

# Coloriamo i fullereni

## Origami & Grafi

Andrea Centomo

Liceo "F. Corradini" di Thiene (VI)

*Email:* centomoa@yahoo.it

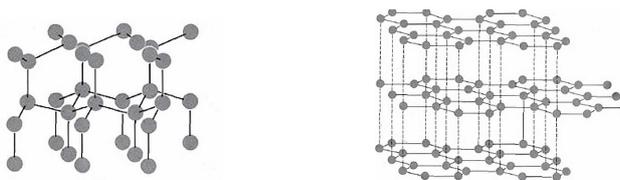
15 agosto 2010

---

In questo articolo si rivisitano alcune applicazioni della Teoria dei Grafi a problemi di colorabilità di particolari solidi di interesse per la Chimica noti come fullereni. La trattazione è corredata da alcune interessanti dimostrazioni elementari relative alla colorabilità del grafo di Petersen e all'unicità topologica del ciclo hamiltoniano del dodecaedro. In Appendice vengono riportati i diagrammi per la realizzazione e l'assemblaggio dei moduli PHiZZ che permettono di costruire modelli esteticamente soddisfacenti dello scheletro dei fullereni. Quanto contenuto in questo lavoro si può utilizzare per un laboratorio su origami e matematica.

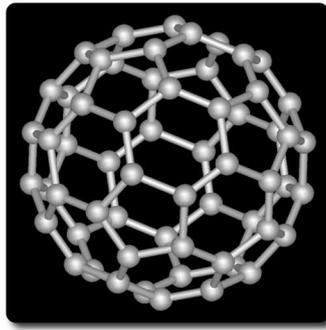
---

Alcuni elementi chimici assumono forme diverse in relazione alla diversa disposizione geometrica degli atomi che formano il loro reticolo. Questa proprietà prende il nome di *allotropia*. Una delle coppie maggiormente note di allotropi in natura è rappresentata dalla grafite e dal diamante le cui molecole sono composte interamente di carbonio. La grafite è composta da strati di atomi di carbonio organizzati in strutture esagonali, dove ogni atomo di carbonio è fortemente legato ai tre atomi vicini nello stesso strato e debolmente legato agli atomi degli strati adiacenti. Nel diamante, invece, ogni atomo di carbonio è fortemente legato ai quattro atomi di carbonio vicini nella struttura cristallina cubica che lo compone. Le diverse geometrie delle strutture cristalline di diamante e grafite sono l'unica causa delle enormi differenze tra le proprietà di questi due materiali. Ciò in qualche forma è sorprendente!



**Figura 1.** Diamante e grafite

Nel 1985 i chimici Robert Curl, Harold Kroto e Richard Smalley scoprirono un nuovo allotropo del carbonio, il  $C_{60}$ , che venne denominato *fullerene* per via della relazione tra la forma geometrica del suo reticolo e quella delle cupole geodetiche progettate dall'architetto Richard Buckminster Fuller.



**Figura 2.** Il fullerene  $C_{60}$  (fonte Wikipedia)

Altri fullereni vennero scoperti successivamente al 1985 e sono denominati buckyball (sfere di Bucky) se hanno simmetria sferica, o nanotubi, se hanno simmetria cilindrica.

### 1. Fullereni matematici e colorabilità

In matematica per fullerene si intende più in generale un qualsiasi poliedro convesso trivalente le cui facce sono solo esagoni e pentagoni regolari. La definizione matematica rispetta la struttura chimica dei fullereni in quanto in essi ogni atomo stabilisce un legame trivalente con tre atomi vicini, andando a formare un reticolo in cui compaiono facce esagonali e pentagonali. Tuttavia i fullereni chimici sono solo un sottoinsieme proprio dei fullereni matematici.

Ai fullereni si applica la relazione di Eulero<sup>1</sup>

$$V - S + F = 2$$

dove  $V$ ,  $S$  e  $F$  indicano rispettivamente il numero di vertici, spigoli e facce del poliedro. La relazione di Eulero, come spesso accade, ha conseguenze interessanti.

**TEOREMA 1.** *Sia  $\mathcal{P}$  un fullerene allora dodici delle sue facce sono pentagonali.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $F_5$  e  $F_6$  rispettivamente il numero di facce pentagonali e esagonali di  $\mathcal{P}$ . La trivalenza implica che

$$V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}.$$

Il numero di spigoli è dato da

$$S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2}.$$

Da ciò, utilizzando la relazione di Eulero, segue direttamente che

$$\left(\frac{5F_5 + 6F_6}{3}\right) - \left(\frac{5F_5 + 6F_6}{2}\right) + F_5 + F_6 = 2$$

e, semplificando, anche

$$F_5 = 12$$

<sup>1</sup> Il lettore interessato alla dimostrazione della relazione di Eulero e più in generale ad una trattazione della geometria dello spazio è rinviato a [6].

che è quanto volevamo dimostrare. □

È piuttosto naturale a questo punto chiedersi se esistano delle condizioni che limitino anche il numero delle facce esagonali  $F_6$  di un fullerene. Alcuni teoremi generali<sup>2</sup> permettono di stabilire che deve valere la condizione

$$F_6 \neq 1$$

ossia che l'unico fullerene non ammissibile è quello con un'unica faccia esagonale. Una traccia della dimostrazione di questo fatto si può ritrovare in [6].

Il problema generale che ora poniamo riguarda la colorabilità propria per spigoli di un fullerene matematico:

**Problema di colorabilità.** *Trovare il numero **minimo**  $\chi$  di colori in modo che gli spigoli concorrenti in un qualsiasi vertice di un fullerene abbiano sempre colori diversi.*

Un fullerene colorato secondo quanto richiesto dal problema appena posto si dirà colorato *propriamente* per spigoli o talvolta, più semplicemente, propriamente colorato e il numero  $\chi$  prende il nome di *numero cromatico*. Dal momento che i fullereni hanno valenza 3 è chiaro che per il numero cromatico deve valere la condizione

$$\chi \geq 3.$$

## 2. Coloriamo il dodecaedro regolare

Il problema di colorabilità non è in generale di facile soluzione. Conviene allora aggredirlo vedendo cosa si può dire per il fullerene con il numero minimo di facce, il dodecaedro regolare, la cui geometria ci è più familiare rispetto ad altri fullereni. La chiave di volta per stabilire una colorazione propria dello scheletro di questo solido è insita nella *Teoria dei Grafi*.

In maniera informale possiamo dire che un grafo è un insieme di punti, detti *vertici*, collegati tra loro da linee dette *lati* o spigoli del grafo. Più precisamente si ha la seguente.

**DEFINIZIONE 2.** *Un grafo (finito) è una coppia ordinata  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  dove*

1.  $\mathcal{V}$  è un insieme (finito) di punti: insieme dei vertici di  $\mathcal{G}$ ;
2.  $\mathcal{E} \subset \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathcal{V}, u \neq v\}$  è l'insieme dei lati di  $\mathcal{G}$ .

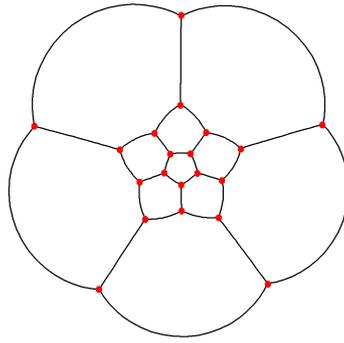
*Due vertici  $u, v \in \mathcal{V}$  sono detti adiacenti (o connessi da un lato) se  $\{u, v\} \in \mathcal{E}$ .*

I grafi sono oggetti molto interessanti sia per la matematica che per le sue applicazioni e per una trattazione divulgativa su questo argomento si rimanda a [7].

Quello che invece interessa sottolineare qui è che esiste un'importante relazione tra i concetti di grafo e di poliedro. Per comprenderla consideriamo l'esempio del dodecaedro regolare. Come noto questo solido si può inscrivere in una sfera, possiamo allora sfruttare la *proiezione stereografica* per vedere che al suo scheletro corrisponde nel piano il grafo di Figura 3.

---

2. Si può dimostrare che non esistono scheletri di poliedri dove ad ogni vertice arrivano tre spigoli e dove tutte le facce meno una hanno lo stesso numero di lati (Grünbaum e Motzkin, 1963), che dimostra anche l'impossibilità del caso  $f_E = 1$ .



**Figura 3.** Proiezione stereografica del dodecaedro (fonte Wikipedia)

Più in generale, per lo studio delle proprietà combinatorie dei poliedri, si ricorre spesso al loro *diagramma di Schlegel* ossia al grafo che si ottiene proiettando su un piano vertici e spigoli di un poliedro da un punto  $P$  scelto molto vicino ad una faccia del poliedro, in modo che tale faccia si proietti in un poligono al cui interno sono contenute tutte le proiezioni dei rimanenti vertici e spigoli. Il diagramma di Schlegel del dodecaedro è rappresentato in Figura 4.

Un teorema molto generale stabilisce in modo preciso la relazione che intercorre tra poliedri e grafi planari.

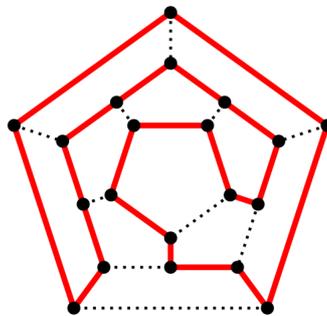
**TEOREMA 3. (DI STEINITZ)** *Un grafo planare e semplice<sup>3</sup>  $\mathcal{G}$  è lo scheletro di un poliedro se e solo se per ogni coppia di vertici  $v \neq w$  di  $\mathcal{G}$  esistono almeno 3 cammini da  $v$  a  $w$  disgiunti tra loro.*

I grafi del dodecaedro, Figura 3 e 4, evidenziano alcune proprietà utili per il seguito:

- a) il grafo ha 30 lati e 20 vertici;
- b) il grafo è *connesso*: data una coppia qualsiasi di vertici esiste sempre una spezzata formata da lati del grafo che li congiunge;
- c) il grafo è *3-regolare*: in ogni vertice concorrono 3 lati (ogni vertice ha grado 3).

L'*icosian game*, un gioco sul diagramma di Schlegel del dodecaedro inventato dal matematico, fisico e astronomo irlandese Sir Rowan Hamilton nel 1857, permette di scoprire la proprietà decisiva per risolvere il problema di colorabilità per spigoli del dodecaedro.

Fissato un qualsiasi vertice  $v$  del diagramma di Schlegel del dodecaedro l'*icosian game* consiste nello scoprire un percorso chiuso che attraversa tutti i rimanenti vertici del diagramma passando una sola volta per ciascuno di essi. Non è difficile, dopo qualche tentativo, individuare un percorso che soddisfa le regole del gioco!



**Figura 4.** Percorso hamiltoniano

3. Senza lati doppi o lati che partono e arrivano nello stesso vertice.

In generale un grafo per il quale esiste una spezzata chiusa (ciclo), formata da lati del grafo, che passa per tutti i vertici del grafo stesso si dice *grafo hamiltoniano*. L'hamiltonicità del grafo del dodecaedro regolare permette di risolvere il problema di colorabilità in tre semplici passi:

- I. individuiamo un ciclo hamiltoniano
- II. coloriamo tutti i 20 lati del ciclo alternando due colori diversi;
- III. dal momento che, come visto in b), il grafo è 3-regolare completiamo la colorazione dei lati mancanti con un terzo colore.

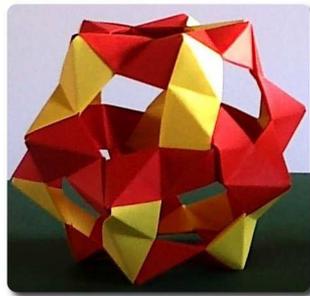
Il metodo appena descritto trasforma il problema di colorabilità propria per spigoli in un problema di ricerca di un ciclo hamiltoniano.

### 3. Modelli origami

Come evidenziato in [3] è divertente e interessante utilizzare quanto sviluppato fino ad ora per costruire dei modelli origami dello scheletro del dodecaedro colorati propriamente oppure in cui è rappresentato, come in Figura 5, un ciclo hamiltoniano. Nella letteratura origamista esistono diversi moduli di assai semplice realizzazione che sono adatti a questo scopo:

- a) modulo PHiZZ di Thomas Hull,
- b) il modulo Sonobe di Mitsonobu Sonobe,
- c) il modulo Penultimate di Robert Neale.

Quello che ci sembra più adatto al nostro scopo, di cui riportiamo il diagramma di piegatura nell'Appendice A, è il modulo PHiZZ<sup>4</sup> elaborato dal matematico e origamista T. Hull.



**Figura 5.** Dodecaedro origami (30 moduli PHiZZ).

### 4. Il grafo di Petersen

Quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti suscita un certo numero di interrogativi.

- a) Esistono dei poliedri trivalenti i cui spigoli non possono essere colorati propriamente usando solo tre colori?
- b) Esistono grafi trivalenti, non necessariamente associati allo scheletro di un poliedro, che non sono colorabili propriamente con soli tre colori?

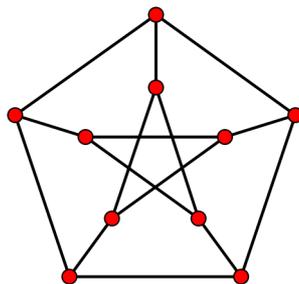
4. Acronimo di Pentagon Hexagon Zig Zag.

Per quanto riguarda la prima domanda è noto che dal Teorema dei quattro colori discende il seguente corollario.

**COROLLARIO 4.** *I lati di un qualsiasi grafo planare finito e trivalente si possono colorare propriamente con soli tre colori.*

Ricordando il Teorema di Steinitz si conclude facilmente che tutti i poliedri trivalenti hanno scheletri colorabili propriamente con soli tre colori.

La risposta alla seconda domanda è invece positiva. Infatti in letteratura sono noti diversi esempi di grafi trivalenti la cui colorazione propria richiede quattro colori. Il più semplice tra questi è il grafo di Petersen rappresentato in Figura 4.



**Figura 6.** Grafo di Petersen

Il grafo di Petersen non è planare e la sua non colorabilità propria per spigoli con tre colori si può dimostrare, come suggerito in [5], in modo del tutto elementare.

**TEOREMA 5.** *I lati del grafo di Petersen non sono propriamente colorabili con soli tre colori.*

**DIMOSTRAZIONE.** Con riferimento alla Figura 6 osserviamo che nel grafo di Petersen sono presenti un ciclo esterno formato dai cinque lati di un pentagono e un ciclo interno formato dai cinque lati di un pentagramma. Se il grafo fosse colorabile con 3 colori, dovrebbe essere che:

- a) tutti e tre i colori dovrebbero essere usati per colorare i lati del ciclo esterno che ha cinque lati;
- b) se un lato del ciclo esterno ha un dato colore allora devono esistere due lati del ciclo interno con lo stesso colore.

Da a) e b) consegue che il ciclo interno è formato da  $3 \cdot 2 = 6$  lati e ciò è assurdo. □

## 5. Questioni di unicità

Un ulteriore problema che ora poniamo, piuttosto classico in matematica, consiste nel contare i cicli hamiltoniani che si possono trovare nel diagramma di Schlegel del dodecaedro regolare. Come vedremo, più che contare il numero di cicli, si contano la classi di cicli *topologicamente* distinti. Cosa significa topologicamente distinti sarà subito spiegato.

In primo luogo ricordiamo la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 6.** *Dato un poliedro  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  una sua simmetria  $T$  è un'isometria dello spazio che lascia invariato  $\mathcal{P}$  ossia tale che  $T(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ .*

Indicato con  $\mathcal{S}$  l'insieme delle simmetrie di un poliedro non è difficile rendersi conto che esso è chiuso rispetto alla composizione  $\circ$  ossia che

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}$$

con  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{S}$ . In parole povere questo significa che se si fanno agire in sequenza due simmetrie il risultato complessivo è ancora una simmetria. Oltre a questo si può vedere che valgono le seguenti proprietà:

1. associativa:  $(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2) \circ \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \circ (\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_3)$ ;
2. elemento neutro:  $\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{I} = \mathcal{T}_1$  dove  $\mathcal{I}$  è l'identità;
3. opposto: per ogni  $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{S}$  esiste  $\mathcal{T}_1^{-1}$  e  $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_1^{-1} = \mathcal{T}_1^{-1} \circ \mathcal{T}_1 = \mathcal{I}$

dove  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3 \in \mathcal{S}$ . Da cui possiamo concludere che le simmetrie formano un *gruppo* rispetto alla composizione.

Nel caso particolare del dodecaedro il gruppo di simmetria contiene 120 trasformazioni:

- a) l'identità;
- b) rotazioni di ordine 5: l'asse di rotazione passa per i centri di due facce opposte e l'angolo di rotazione è  $2k\pi/5$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Le coppie di facce opposte sono 6 e a ciascuna coppia corrispondono 4 rotazioni per un totale di **24** rotazioni;
- c) rotazioni di ordine 3: l'asse di rotazione passa per due vertici opposti e l'angolo di rotazione pari a  $2k\pi/3$ ,  $k = 1, 2$ . Le coppie di vertici opposti sono 10 per un totale di **20** rotazioni;
- d) rotazioni di ordine 2: l'asse passa per i punti medi di due spigoli opposti e di angolo di rotazione pari a  $k\pi$ . Le coppie di spigoli opposti sono 15 per un totale di **15** rotazioni;
- e) riflessioni rispetto ad un piano passante per il centro e che contiene due spigoli opposti. Le coppie di spigoli opposti sono 15 per un totale di **15** riflessioni;
- f) roto-riflessioni di ordine 5: l'asse di rotazione passa per i centri di due facce opposte e gli angoli di rotazione sono  $\pi/5 + 2k\pi/5$ ,  $k = 0, 1, 3, 4$ ; il piano di riflessione passa per il centro ed è perpendicolare all'asse di rotazione. Per  $k = 2$  tutte le roto-riflessioni di ordine 5 si riducono ad un'unica riflessione. Le trasformazioni sono in totale **25**;
- g) roto-riflessioni di ordine 3: l'asse passa per due vertici opposti e gli angoli di rotazione sono pari a  $\pi/3 + 2k\pi/3$ ,  $k = 0, 2$ . Per  $k = 1$  tutte le roto-riflessioni di ordine 5 si riducono ad un'unica riflessione che è già stata contata in precedenza. Le coppie di vertici opposti sono 10 per un totale di **20** trasformazioni.

Ritornando ai cicli hamiltoniani sul dodecaedro risulta allora piuttosto naturale non considerare diversi tra loro due cicli per i quali esiste una simmetria che trasforma l'uno nell'altro e ciò motiva la seguente.

**DEFINIZIONE 7.** *Due cicli hamiltoniani sono topologicamente equivalenti se esiste una simmetria che trasforma l'uno nell'altro.*

A questo punto poniamo il seguente:

**Problema.** *Quanti sono i cicli hamiltoniani nel grafo del dodecaedro che non sono topologicamente equivalenti tra loro?*

Come evidenziato in [2] il problema si può risolvere con alcune considerazioni elementari partendo dal disegno di Figura 4.

- Consideriamo una qualsiasi faccia del disegno, la faccia  $k$ , e osserviamo che se indichiamo con  $N_k$  il numero dei suoi spigoli che appartengono ad un qualsiasi ciclo hamiltoniano per esso deve valere la limitazione

$$3 \leq N_k \leq 4.$$

Infatti se  $N_k < 3$ , dal momento che il grafo del dodecaedro è 3-regolare, succedrebbe che almeno i vertici di una faccia non sarebbero vertici di un ciclo hamiltoniano il che è assurdo. Inoltre se  $N_k = 5$  il ciclo hamiltoniano conterrebbe solo cinque vertici e anche questo è assurdo.

- Indicato con  $F_4$  il numero delle facce che contengono 4 spigoli di percorso hamiltoniano e con  $F_3$  il numero delle facce che ne contengono 3 è chiaro che

$$F_4 + F_3 = 12 \quad 4F_4 + 3F_3 = 40$$

da cui concludiamo che  $F_4 = 4$  e  $F_3 = 8$ .

- Non è difficile a questo punto osservare che almeno due facce con quattro spigoli devono essere tra loro adiacenti: senza perdita di generalità possiamo supporre che la faccia centrale  $F_4^c$  del diagramma di Schlegel contenga quattro spigoli di percorso hamiltoniano (Figura 4) e mostrare che non è possibile che tutte le cinque facce ad essa adiacenti siano di tipo  $F_3$ . Una di esse, che chiamiamo  $F_4^a$ , deve, in virtù della trivalenza del grafo, contenere quattro spigoli di percorso hamiltoniano.
- Concentriamoci ora sulla coppia di facce adiacenti  $F_4^c$  e  $F_4^a$ . Ora lo spigolo in comune a queste due facce deve appartenere ad un qualsiasi ciclo hamiltoniano e dei rimanenti quattro spigoli ad esso adiacenti (due appartenenti a una faccia e due all'altra) due appartengono a un ciclo hamiltoniano e due no secondo i due schemi simmetrici di Figura 7.

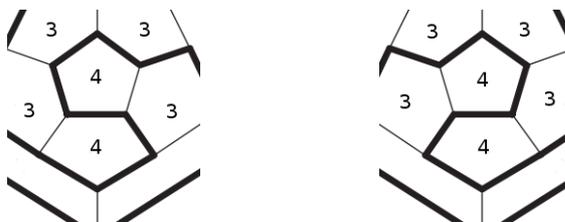


Figura 7.

- A questo punto possiamo concludere osservando che ciascuno dei due schemi simmetrici precedenti forza un unico cammino hamiltoniano e che i due cammini hamiltoniani che si ottengono sono topologicamente equivalenti (sono uno il riflesso dell'altro).

Finalmente possiamo dire che tutti i percorsi hamiltoniani del dodecaedro sono topologicamente equivalenti. Quindi il dodecaedro regolare ammette un **unico** cammino hamiltoniano a meno di equivalenze!

## 6. Una prima estensione

Una prima estensione interessante di quanto discusso in precedenza riguarda la colorazione per spigoli del fullerene  $C_{60}$ , che presenta 20 facce esagonali e uno scheletro formato da 90 spigoli. Geometricamente la sua forma è quella di un icosaedro troncato, un solido piuttosto familiare, se non altro per la sua relazione con il classico pallone da calcio.



**Figura 8.** Icosaedro troncato e pallone da calcio (fonte Wikipedia)

Trattandosi di un solido trivalente sappiamo che il suo scheletro si può colorare propriamente con tre colori. Sulla falsa riga di quanto visto sopra, per trovare una colorazione propria si dovrà:

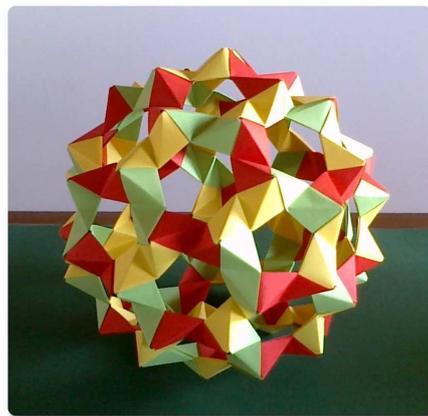
- a) disegnare il diagramma di Schlegel del solido,
- b) trovare nel diagramma un percorso hamiltoniano.

Rispetto a quanto visto per il dodecaedro l'aumento del numero di facce rende più difficoltoso soddisfare le richieste avanzate in a) e b).

Utilizzando come riferimento il diagramma di Schlegel colorato e dopo aver pazientemente piegato 90 moduli PHiZZ non è difficile assemblare i moduli in modo da ottenere il modello di Figura 9.

Un problema più arduo riguarda invece la determinazione del numero di percorsi hamiltoniani indipendenti che non può essere affrontato estendendo i ragionamenti elementari fatti nel caso del dodecaedro.

Ricorrendo ad algoritmi per la ricerca di percorsi hamiltoniani in un grafo si riesce a vedere che sull'icosaedro troncato esistono esattamente 16 percorsi hamiltoniani topologicamente indipendenti [4].

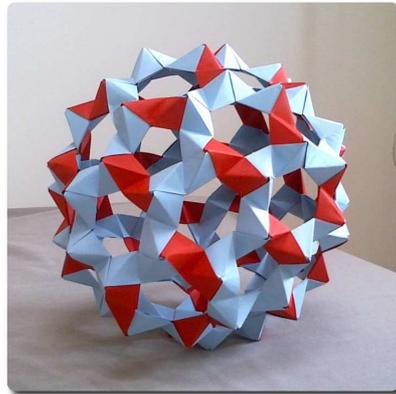


**Figura 9.** Modello origami del  $C_{60}$  propriamente colorato

## 7. Ulteriori estensioni

Come possiamo estendere tutti i ragionamenti fatti in precedenza a fullereni con un numero maggiore di vertici? La risposta più diretta sarebbe di rinviare il lettore a [4].

Come evidenziato sopra il problema principale che si presenta riguarda la difficoltà di individuare un percorso hamiltoniano da cui partire per ottenere una colorazione propria. L'idea spontanea sarebbe di scrivere degli algoritmi che lascino al calcolatore l'onere di cercare i percorsi. Purtroppo però il problema della determinazione dei percorsi hamiltoniani di un grafo è un problema NP-completo. Senza entrare in problematiche di Teoria della Complessità ci basta osservare che questo significa che al crescere del numero di vertici del fullerene i tempi di calcolo dei cammini hamiltoniani divengono enormi e quindi, di fatto, quando i vertici cominciano ad essere troppi il computer non è più in grado di aiutarci.

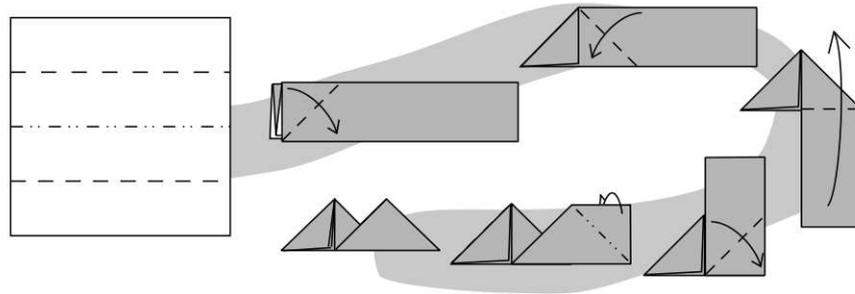


**Figura 10.** Modello origami a 120 moduli con ciclo hamiltoniano

**Ringraziamenti:** Anita Pasotti per aver letto il lavoro e per diversi suggerimenti.

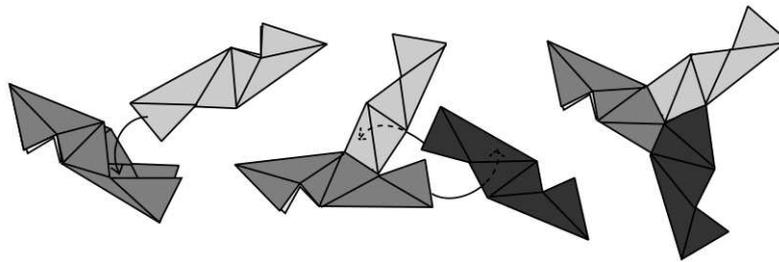
## Appendice A

Nella prima figura [3] è riportato il diagramma per la piegatura del modulo PHiZZ.



**Figura 11.** Modulo PHiZZ

Quando si piegano questi moduli è importante realizzarli esattamente uguali evitando al secondo passaggio di effettuare la piega a sinistra a destra. Scambiando destra con sinistra si otterrebbe un modulo simmetrico rispetto a quello di figura. Tuttavia questi moduli poi non si incastrebbero tra loro. Nella seconda figura [3] è riportata la modalità di assemblaggio di tre unità PHiZZ.



**Figura 12.** Assemblaggio di tre moduli PHiZZ

### Bibliografia

- [1] M. Goldberg, A class of multisymmetric polyhedra. *Tohoku Mathematical Journal*, 43, pag. 104-108, 1937.
  
- [2] B. Hopkins, Hamiltonian Paths on Platonic Graph, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* Volume 2004, Issue 30, pag 1613-1616, 2004.
  
- [3] T. Hull, *Project Origami: Activities For Exploring Mathematics*, Editore A. K. Peters, Ltd., 2006.
  
- [4] A. Moiola, Fullereni, simmetrie e colorazioni, Tesi di Laurea disponibile online.
  
- [5] R. Naserasra, R. Skrekovski, The Petersen graph is not 3-edge-colorable - a new proof, *Discrete Mathematics* 268, pag. 325-326, 2003.
  
- [6] M. Dedò, *Forme, simmetria e topologia*, Zanichelli Decibel, 1999.
  
- [7] P. Gritzmann R. Brandenburg, *Alla riverca della via più breve*, Edizione Springer, 2009.