

TEORIA DEI GIOCHI

Parte 2

Matematica nella realtà – Università Bocconi

Roberto Lucchetti - Politecnico di Milano

17 Dicembre 2010



Giochi in forma estesa, fino a Zermelo

- Un modo matematico per descrivere un gioco a mosse consecutive (scacchi, dama, ecc) è quello di disegnare **l'albero** del gioco.

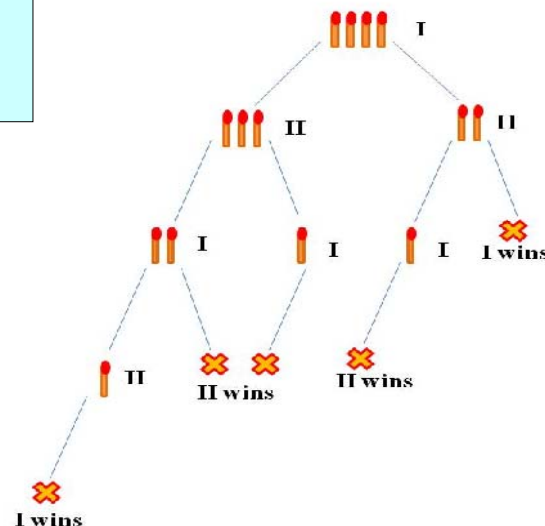
Esempio:

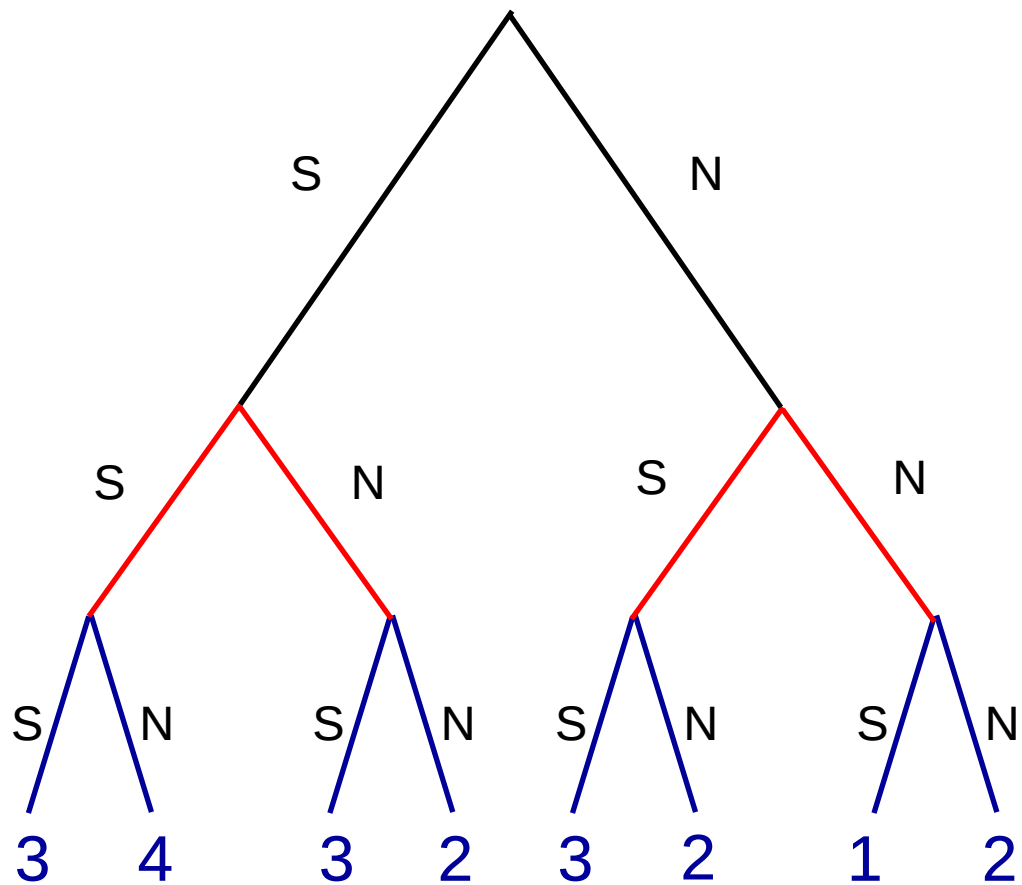
4 fiammiferi sul tavolo:

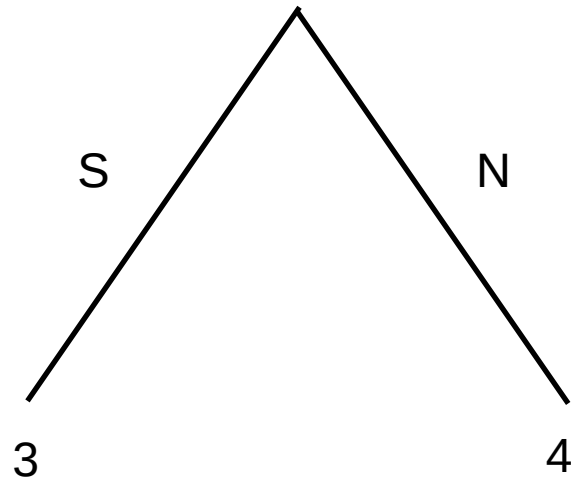
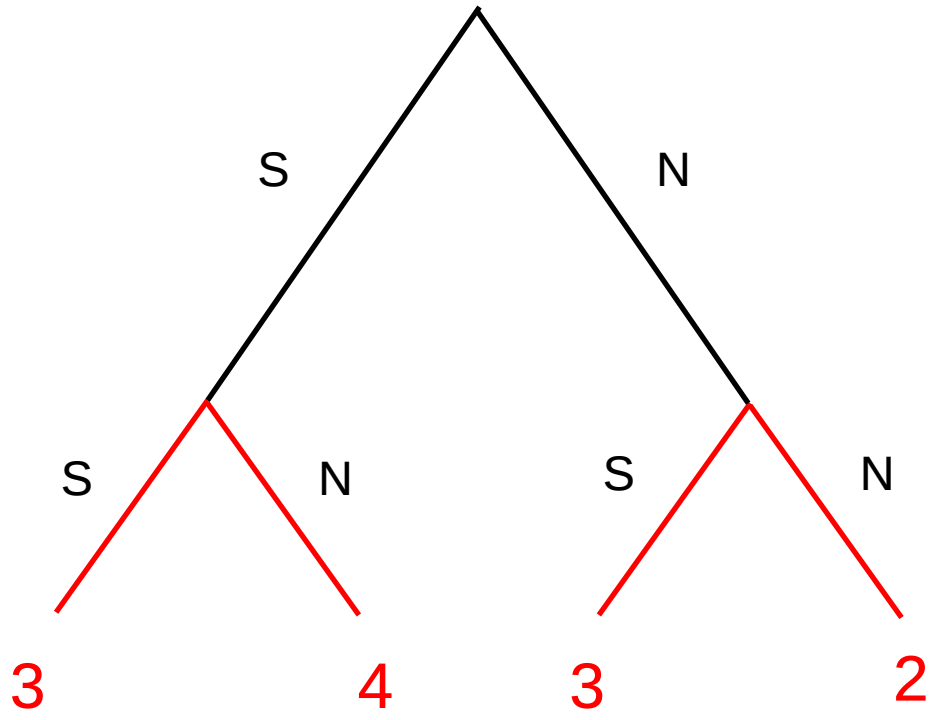
- se ne possono togliere o uno o due
- chi toglie l'ultimo vince

1. Radice
2. Rami
3. Nodi intermedi
4. Nodi finali

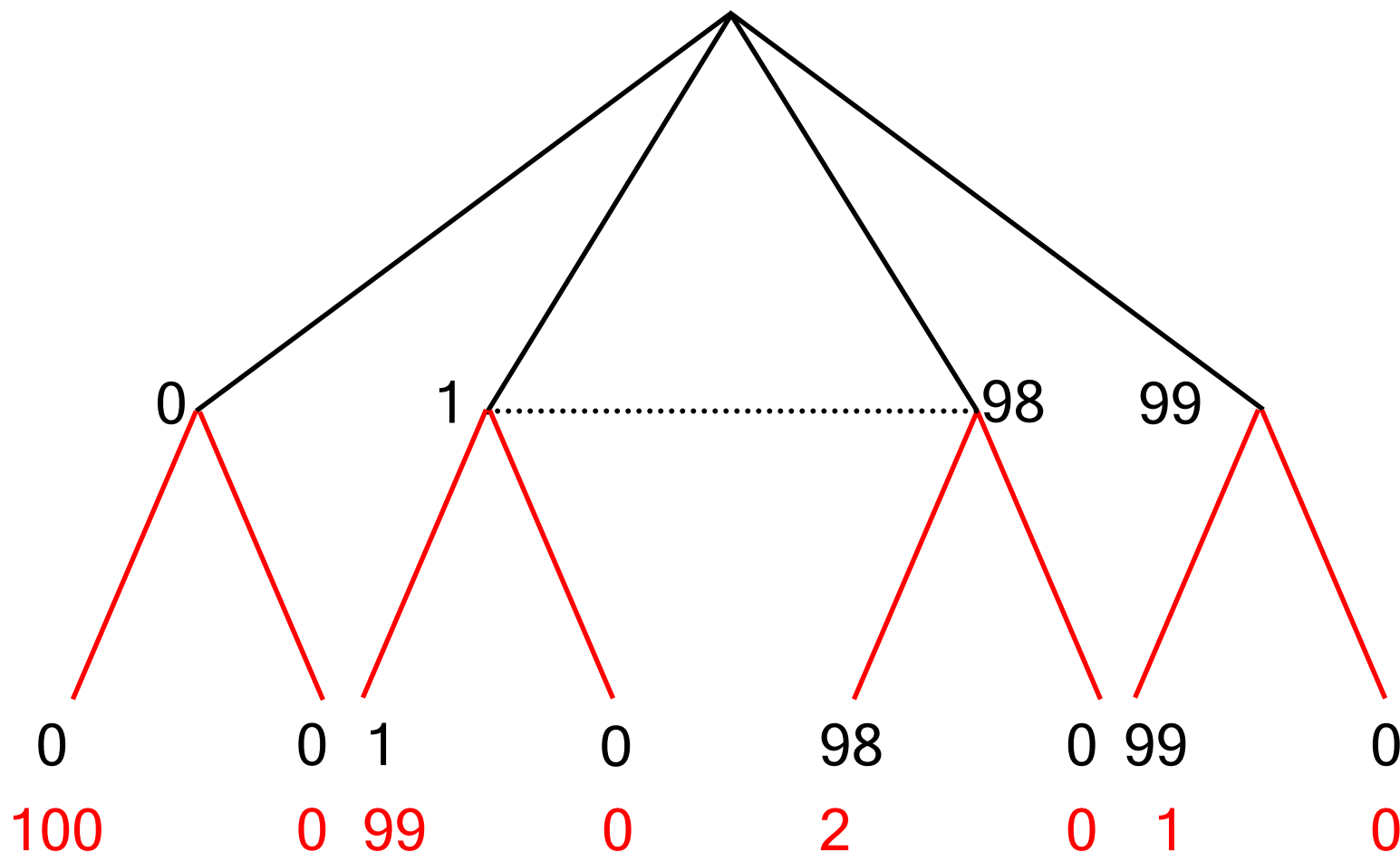
Come analizzarli?







Ultimatum game



Usata fmri (functional magnetic resonance imaging):

Insula anteriore bilaterale (che presiede stati emotivi per lo più negativi)

vs

Corteccia dorsolaterale frontale (che presiede la razionalità)



Un gioco interessante

Si ha un quadrato fatto di tanti quadratini, il primo seleziona un quadratino, si cancella quello e tutto il quadrante alto/destra determinato da quello. Al turno successivo il secondo seleziona un quadratino nella figura rimasta e si procede come prima.

Il gioco termina quando il quadratino in basso a sinistra viene preso, che lo prende ha perso.

Il gioco si estende a un rettangolo, non quadrato, fatto di quadratini



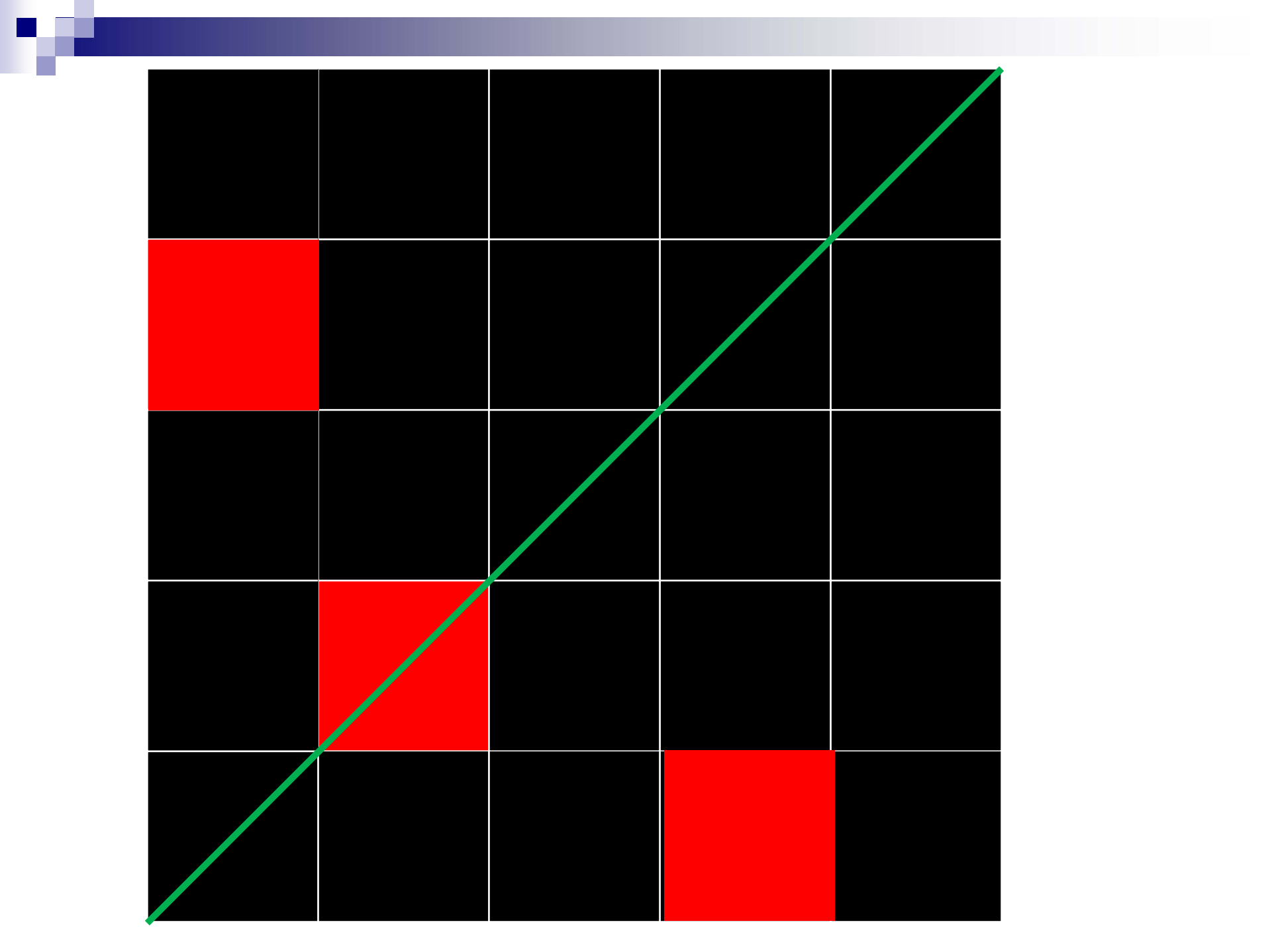
			x	

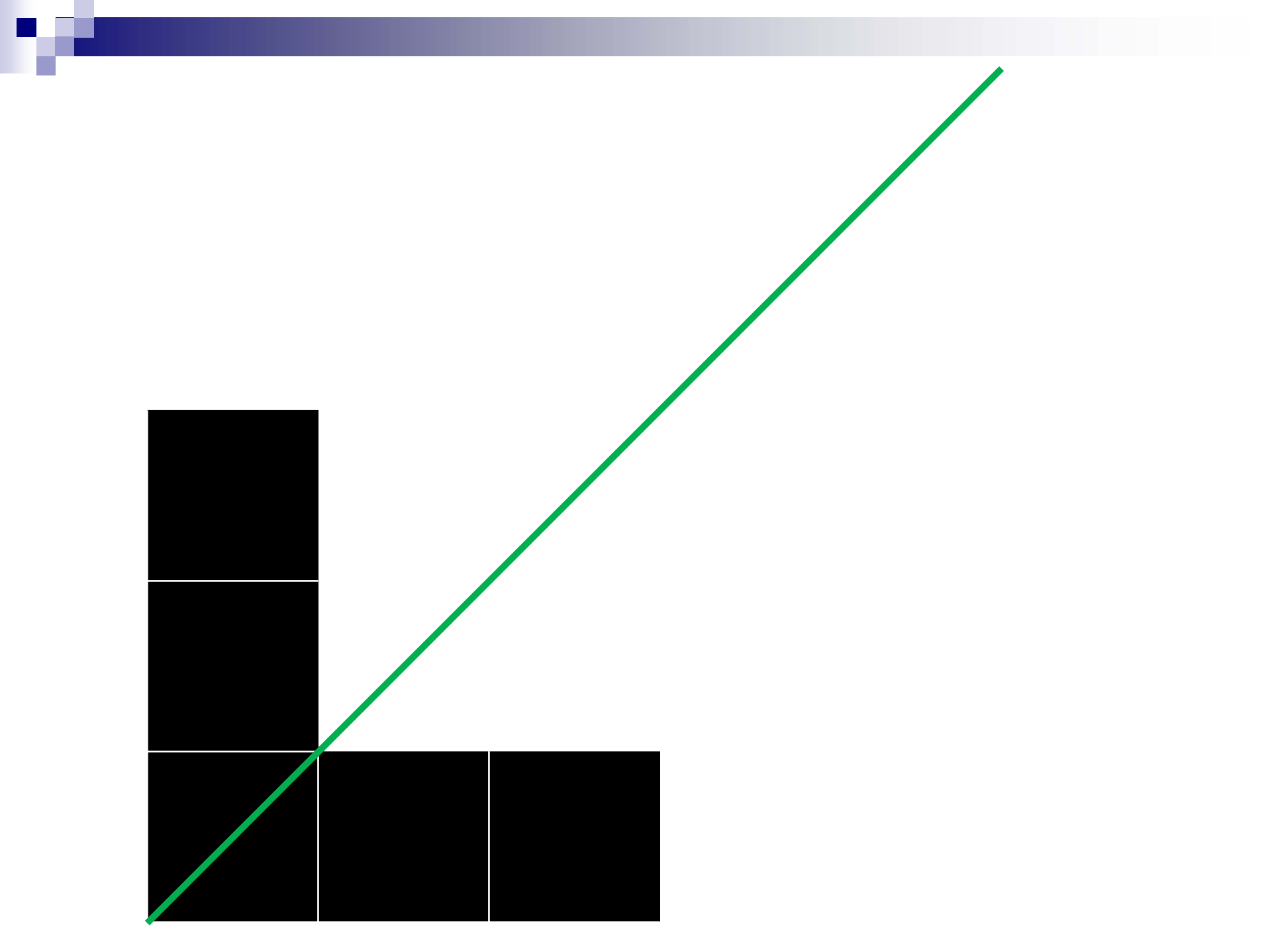


Un gioco interessante

La strategia vincente del primo giocatore consiste al primo passo nel prendere il quadratino subito in alto a destra rispetto all'ultimo che va preso, lasciando così al secondo una figura a forma di L.

Poi procede in modo simmetrico rispetto alla diagonale.







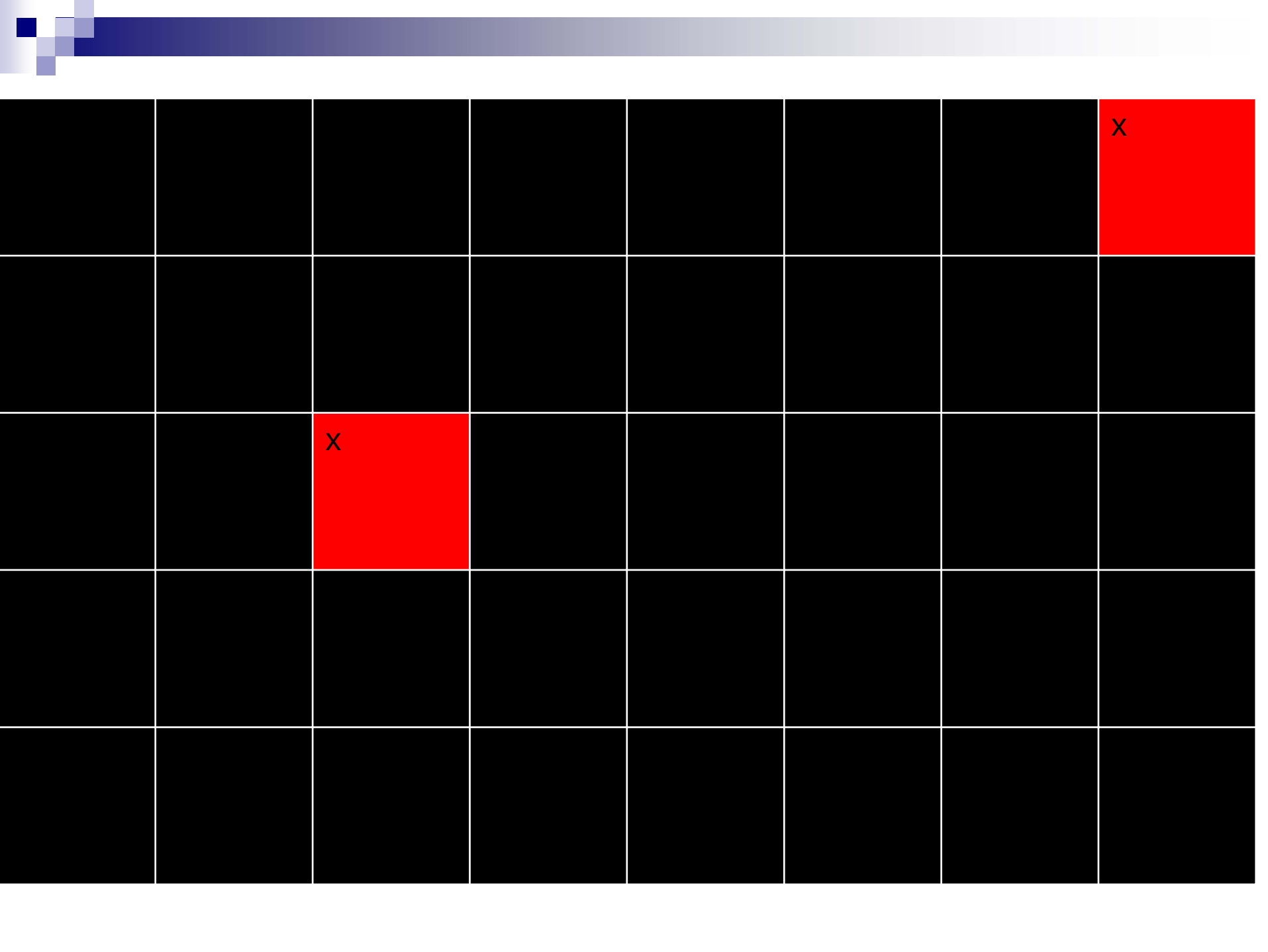
Un gioco interessante

Ovviamente la stessa strategia è disastrosa per il primo nel caso la figura sia rettangolare non quadrata.

Tuttavia, assumendo che il vincitore debba essere sempre lo stesso (cosa che sarà garantita dal successivo teorema di Zermelo), si può dimostrare che il vincitore è sempre il primo.

L'argomento è per contraddizione. Supponiamo sia il secondo a vincere. Allora deve avere una mossa vincente anche nel caso il primo prenda il quadratino in alto a destra.

Ma qualunque sia questa mossa supposta vincente, nasce una contraddizione: il primo al primo passo avrebbe potuto prelevare quel quadratino assicurandosi la vittoria.

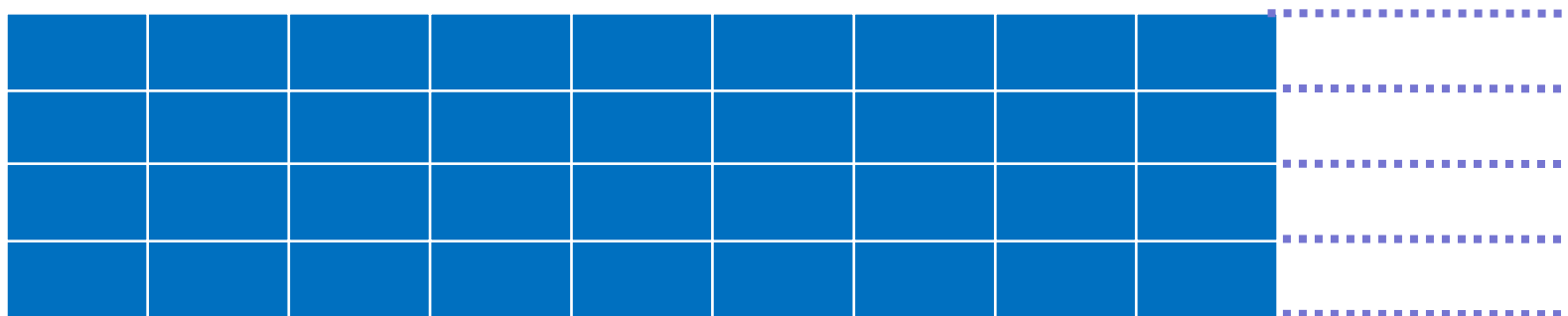


In questo caso è il secondo ad avere una strategia vincente

Caso $2 \times \infty$



Caso $m \times \infty$, $m > 2$



Qui invece come nel caso finito è il primo ad avere una strategia vincente.

Giochi combinatorici (nim)

Sono giochi:

- ☐ A **due** giocatori
- ☐ A mosse **alterne**
- ☐ Non c'è presenza di eventi **casuali**
- ☐ Chi non ha mosse a disposizione **perde**

Esempio tipico: Il gioco del nim:

N pile di carte, se ne può prendere quante si vuole da una pila
(generalizzazione se ne può prendere da un numero di pile da 1 a k , $k < n$)
Se $n \neq m$ vince il primo, altrimenti il secondo. **Come?**

Un caso semplice: (n, m)

Giochi combinatorici

La soluzione in un esempio: (2,3,1,5)

Scrivo i numeri in binario

2= 010

3= 011

1= 001

5= 101

101

Somma in base 2 senza riporto

La somma **non** è **nulla**: vince il **primo**.

Come?

Fa venire **nulla** la **somma**

Toglie le 5 carte dall'ultima pila

(Si verifica che) il secondo qualunque cosa faccia, rende di nuovo la somma non nulla...e così via

Metodo induzione a ritroso

- Si parte dai nodi che portano a situazioni finali: uno solo decide (il meglio per sé)
- Chi deve decidere a un nodo che porta a un nodo che porta a una situazione finale sa che cosa ottiene compiendo le sue scelte (decide il meglio per sé)
- E così via, fino ad arrivare alla radice

Matematicamente si definisce **lunghezza** del gioco il numero **massimo** di mosse che portano a un esito finale.

Il metodo di induzione a ritroso osserva come vanno **risolti i giochi** (banali!) **di lunghezza 1** e come, **sapendo risolvere tutti i giochi di lunghezza n** , si possano **risolvere quelli di lunghezza $n+1$**

A che giochi si applica la I.R.?

Per applicare l'induzione a ritroso:

- Le mosse devono essere in sequenza (non contemporanee)
- Ogni giocatore conosce la storia passata del gioco
- In ogni occasione i giocatori hanno un numero finito di mosse possibili
- Il gioco ha una lunghezza finita

Giochi finiti a informazione perfetta

Dama, scacchi, tris, nim ecc

Teorema di Zermelo

Nel gioco degli scacchi vale una (e una sola) delle seguenti alternative:

1. Esiste una strategia per il **bianco** tale che, qualunque strategia usi il nero, il **bianco vince**
2. Esiste una strategia per il **nero** tale che, qualunque strategia usi il bianco, il **nero vince**
3. Esiste una strategia per il **bianco** che gli garantisce **almeno il pareggio** contro ogni strategia del nero, **e viceversa**



Teorema di Zermelo

Osservazioni:

- ❖ Dice una banalità?
- ❖ Che alternative esclude?
- ❖ Che informazioni dà?

Informazioni diverse nei giochi precedenti:

- ❖ Scacchi
- ❖ Quadrati
- ❖ Nim



❖ Per gli **scacchi** si parla di soluzione **molto debole** al problema
Si sa che uno vince (o che finisce in pareggio), ma non si sa chi

❖ Per il **gioco dei quadrati** si parla di soluzione **debole** al problema
Si sa chi vince ma non si sa come

❖ Per il **gioco del nim** si parla di Soluzione (**forte**) del problema
Si sa chi vince e si conosce una strategia vincente.

Recentemente è stata annunciata la soluzione **debole** della dama (pareggio).

Se si considerano partite di dama e scacchi di lunghezza fino a $n=11$

Scacchi

[1, 20, 400, 8902, 197281, 4865609, 119060324, 3195901860, 84998978956, 2439530234167, 69352859712417, 2097651003696806]

Dama

[1, 7, 49, 302, 1469, 7361, 36768, 179740, 845931, 3963680, 18391564, 85242128]

Vedi The Online Encyclopedia of Integer Sequences <http://www.research.att.com/njas/sequences/>

Non è possibile calcolare il numero di partite possibili negli scacchi, ma Shannon (il padre della teoria della informazione), ritiene che il numero di partite possibili, considerando una lunghezza standard di 40 mosse per partita, sia 10^{100} , più del numero stimato dai fisici degli atomi nell'universo, che è di 10^{80}



Sugli scacchi

“Il gioco degli scacchi è tutto: arte, scienza e sport “(Anatoly Karpov)

“Il gioco degli scacchi è un gioco collerico ed irascibile, addirittura oltraggioso per chi perde per uno scacco matto “(Robert Burton)

“Il gioco degli scacchi è uno sport. Uno sport violento” (Marcel Duchamp)

“Il gioco degli scacchi è il metro di giudizio dell'intelligenza” (Johann Goethe)

“Il gioco degli scacchi è una battaglia contro l'errore”(Johannes Zukertort)

“Il gioco degli scacchi è un mare dove il moscerino può bere e l'elefante fare il bagno “(Proverbio indiano)

“Il gioco degli scacchi sono io” (Salvador Dali')

“Il gioco degli scacchi non è solo un futile divertimento ... la vita stessa è una specie di partita a scacchi” (Ben Franklin)

“La vita è troppo corta per gli scacchi”(Henry James Byron)

“Il gioco degli scacchi è una bella amante”(Bent Larsen)

“Il gioco degli scacchi è un mistero come le donne” (Cecil Purdy)

“Ci sono molti scacchi, ma un solo matto” (Proverbio russo)

Giochi a somma zero

Sono i giochi in cui gli interessi dei giocatori sono **contrapposti**: se cambiando da un esito a un altro uno ottiene più soddisfazione, l'altro ne ottiene necessariamente meno

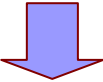
Le situazioni più interessanti da analizzare **non** sono a somma zero: In molti casi i giocatori hanno interessi parzialmente coincidenti, e parzialmente contrapposti.

Tuttavia la loro analisi è molto importante come primo caso significativo

I giochi finiti a somma zero si rappresentano tramite una **matrice**.

Un giocatore (il primo) sceglie una riga, l'altro una colonna: il **numero individuato** è quanto il **secondo paga al primo**.



9	3	0	0
6	5	7	
0	4	9	5
9		5	0

Equilibrio: $\text{maxmin} = \text{minmax}$



0	4	7	3	2
5	8	9	5	6
1	5	3	2	1
5	10	8	5	9
0	9	6	1	7



0	4	7	3	2
5	8	9	5	6
1	5	3	2	1
5	10	8	5	9
0	9	6	1	7



0	4	7	3	2
5	8	9	5	6
1	5	3	2	1
5	10	8	5	9
0	9	6	1	7



0	4	7	3	2
5	8	9	5	6
1	5	3	2	1
5	10	8	5	9
0	9	6	1	7

La morra cinese

	s	c	f
s	0	-1	1
c	1	0	-1
f	-1	1	0