*) stia nel nucleo

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ x + z \geq 1 \\ y + z \geq 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} .$$

Sommando le tre disuguaglianze con due incognite:

$$2(x+y+z) \geq 3$$

Che porta alla conclusione:

$$2 \geq 3!$$

Quindi il nucleo è vuoto!

Esempio 7

Due venditori, Alf e Fia, che hanno lo stesso modello di auto in vendita, devono cercare di convincere il potenziale cliente Andrea a comperare l'auto presso di loro. Chi ci guadagnerà in questa situazione?

$$v(A) = 1 \; se A = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \quad 0 \; altrimenti$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ x + z \geq 1 \\ y + z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} . \quad C(v) = \{(1,0,0)\}$$

Nucleolo

Data un imputazione x

$$e(A,x) = v(A) - \sum_{i \in A} x_i.$$

È l'indice di lamento della coalizione A nei riguardi dell'imputazione.

Per ogni imputazione consideriamo gli indici di lamento di ogni coalizione, e prendiamo il più grande

Nucleolo

1. Consideriamo tutte le imputazioni che minimizzano questo lamento massimo.
2. Tra queste consideriamo tutte quelle che minimizzano il secondo massimo lamento
3. E così via, fino a che rimane una sola imputazione (da dimostrare!)

Questa viene detta nucleolo del gioco

Esempi

Gioco dell’antiquario:

$$\nu(v) = (c - \frac{b+c}{2}, 0, -\frac{b+c}{2})$$

Papà maligno

$$\nu(v) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Teorema

Se il nucleo è non vuoto, allora il nucleolo appartiene al nucleo.

Quindi nel caso dei venditori alf e fia e del compratore

$$(1, 0, 0)$$

Il consiglio di sicurezza dell’ONU

Il consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da 15 membri: 5 sono permanenti, e hanno diritto di veto, gli altri 10 sono a rotazione. Per prendere una decisione sono necessari 9 voti favorevoli, tra cui devono esserci i 5 con diritto di veto.

Quanto peso effettivo hanno i vari membri del consiglio?

Strumento: indici di potere

Indici di potere

Sono indici che cercano di quantificare il potere di ogni membro di una certa organizzazione:

- ONU
- Parlamenti
- Società per azioni
- Ecc ecc

Gioco a maggioranza

$$[w; p_1, \ldots, p_n]$$

La coalizione A vince (*v*(A)=1) se

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_j} > w$$

La somma dei voti dei membri di A supera la quota di maggioranza

Indice di Shapley

$\sigma(v)=(\sigma_1(v), \sigma_2(v),\ldots, \sigma_n(v))$

$$\sigma_i(v) = \sum_{S\in 2^{N}\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[v(S\cup\{i\}) - v(S)\right]$$

$$[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Contributo marginale del giocatore *i* alla coalizione $S \cup \{i\}$

$$\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$$

Coefficiente probabilistico

SPA (10%,20%,30%,40%)

σ=(1/12,3/12,3/12,5/12)

Con un piccolo cambiamento di quote:

(10%,21%,30%,39%)

σ=(0,4/12,4/12,4/12)

Due venditori,un compratore

Nucleo $=\{(1,0,0)\}$

$\sigma=(4/6,1/6,1/6)$

σ è più ragionevole

Conclusione:

Non esiste un concetto di soluzione di gioco cooperativo che va bene in ogni situazione. Avere numerose soluzioni è utile per fare confronti e avere più informazioni. Il confronto tra possibili esiti diversi proposti per il gioco serve a capire meglio il gioco stesso